

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ ГОМПЕРЦА И ПЕРЛА И ОСОБЕННОСТИ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ ДЛЯ АППРОКСИМИРОВАНИЯ

Дмитриев А.П., к.т.н., доц., Авласенко А.С., студ.

Витебский государственный технологический университет,
г. Витебск, Республика Беларусь

Реферат. В статье рассмотрены основные свойства функций Гомперца и Перла. Получены математические модели аппроксимирования методом наименьших квадратов зависимости относительного удлинения от приложенной нагрузки при одноосном растяжении искусственных кож для верха обуви кривыми Гомперца и Перла.

Ключевые слова: искусственная кожа, верх обуви, кривая одноосного растяжения, математическая модель, аппроксимирование, кривая Гомперца, кривая Перла.

Одной из важнейших характеристик качества материалов верха обуви при полуцикловых испытаниях на растяжение является кривая зависимости относительного удлинения от приложенной нагрузки (далее кривая растяжения). Кривые растяжения, полученные одноосном растяжении образцов некоторых из современных двухслойных искусственных кож (ИК Т) вдоль тканой основы показаны на рисунке 1.

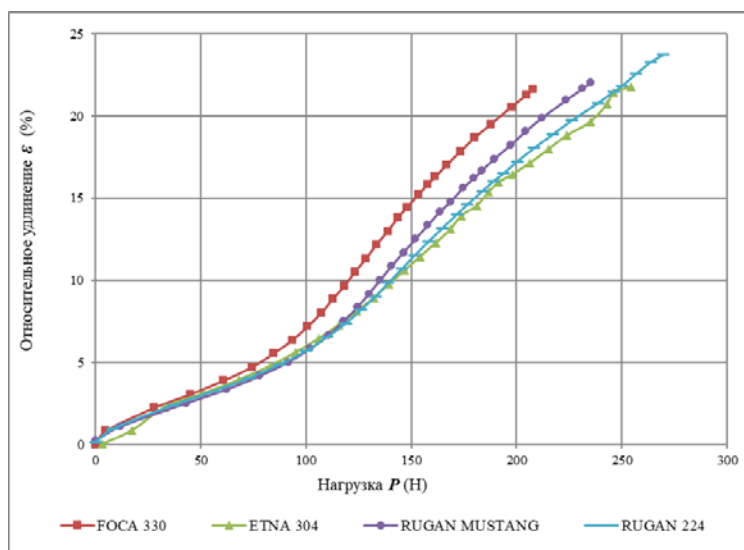


Рисунок 1 – Экспериментальные кривые растяжения (вдоль тканой основы ИК Т)

Полуцикловые характеристики применяемых в заготовках верха обуви ИК Т определялись растяжением элементарных проб прямоугольной формы размером 20×160 мм (рабочая зона 20×100 мм согласно ГОСТ 17316-71 «Кожа искусственная мягкая. Метод определения разрывной нагрузки и удлинения при разрыве» [1]. Испытания проводились на машине испытательной ИП 5158-5 при скорости движения нижнего зажима разрывной машины 100 мм/мин (для мягких ИК).

Так как деформация материалов для деталей верха обуви не подчиняется закону Гука, поэтому кривые растяжения рекомендуется аппроксимировать степенной функцией вида:

$$\varepsilon = A \cdot Q^n, \quad (1)$$

где ε – относительное удлинение, %, A – коэффициент растяжимости материала, Q – усилие, определяемое формулой $Q = 0,1P$ (изменение величины нагрузки P до 0,75 от разрывной нагрузки P_R), Н, n – показатель степени. Коэффициент растяжимости A и показатель степени n определяют изогнутость кривой растяжения. Формула (1) была впервые предложена Зыбиным Ю. П. в работе [2]. Известно, что вид кривых растяжения

определяется структурой и способностью материалов к ориентации и зависит от конструктивных элементов его жёсткости.

Анализ экспериментальных кривых растяжения импортных ИК Т (рис. 1) показал, что при растяжении вдоль основы такие кривые имеют перегиб в районе 3–10 % относительного удлинения, что очевидно связано со структурными изменениями, происходящими в тканой основе на макроуровне при деформировании ИК, и поэтому кривые не имеют выраженной степенной зависимости. Характер такой зависимости представляет собой, скорее всего функцию Гомперца (рис. 2), так как на первом участке прирост нагрузки незначителен, на втором прирост увеличивается, на третьем же стремится быть постоянным, т. е. график имеет вид близкий к S-образной линии, что было впервые высказано в работе [3]. К линиям указанного вида также относится кривая Перла (рис. 3).

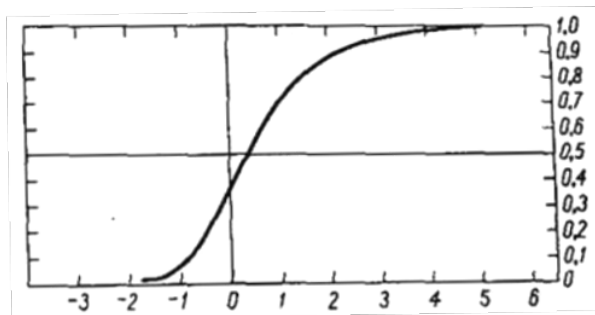


Рисунок 2 – Кривая Гомперца

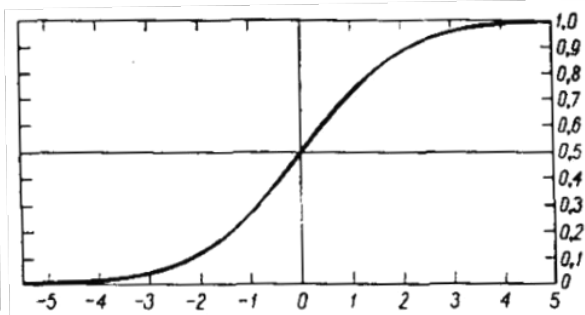


Рисунок 3 – Кривая Перла

Настоящая работа посвящена изучению указанных кривых Гомперца и Перла, определению возможности их применения для аппроксимирования экспериментальных кривых растяжения образцов ИК Т.

