МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методические указания к практическим занятиям
для студентов специальностей
1-50 01 01 «Производство текстильных материалов»,
1-50 02 01 «Производство одежды, обуви и кожгалантерейных изделий»,
1-54 01 01-04 «Метрология, стандартизация и сертификация
(легкая промышленность)»

Витебск
2021

УДК 519.21 (075.8)

Составители:

О. Е. Рубаник, Т. В. Никонова, Е. Б. Дунина

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом УО «ВГТУ», протокол № 9 от 28.05.2021.

Высшая математика. Теория вероятностей: методические указания к практическим занятиям / сост. О. Е. Рубаник, Т. В. Никонова, Е. Б. Дунина. – Витебск: УО «ВГТУ», 2021. – 107 с.

Методические указания содержат теоретические и практические сведения по теме «Теория вероятностей». Изложение сопровождается большим количеством решенных примеров с подробными пояснениями. Данное издание предназначено для студентов факультета производственных технологий специальностей 1-50 01 01 «Производство текстильных материалов», 1-50 02 01 «Производство одежды, обуви и кожгалантерейных изделий», 1-54 01 01-04 «Метрология, стандартизация и сертификация (легкая промышленность)», а также может быть использовано в ходе изучения теории вероятностей студентами других специальностей дневной и заочной форм обучения.

УДК 519.21 (075.8)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания по теории вероятностей предназначены для студентов факультета производственных технологий специальностей 1-50 01 01 «Производство текстильных материалов», 1-50 02 01 «Производство одежды, обуви и кожгалантерейных изделий», 1-54 01 01-04 «Метрология, стандартизация и сертификация (легкая промышленность)».

При составлении данных указаний преследовалось несколько целей: во-первых, предложить достаточное количество задач для выработки навыков решения типовых задач, во-вторых, дать задачи, дополняющие лекционные курсы, в-третьих, иметь возможность организовать контролируемую самостоятельную работу студентов.

Весь материал пособия разделен на четыре раздела. Разделы состоят из подразделов. В начале каждого подраздела даются основные определения, формулировки теорем и приводятся соответствующие формулы. Далее приводятся решения типовых примеров и задачи для самостоятельного решения. Каждый раздел завершается вопросами теоретического характера, чтобы студент смог проконтролировать свои знания.

Методические указания могут использоваться на усмотрение преподавателя на практических занятиях студентами других специальностей различных форм обучения, а также и при дистанционном изучении данной дисциплины.

1 СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ВЕРОЯТНОСТЬ

1.1 Элементы комбинаторики

Комбинаторика – раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций объектов, подчиненных определенным условиям, можно составить из заданных объектов конечного множества.

Множество называется ***упорядоченным***, если в нем указан и, соответственно, значим порядок следования элементов. В противном случае множество называют ***неупорядоченным*** (важен состав, но не важно, в каком порядке расположены элементы). Так, например, множества (a,b,c) и (b,a,c) есть различные упорядоченные множества, но одинаковые неупорядоченные множества.

Перестановками называют различные упорядоченные множества, полученные из данного множества перестановкой его элементов. Число всевозможных перестановок из n элементов обозначают через P_n и вычисляют по формуле:

$$P_n = n!, \tag{1.1.1}$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ и по определению полагают $0! = 1$.

Если среди n элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида и т. д., то число всех возможных ***перестановок с повторениями*** определяют формулой

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}. \tag{1.1.2}$$

где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Размещениями называют различные упорядоченные подмножества, составленные из n различных элементов по m элементов $(m < n)$. Число всех возможных размещений определяется формулой

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{1.1.3}$$

Размещениями с повторением называют различные упорядоченные подмножества, составленные из n различных элементов по m элементов, причем каждый элемент может повторяться до m раз. Число размещений из n элементов по m элементов с повторением равно

$$\overline{A_n^m} = n^m. \tag{1.1.4}$$

Сочетаниями называют различные неупорядоченные подмножества, содержащие m элементов из числа n заданных различных элементов. Число всех сочетаний из n элементов по m элементов определяется формулой

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}. \qquad (1.1.5)$$

Сочетаниями с повторением называют различные неупорядоченные подмножества, содержащие m элементов из числа n заданных различных элементов, причем каждый элемент в таком подмножестве может повторяться до m раз. Число сочетаний с повторениями из n элементов по m элементов равно числу сочетаний без повторений из $n+m-1$ элементов по m элементов

$$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m. \qquad (1.1.6)$$

Отметим, что числа перестановок, размещений и сочетаний связаны равенством

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}. \qquad (1.1.7)$$

При решении задач комбинаторики используют следующие правила.

Правило суммы. Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A, либо B можно $m+n$ способами.

Правило произведения. Если объект A можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана $m \cdot n$ способами.

