В. А. ИВАШКИН

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ОЦЕНКАХ S - ЧИСЕЛ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА А СНИЗУ

В вычислительной математике особое место занимает проблема оценки погрешности метода решения задачи. Так, для погрешности метода нередко получают уравнение

$$Ax=b,$$

где A — матрица порядка n, x и b векторы-столбцы. Откуда следует

$$x=A^{-1}b.$$

Следовательно, $\|x\| \leqslant \|A^{-1}\| \|b\|$.

В качестве нормы матрицы A можно принять число

$$S = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i(\sqrt{A A^*}),$$

где λ_i — собственные числа матрицы.

Тогда

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i(\sqrt{AA^*}) = \max_{1\leqslant t\leqslant n} \lambda_i(\sqrt{A A^{*-1}}).$$

В связи с этим возникает интерес к следующей задаче: известно, что $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i(A)$, $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda(\sqrt{A A^*})$ ограничены сверху равномерно для всех n (n — порядок матрицы), и также $\min \lambda(A) \geqslant \alpha > 0$ при любом n, нужно оценить снизу.

Используя теорему $\min\limits_{0\leqslant n\leqslant n} \lambda(\sqrt{A A^*})$. [1]

Теорема. Пусть A — некоторый вполне непрерывный оператор, а

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (0 < x_n \leqslant x_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant x_1 \leqslant \infty) \quad n \leqslant \nu(A)$$

функция, которая имеет непрерывные частные производные, удовлетворяющие условиям:

$$1. \frac{\partial F}{\partial x_к} > 0 \qquad (k=1, \ldots, n).$$

$$2. x_{к+1} \frac{\partial F}{\partial x_{к+1}} < x_к \frac{\partial F}{\partial x_к} \qquad \text{при } x_{к+1} < x_к.$$

тогда

$$F(|\lambda_1|, \ |\lambda_2|, \ \ldots \ |\lambda_n|) \leqslant F(s_1, \ s_2, \ldots, s_n),$$

где

$$\lambda_j = \lambda_j \ (A) \quad s_j = \lambda_j(\sqrt{A A^*}) \qquad j=1, 2, \ldots \ n.$$

причем знак равенства имеет здесь место в том и только в том случае, когда

$$|\lambda_j| = s_j \qquad (j=1, 2, \ldots, n).$$

Можно построить ряд функций для получения требуемых оценок, не зависящих от порядка матрицы A следующего вида:

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda \ (\sqrt{A A^*} \geqslant \min_{0 \leqslant n \leqslant n} \lambda \ (A) f(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i (A), \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i \sqrt{A A^*},$$

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda (A)$$

Литература

1. **И. Ц. Гохберг** и **М. Г. Крейн**. «Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве». Москва, 1965.

В. С. ДЕНИСОВ

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается система двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y + f(x) \quad \frac{dy}{dt} = g(x) \tag{1}$$

При выполнении обобщенных условий Гурвица $xf(x) < 0$, $xg(x) < 0$ при $x \neq 0$, $f(0) = g(0) = 0$ исследование системы (1) проведено Н. П. Еругиным, В. А. Плиссом, Н. Н. Красовским и другими. Н. Н. Кушков провел исследование системы (1) при нарушении этих условий. Накладывая на $f(x)$ и $g(x)$ дополнительные условия, он доказал ряд теорем о существовании предельного цикла, окружающего единственную особую точку — начало координат. Предполагая, что система (1) удовлетворяет условиям существования и единственности решения при любых начальных значениях (x, y), нами доказаны теоремы о существовании по крайней мере одного предельного цикла, окружающего три особые точки, расположенные на оси