Уравнением кривой Гомперца имеет вид:

$$y = Le^{-be^{-kt}} \quad (2)$$

Кривая Гомперца может быть выбрана в качестве трёхпараметрической математической модели процесса растяжения, при этом эта функция (на графике изображена кривая Гомперца при $L=b=k=1$) имеет перегиб при $t = \frac{\ln b}{k}$, причём $y = \frac{L}{e}$. При этом горизонтальная асимптота, равная L , проходит выше кривой.

Уравнение кривой Перла (логистическая кривая) имеет вид:

$$y = \frac{L}{1 + ae^{-bt}} \quad (3)$$

Указанная кривая (на графике изображена кривая Гомперца при $L=a=b=1$) также имеет перегиб при $t = \frac{\ln a}{b}$, причём $y = \frac{L}{2}$.

Кривая Гомперца (2) линеаризуется двойным логарифмированием. Вначале $\ln \frac{y}{L} = -be^{-kt}$ и в конечном виде:

$$\ln \left(\ln \frac{L}{y} \right) = \ln b - kt \quad (4)$$

Так как $\frac{L}{y} > 1$, то $\ln \frac{L}{y} > 0$. Введём условную переменную $U = \ln \left(\ln \frac{L}{y} \right)$ (5), тогда аппроксимирование по методу наименьших квадратов с учётом (4) и (5) (n – количество экспериментальных точек) имеет вид:

$$\sum_{m=1}^n (U_m - \ln b + k \cdot t_m)^2 \rightarrow \min \quad (6)$$

Как и в случае с кривой Гомперца кривая Перла (3) линеаризуется логарифмированием следующим образом: $\frac{L}{y} - 1 = ae^{-bt}$; $U = \ln\left(\frac{L}{y} - 1\right) = \ln a - bt$.

А значит, аппроксимирование по методу наименьших квадратов имеет вид:

$$\sum_{m=1}^n (U_m - \ln a + b \cdot t_m)^2 \rightarrow \min. \quad (7)$$

Например, аппроксимирующие экспериментальные точки растяжения образцов ИК Т FOCA 330 кривые Гомперца и Перла (рис. 4) при $L = \varepsilon_p = 28,8\%$ имеют вид:

$$\varepsilon = 28,8 \cdot e^{-4,95e^{-0,013P}} \quad \text{и} \quad \varepsilon = \frac{28,8}{1 + 62,47 \cdot e^{-0,017P}}.$$

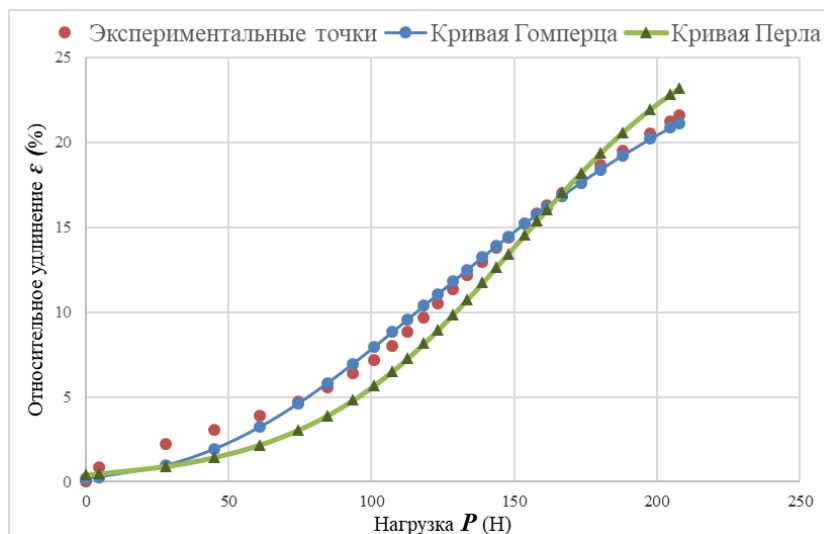


Рисунок 4 – Аппроксимирующие кривые и экспериментальные точки растяжения ИК Т FOCA 330

Дальнейшие исследования будут посвящены определению физико-механического смысла параметров указанных кривых аппроксимирования исходя из деформационных свойств ИК Т и в выборе наиболее рациональной математической модели процесса растяжения.

Список использованных источников

1. Кожа искусственная мягкая. Метод определения разрывной нагрузки и удлинения при разрыве : ГОСТ 17316-71. – Введ. 01.01.73. – Москва : Изд-во стандартов, 1973. – 6 с.
2. Зыбин, Ю. П. Материаловедение изделий из кожи / Ю. П. Зыбин [и др.]. – Москва : Лёгкая индустрия, 1968. – 384 с.
3. Дмитриев, А. П. Деформационные свойства искусственных кож на тканой основе / А. П. Дмитриев, А. Н. Буркин // Вестник Витебского государственного технологического университета. – 2010. – Вып. 19 – С. 22–27.