Пример 1. Сколькими способами можно расставить на полке пять различных книг, если: а) две определённые книги должны всегда стоять рядом; б) эти две книги не должны стоять рядом?

Решение. а) Условимся пару книг, которые должны стоять рядом, пока рассматривать как одну книгу. Тогда нужно расставить четыре различные книги по четырём местам, что можно сделать $P_4 = 4! = 24$ способами (формула для числа перестановок (1.1.1)). Учитывая теперь порядок расположения тех двух книг, которые посчитали за одну, имеем $P_2 = 2! = 2$ перестановок между ними. Согласно правилу произведения, получаем окончательно, что число способов равно $P_4 \cdot P_2 = 24 \cdot 2 = 48$.

б) Всего существует $P_5 = 5! = 120$ способов расстановки пяти различных книг на полке. Но из них, как установлено в п. а), существует 48 способов поставить определённые две книги вместе. Следовательно, число способов поставить книги так, чтобы две заданные книги не стояли рядом, равно разности $120 - 48 = 72$.

Пример 2. Сколько шестизначных чисел можно составить, используя цифры: а) 1, 2, 3; б) 0, 1, 2?

Решение. а) Все различные шестизначные числа, составленные из цифр 1, 2, 3, отличаются либо порядком (например, 112233 и 123123), либо составом (например, 111111 и 211111), причём цифры могут повторяться. Значит, количество таких шестизначных чисел равно числу размещений с повторением из 3 элементов по 6, т. е. согласно формуле (1.1.4) равно $\overline{A_3^6} = 3^6 = 729$.

Заметим, что такой же результат можно получить, используя правило произведения: возможно три варианта для выбора первой цифры в таком шестизначном числе (1, 2 или 3), для второй, третьей, четвертой, пятой и шестой цифры – тоже три варианта. Таким образом, всего получаем $3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3 = 729$ шестизначных чисел.

б) Если шестизначные числа состоят только из цифр 0, 1, 2, то первую цифру можно выбрать двумя способами, поскольку шестизначное число не может начинаться с цифры 0, а каждую из оставшихся пяти цифр можно выбрать тремя способами. Согласно правилу произведения, всего таких шестизначных чисел будет $2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3 = 486$. Такой же результат можно получить, используя формулу размещения с повторением: $\overline{A_3^6} - \overline{A_3^5} = 3^6 - 3^5 = 729 - 243 = 486$.

Пример 3. Сколькими способами можно разместить 9 студентов в двухместную, трёхместную и четырёхместную комнаты общежития?

Решение. Сначала посчитаем, сколькими способами можно разместить двух студентов из девяти в двухместную комнату. Поскольку порядок расположения студентов не важен, то искомое число способов равно числу сочетаний из девяти элементов по два, т. е. согласно формуле (1.1.5) равно $C_9^2 = \dfrac{9!}{2!\cdot7!} = 36$. Из оставшихся 9-2=7 студентов выбираем троих и селим в трёхместную комнату. Это можно сделать $C_7^3 = \dfrac{7!}{3!\cdot4!} = 7$ способами. Наконец, для четырёх последних остался один вариант размещения в четырёхместную комнату (или $C_4^4 = 1$). По правилу произведения искомое число способов равно $C_9^2 \cdot C_7^3 \cdot C_4^4 = 36\cdot35\cdot1 = 1260$.

Приведём другой способ решения этой задачи, используя формулу перестановок с повторением. Для определённости за каждым из студентов закрепим номер от 1 до 9. Тогда процесс расселения по комнатам можно продемонстрировать следующей схемой:

$$\overbrace{\underbrace{1,\ 2,}_{\substack{n_1=2\\ 2-х\ мест.\\ комн.}}\quad \underbrace{3,\ 4,\ 5,}_{\substack{n_2=3\\ 3-х\ мест.\\ комн.}}\quad \underbrace{6,\ 7,\ 8,\ 9}_{\substack{n_3=4\\ 4-х\ мест.\\ комн.}}}^{n=9}\ \text{или}\ \overbrace{\underbrace{3,\ 9,}_{\substack{n_1=2\\ 2-х\ мест.\\ комн.}}\quad \underbrace{1,\ 4,\ 5,}_{\substack{n_2=3\\ 3-х\ мест.\\ комн.}}\quad \underbrace{6,\ 7,\ 8,\ 2}_{\substack{n_3=4\\ 4-х\ мест.\\ комн.}}}^{n=9}\ \text{или} \ldots$$

Поясним данную схему. Сначала расположим этих 9 человек случайным образом по порядку, а затем составим из них три группы, содержащие 2, 3 и 4 студента соответственно (т. е. расселим в двухместную, трёхместную и четырёхместную комнаты). Учитывая то, что совершенно не важно, в каком порядке расположены студенты внутри каждой группы (другими словами, каждая группа содержит элементы одного вида), приходим к выводу, что число способов размещения 9 студентов указанным в условии задачи образом равно числу перестановок с повторением из $n=9$ элементов по $n_1=2, n_2=3, n_3=4$ элементов и определяется формулой (1.1.2):

$$P_9(2,3,4)=\frac{9!}{2!\cdot 3!\cdot 4!}=1260.$$

Пример 4. Сколькими способами можно выбрать из колоды, содержащей 36 карт: а) три любые карты; б) два туза и одну шестёрку?

Решение. Поскольку все карты в колоде различны и порядок расположения карт в каждой из троек не важен, то: а) выбрать 3 любые карты из имеющихся 36 можно $C_{36}^3=\dfrac{36!}{3!\cdot 33!}=7140$ способами (формула (1.1.5); б) выбрать два туза из имеющихся четырёх и одну шестёрку из имеющихся четырёх можно $C_4^2\cdot C_4^1=\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot 4=6\cdot 4=24$ способами (формула (1.1.5) и правило произведения).

ЗАДАЧИ

1.1.1 Сколько различных перестановок букв можно сделать в словах *«КНИГА», «ФАБРИКА», «МОЛОКО»?* (Ответ: 120; 2 520; 120)

1.1.2 Сколькими различными способами можно выбрать четыре человека из двенадцати кандидатов: а) на четыре различные должности; б) на четыре одинаковые должности? (Ответ: а) 11 880; б) 495)

1.1.3 В машине имеется 5 мест. Сколькими способами 5 человек могут расположиться в этой машине, если занять место водителя могут только двое из них, имеющие права на управление этой машиной? (Ответ: 12)

1.1.4 Из десяти депутатов надо выбрать председателя счётной комиссии и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать? (Ответ: 90)

1.1.5 В магазине имеется шесть моделей сотовых телефонов. Сколькими способами можно закупить в организацию 8 телефонов? (Ответ: 1 287)

1.1.6 Сколькими способами могут сесть 8 человек за круглым столом? (Ответ: 40 320)

1.1.7 В лотерее «Спортлото» игрок должен зачеркнуть 6 из 49 возможных чисел от 1 до 49. Сколько существует возможных вариантов для игрока? (Ответ: 13 983 816)

1.1.8 Для разгрузки товаров директору супермаркета требуется выделить 5 из 20 имеющихся рабочих. Сколькими способами это можно сделать, осуществляя отбор в случайном порядке? (Ответ: 15 504)

1.1.9 Отдел рекламы фирмы имеет средства на размещение рекламы только в 15 из 25 городских газет. Сколько существует способов для случайного отбора газет для помещения объявлений? (Ответ: 3 268 760)

1.1.10 Сколько можно составить сигналов из 8 флажков различного цвета, взятых по 2? (Ответ: 56)

1.1.11 Сколькими способами можно выбрать три детали из коробки, содержащей 18 деталей? (Ответ: 816)

1.1.12 На железнодорожной станции имеется 7 путей. Сколькими способами можно расставить на них 4 состава? (Ответ: 840)

1.1.13 В ящике 10 шаров, из которых 4 зеленых, 3 голубых и 3 красных. Сколькими способами можно извлечь три шара так, чтобы они оказались разного цвета? (Ответ: 36)

1.1.14 Среди 30 деталей, изготовленных на автоматическом станке, оказалось 5, не отвечающих стандарту. Сколькими способами можно выбрать 4 стандартные и 2 нестандартные детали? (Ответ: 126 500)

1.1.15 При встрече 16 игроков футбольной команды обменялись рукопожатиями. Сколько рукопожатий было сделано при этом? (Ответ: 120)

1.1.16 На шахматном турнире было сыграно 78 партий, причем каждый из шахматистов сыграл с остальными по одной партии. Сколько шахматистов участвовало в турнире? (Ответ: 13)

1.1.17 Сколькими способами можно распределить первую, вторую и третью премии на конкурсе, в котором принимали участие 20 студентов? (Ответ: 6 840)

1.1.18 Сколько существует 6-значных чисел, у которых каждая последующая цифра меньше предыдущей? (Ответ: 210)

1.1.19 В почтовом отделении продаются открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить в нем: а) 8 открыток, б) 8 различных открыток? (Ответ: а) 24 310; б) 45)

1.1.20 В продаже имеются гвоздики, розы, гладиолусы, ирисы, тюльпаны, астры и васильки. Сколькими способами можно составить букет из пяти цветков: а) цветы в букете все различные, б) цветы в букете могут повторяться? (Ответ: а) 21; б) 462)

1.1.21 Номер машины состоит из трех букв и четырех цифр. Сколько всего существует разных номеров, если алфавит содержит 32 буквы? (Ответ: 327 680 000)

1.1.22 Служащий банка утратил 5-значный код одного из сейфов, состоящий из различных цифр. Однако он помнит только 2 цифры этого кода, но не знает их месторасположения. Сколько вариантов он должен перепробовать, чтобы открыть сейф? (Ответ: 6 720)

1.1.23 Сколько можно составить различных чисел из цифр 1, 2, 3, 4, 5: а) любых 3-значных; б) 3-значных с различными цифрами; в) 3-значных чётных; г) 3-значных, составленных из нечётных цифр; д) любых 5-значных; е) 5-значных с различными цифрами? (Ответ: а) 125; б) 60; в) 50; г) 6; д) 3 125; е) 120)

1.1.24 Из группы, содержащей 16 студентов, нужно на предстоящую спортивную эстафету выделить 3 команды: 2 команды по 3 человека и одну из 5 человек. Сколькими способами можно это сделать, если каждый из студентов может попасть в любую из команд? (Ответ: 40 360 320)

1.1.25 Сколькими способами можно выбрать из колоды, содержащей 36 карт, 4 карты таким образом, чтобы среди них были: а) 2 карты масти «пик» и 2 карты масти «треф»; б) 3 карты масти «пик»; в) 2 семёрки, 1 дама и 1 туз; г) хотя бы 1 туз? (Ответ: а) 1 296; б) 2 268; в) 96; г) 22 945)

1.1.26 Сколькими способами можно составить пароль из пяти цифр, если ни одна цифра не повторяется? (Ответ: 30 240)

1.1.27 Сколько 10-буквенных слов можно составить из слова «МАТЕМАТИКА» так, чтобы все три буквы «А» не стояли рядом? (Ответ: 141 120)

1.1.28 Сколькими способами можно распределить 13 выпускников по трём районам, если в одном из них имеется 7, в другом – 4 и в третьем – 2 вакантных места? (Ответ: 25 740)

1.1.29 Шесть пассажиров садятся в электропоезд, состоящий из девяти вагонов. Определить число всех возможных вариантов размещения пассажиров в поезде, если каждый из пассажиров может сесть в любой вагон. (Ответ: 531 441)

1.1.30 У одного студента имеется четыре книги по математике, а у второго – семь. Сколькими способами они могут обменять друг у друга две книги на две книги? (Ответ: 126)

1.2 События. Классическое и статистическое определение вероятности

Теория вероятности может быть построена аксиоматически. Эта аксиоматика создана академиком А. Н. Колмагоровым в 20-х годах прошлого века.

Пусть проводится некоторый опыт (эксперимент, наблюдение, испытание), исход которого предсказать заранее нельзя. Такие опыты в теории вероятностей называют ***случайными***.

Событием называется результат опыта. Это понятие является первичным в теории вероятностей. События обычно обозначаются большими буквами латинского алфавита: $A, B, C, ...$

Случайным событием называют такое событие, которое в результате опыта при осуществлении определенной совокупности условий может произойти, а может и не произойти (до проведения опыта точно предсказать невозможно).

Элементарными событиями называются события, которые нельзя разложить на составляющие их события. Элементарные события обычно обозначают ω_i.

Множество всех взаимоисключающих элементарных исходов (событий) для данного опыта называют ***пространством элементарных событий*** и обозначают Ω.

Из определения следует, что при проведении опыта обязательно наступает одно из элементарных событий ω_i, и никакие два отличные друг от друга элементарные события ω_i и ω_j не могут наступить одновременно.

Те элементарные исходы, в которых интересующее событие наступает, называют ***благоприятствующими*** этому событию.

Событие называется ***достоверным***, если оно обязательно происходит при выполнении некоторых данных условиях. Достоверное событие обозначается Ω.

Невозможное событие – это событие, которое при выполнении данных условий не может произойти; обозначается $\emptyset$.

Несколько событий в данном опыте называют ***равновозможными***, если есть основание считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое, то есть все события имеют равные шансы.

Под ***вероятностью события*** A (обозначают $P(A)$) понимается некоторая числовая характеристика возможности наступления этого события. Существует несколько определений этого понятия.

1. Классическое определение вероятности.

Пусть пространство Ω, связанное с опытом, состоит из конечного числа равновозможных элементарных событий. ***Классической вероятностью события*** A называется отношение числа m элементарных исходов, благоприятствующих событию A к числу n всех равновозможных исходов опыта, в котором может появиться это событие

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1.2.1}$$

Свойства вероятности события:

а) вероятность достоверного события равна единице;

б) вероятность невозможного события равна нулю;

в) вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей

$$0 \le P(A) \le 1. \tag{1.2.2}$$

2. Статистическая вероятность.

Относительной частотой события $w(A)$ называется отношение числа испытаний m, в которых это событие появилось, к числу всех n произведенных испытаний

$$w(A) = \frac{m}{n}.$$

Статистической вероятностью события A называется постоянная величина, вокруг которой колеблются значения частот при неограниченном возрастании числа n.

Классическое определение вероятности предполагает, что все элементарные исходы равновозможны. Однако о равновозможности исходов опыта судят исходя из соображений симметрии (например, как в случае игрального кубика). На практике трудно указывать основания, позволяющие считать, что все элементарные исходы равновозможны. В связи с этим и было введено статистическое определение вероятности. Кроме этого, классическое определение вероятности не требует, чтобы испытания производились в действительности, а определение относительной частоты предполагает, что испытания были произведены фактически.

Пример 1. Семь шаров размещают случайным образом в десяти коробках (в каждую коробку можно поместить любое число шаров). Какова вероятность того, что в одной из коробок будет четыре шара, а в другой – три?

Решение. Сначала найдём количество n всех возможных элементарных исходов. Поскольку каждый из семи шаров можно поместить в любую из десяти коробок, то для каждого шара возможно десять вариантов расположения, и по правилу произведения число всех равновозможных элементарных исходов равно 10^7.

Подсчитаем число m благоприятствующих элементарных исходов. Сначала найдём, сколько всего способов разбиения семи шаров на две группы, в одной из которых будет четыре шара, а в другой – три. Поскольку порядок расположения шаров в группах не важен, то выбрать четыре шара из семи можно C_7^4 способами и, соответственно, эти шары попадают в первую группу, а для оставшихся трёх шаров остаётся один способ, т. к. они автоматически попадают во вторую группу. Значит, всего способов разбиения шаров на группы будет равно $C_7^4 \cdot 1$.

Теперь определим число всех возможных способов распределения этих двух групп шаров по коробкам. Для этого за каждой из коробок закрепим номер от 1 до 10. Далее, введя обозначение $(a,\ b)$ – первая группа из четырёх шаров попала в коробку № a, вторая группа из трёх шаров – в коробку № b (по условию задачи $a \neq b$, т. к. эти наборы шаров должны оказаться в разных коробках), можно указать следующие варианты расположения наборов шаров: (1, 2), (2, 1), (1, 3),…, (9, 10), (10, 9). Очевидно, что речь идёт о размещениях из 10-элементного множества по два элемента. А всего таких размещений равно A_{10}^2.

Таким образом, по правилу произведения, число всех благоприятствующих исходов будет:

$$m = C_7^4 \cdot 1 \cdot A_{10}^2 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot \frac{10!}{8!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3} \cdot 9 \cdot 10 = 35 \cdot 90 = 3150.$$

Тогда вероятность события, о котором говорится в условии задачи,

$$P = \frac{m}{n} = \frac{3150}{10^7} = 0{,}000315.$$

Пример 2. В ящике находятся 10 жёлтых и 8 синих шаров. Наугад вынимают 7 шаров. Найти вероятность, что среди отобранных шаров окажется 4 жёлтых?

Решение. Общее число n всех возможных элементарных исходов опыта равно числу способов, которыми можно извлечь 7 шаров из имеющихся 18 без учёта порядка, т. е. C_{18}^{7} – числу сочетаний из 18 элементов по 7.

Подсчитаем число m элементарных исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди 7 извлечённых шаров – ровно 4 жёлтых): 4 жёлтых шара можно взять из имеющихся 10 жёлтых шаров C_{10}^{4} способами, при этом остальные $7-4=3$ шара должны быть синими; взять же 3 синих шара из имеющихся 8 синих шаров можно C_{8}^{3} способами. Следовательно, по правилу произведения число благоприятствующих исходов равно $C_{10}^{4}\cdot C_{8}^{3}$.

Тогда искомая вероятность будет равна

$$P=\frac{m}{n}=\frac{C_{10}^{4}\cdot C_{8}^{3}}{C_{18}^{7}}=\frac{11760}{31824}=\frac{245}{663}=0{,}37\,.$$

Пример 3. Шестигранный игральный кубик последовательно подбрасывают два раза. Найти вероятность того, что суммарное число выпавших очков не будет превосходить четырёх.

Решение. Элементарные исходы опыта можно интерпретировать как пары чисел $(i,j), i=\overline{1{,}6}, j=\overline{1{,}6}$, где i – число очков, выпавших при первом подбрасывании, а j – при втором. Очевидно, что общее число исходов опыта n будет равно числу способов, которыми можно составить двухэлементные упорядоченные подмножества из имеющегося шестиэлементного множества, и элементы могут повторяться, т. е. $\overline{A_{6}^{2}}$ – числу размещений с повторением из 6 элементов по 2.

Число благоприятствующих исходов найдём простым перебором (сумма выпавших очков должна быть меньше либо равна четырём): $(1{,}1),(1{,}2),(1{,}3),(2{,}1),(2{,}2),(3{,}1)$, т. е. $m=6$.

Таким образом, получаем:

$$P=\frac{m}{n}=\frac{6}{\overline{A_{6}^{2}}}=\frac{6}{6^{2}}=\frac{1}{6}.$$

ЗАДАЧИ

1.2.1 В коробке находится 13 белых, 9 синих и 8 красных шаров. Из коробки извлекают один шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар окажется: а) белым; б) красным? (Ответ: а) 13/30; б) 4/15)

1.2.2 Наудачу выбирают число от 1 до 42. Какова вероятность того, что это число является делителем 42? (Ответ: 4/21)

1.2.3 Из чисел 1, 2, …, 8 наудачу выбираем одно. Найти вероятность того, что оно кратно 3. (Ответ: 0,25)

1.2.4 Наудачу называем двузначное положительное число. Найти вероятность того, что оно: а) кратно 3; б) кратно 4; в) кратно 5. (Ответ: а) 1/3; б) 11/45; в) 1/5)

1.2.5 Наудачу называем одно из чисел 1, 2, 3, 4, 5. Найти вероятность того, что это число удовлетворяет уравнению $x^2 - 6x + 8 = 0$. (Ответ: 0,4)

1.2.6 Подбрасываем 3 монеты. Найти вероятность того, что выпадут ровно 2 герба. (Ответ: 3/8)

1.2.7 Владелец банковской карты забыл PIN-код (четыре цифры) и, помня только, что все четыре цифры различные, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что PIN-код набран правильно. (Ответ: 0,504)

1.2.8 Подбрасывается два шестигранных игральных кубика. Найти вероятности событий: а) сумма выпавших очков равна 8; б) сумма выпавших очков чётная; в) сумма выпавших очков кратна числу 3. (Ответ: а) 5/36; б) 1/2; в) 1/3)

1.2.9 Подбрасывается три шестигранных игральных кубика. Что вероятнее – получить в сумме 8 или 10 очков? (Ответ: вероятность получить в сумме 8 очков: $P_1 = 21/216$, вероятность получить в сумме 10 очков $P_2 = 27/216$; $P_1 > P_2$)

1.2.10 Подбросили три шестигранных кубика. Найти вероятности следующих событий: а) сумма выпавших очков равна шести; б) сумма выпавших очков равна десяти, а произведение равно двадцати; в) сумма выпавших очков либо меньше семи, либо больше шестнадцати; г) сумма выпавших очков больше десяти, но меньше пятнадцати.

1.2.11 Кубик, все грани которого окрашены в красный цвет, распилен на 125 кубиков одинакового размера. Кубики тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлечённый кубик имеет окрашенные грани: а) три; б) две; в) одну; г) ни одной. (Ответ: а) $0{,}064$; б) $0{,}288$; в) $0{,}432$; г) $0{,}216$)

1.2.12 Пять карточек, обозначенных буквами «О», «П», «Р», «С», «Т», наудачу положили в ряд. Найти вероятность того, что получилось слово «СПОРТ». (Ответ: 1/120)

1.2.13 Карточки, обозначенные буквами «К», «Л», «М», «Т», «О», «О», «О», наудачу расположили в ряд. Найти вероятность того, что получится слово «МОЛОТОК». (Ответ: 1/840)

1.2.14 Наудачу называем трехзначное натуральное число. Найти вероятность того, что его цифры окажутся возрастающими. (Ответ: 7/75)

1.2.15 Найти вероятность того, что 7 различных человек родились в разные дни недели. (Ответ: 0,0061)

1.2.16 На книжной полке в произвольном порядке расставлены пять книг по высшей математике, три книги по физике и четыре книги по сопромату. Студент наудачу берёт три книги. Найти вероятность того, что извлечёнными книгами являются: а) все книги по высшей математике; б) две книги по высшей математике и одна книга по сопромату; в) все три книги по различным предметам. (Ответ: а) 2/99; б) 8/99; в) 4/33)

1.2.17 Из колоды, содержащей 36 карт, наудачу извлекают четыре карты. Найти вероятность того, что среди извлеченных карт окажутся: а) 2 туза, 1 шестерка и 1 дама; б) 1 король; в) ни одной семерки; г) все карты разных мастей; д) все карты трефовой масти. (Ответ: а) 0,0016; б) 0,3368; в) 0,1114; г) 0,0021)

1.2.18 Колоду, содержащую 36 карт, наудачу разделили на две равные части. Какова вероятность того, что в каждой части будут по два туза? (Ответ: 0,3974)

1.2.19 В рамки спортивного праздника, запланированного в университете, включена многоэтапная эстафета. Последний этап состоит в следующем: подбежавший игрок видит перед собой ящик на замке, в котором лежит приз и 20 ключей, 3 из которых подходят к замку, а остальные – нет. Игрок может взять любые 5 ключей. Найти вероятность того, что игрок не сможет открыть замок, используя лишь эти 5 ключей. (Ответ: 0,3991)

1.2.20 В ящике имеется 7 шаров, из которых 4 белых и 3 синих. Наудачу извлекаем 3 шара. Найти вероятность того, что ровно 2 из этих шаров окажутся белыми. (Ответ: 18/35)

1.2.21 Имеется шесть жетонов с номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Наудачу извлекаем три жетона. Найти вероятность того, что среди них окажется жетон с номером 1. (Ответ: 0,5)

1.2.22 Четыре тома сказок поставлены в ряд на полку. Найти вероятности событий: а) первый том сказок стоит последним; б) первый том стоит первым, а четвертый – последним; в) третий и четвертый том стоят рядом; г) первый, второй, третий том будут стоять рядом. (Ответ: а) 0,25; б) 0,08; в) 0,5; г) 0,5)

1.2.23 На девяти карточках написаны цифры 1, …, 9. Карточки раскладывают на столе случайным образом в одну линию. Какова вероятность того, что между карточками с номерами 1 и 2 будут находиться ровно три другие карточки? (Ответ: 0,1389)

1.2.24 Четыре человека вошли в лифт 11-этажного дома. Найти вероятность того, что: а) все они выйдут на разных этажах; б) все они выйдут на втором этаже; в) все они выйдут на каком-нибудь одном этаже; г) на одном из этажей выйдут два человека и на другом два человека. (Ответ: а) $0{,}504$; б) $0{,}0001$; в) $0{,}001$; г) $0{,}054$)

1.2.25 На остановке три пассажира. К остановке подходят четыре автобуса. Найти вероятность того, что: а) пассажиры войдут в разные автобусы; б) все три пассажира войдут в первый автобус; в) все три пассажира войдут в какой-нибудь один автобус. (Ответ: а) $0{,}375$; б) $0{,}016$; в) $0{,}0625$)

1.2.26 Маршрутное такси, в котором находятся 5 пассажиров, делает остановки в шести пунктах. Каждый из пассажиров может выйти с равной вероятностью на любой остановке. Какова вероятность того, что: а) все пассажиры выйдут на разных остановках; б) на одной остановке выйдут 3 человека, а на другой – два? (Ответ: а) 0,0926; б) 0,0193)

1.1.27 В группе, состоящей из 18 студентов, три отличника. Найти вероятность того, что при случайном разбиении группы на три равные по количеству людей подгруппы, в каждой подгруппе окажется по одному отличнику. (Ответ: 0,2647)

1.2.28 В партии, содержащей 350 телевизоров, отдел технического контроля обнаружил 5 бракованных. Найти относительную частоту бракованных телевизоров. (Ответ: 1/70)

1.2.29 Найдите частоту появления герба при 20 подбрасываниях симметричной монеты. Опыт проведите самостоятельно.

1.2.30 При стрельбе по мишени частота попаданий $w = 0,9$. Найти число выстрелов, если получено 18 попаданий. (Ответ: 20)

1.3 Геометрическое определение вероятности

Геометрическое определение вероятности является обобщением классического определения вероятности на случай, когда множество всех равновозможных исходов опыта бесконечно и несчетно.

Пусть случайный эксперимент удовлетворяет следующим условиям: а) исходы эксперимента можно изобразить точками некоторой области $\Omega \subset R^n$, имеющей конечную меру μ; б) попадание точки в любые области $A_i \subseteq \Omega$, имеющие одинаковую меру μ, равновозможное и не зависит от формы и расположения A_i внутри Ω. При этом говорят, что точка бросается в область Ω наудачу.

Согласно геометрическому определению вероятности, вероятность попадания точки в любую область A (вероятность события A) пропорциональна мере этой области:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}. \qquad (1.3.1)$$

Рассмотрим частные случаи.

При $n = 1$ (рис. 1 а) под мерой $\mu(\cdot)$ понимается длина $l(\cdot)$ подмножества на числовой оси R и

$$P(A) = \frac{l(A)}{l(\Omega)}. \qquad (1.3.2)$$

При $n = 2$ (рис. 1 б) под мерой $\mu(\cdot)$ понимается площадь $S(\cdot)$ подмножества на плоскости R^2 и

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}. \qquad (1.3.3)$$

При $n = 3$ (рис. 1 в) под мерой $\mu(\cdot)$ понимается объем $V(\cdot)$ подмножества в пространстве R^3 и

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)}. \qquad (1.3.4)$$

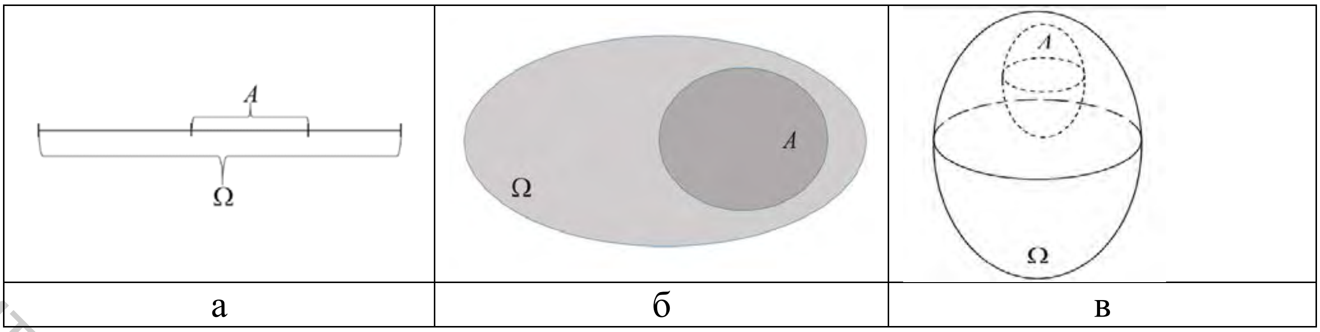


Рисунок 1

Пример 1. Ленту, длиной 10 см, случайным образом разрезают ножницами. Найти вероятность того, что длина одного из обрезков составит не менее 7 см.

Решение. Поскольку ленту можно разрезать где угодно, то множество Ω – отрезок *BK* длиной 10 см (рис. 2), значит $l(\Omega)=10$ см.

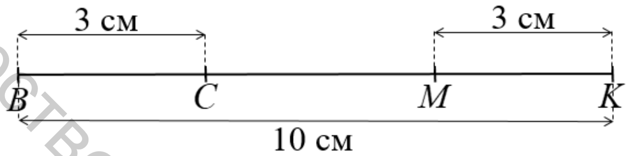


Рисунок 2

Дина одного из обрезков составит не менее 7 см (событие *A*), если разрез придется в любой точке участков *BC* или *MK*, а их суммарная длина равна $l(A)=3+3=6$ см. Тогда согласно формуле (1.3.2)

$$P(A)=\frac{l(A)}{l(\Omega)}=\frac{6}{10}=0{,}6.$$

Пример 2. Наудачу взяты два положительных числа, каждое из которых не превышает четырех. Найти вероятность того, что их сумма не превышает 3, а произведение – не меньше 1,25.

Решение. Пусть x – первое положительное число, а y – второе. Введем в рассмотрение прямоугольную систему координат. Поскольку числа x и y берутся из промежутка $(0;4]$ (положительные и не больше 4), то можно считать, что выбирается точка с координатами $(x;y)$ из квадрата $(0;4]\times(0;4]$ на плоскости.

Найдем область, расположенную внутри этого квадрата, координаты каждой точки которой удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} x+y\le 3, \\ x\cdot y\ge 1{,}25. \end{cases}$$

Первое условие системы выполняется, если область лежит ниже прямой $x+y=3$ или $y=3-x$, а второе – в случае расположения области выше гиперболы $x\cdot y=1{,}25$ или $y=1{,}25/x$. Значит, искомая область представляет собой пересечение двух этих областей (рис. 3).

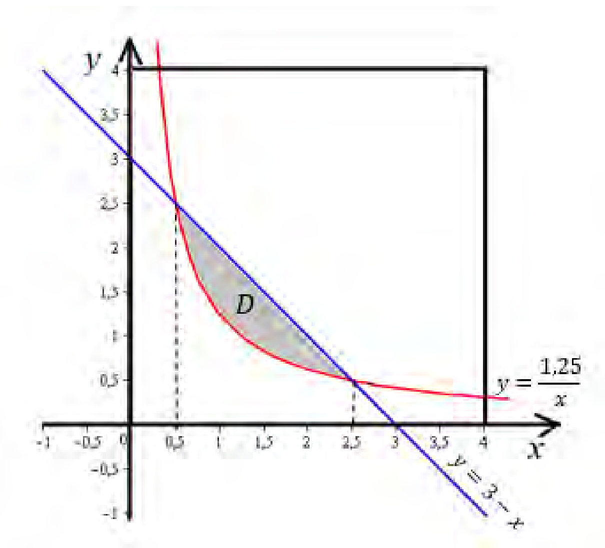


Рисунок 3

Таким образом, указанная в условии задачи вероятность будет равна вероятности попадания точки, наудачу брошенной в квадрат, в область D и, согласно формуле (1.3.3), равна отношению площади закрашенной фигуры D (в которой выполняются условия) к площади всей фигуры (квадрата):

$$P = \frac{S_D}{S_{квадр.}}.$$

Площадь квадрата $S_{квадр.} = 4 \cdot 4 = 16$. Площадь фигуры D найдем с помощью определенного интеграла:

$$S_D = \int\limits_{0,5}^{2,5} \left(3 - x - \frac{1,25}{x}\right) dx = \left(3x - \frac{x^2}{2} - 1,25 \ln|x|\right)\Bigg|_{0,5}^{2,5} = \left(3 \cdot 2,5 - 0,5 \cdot 2,5^2 - 1,25 \ln 2,5\right) -$$

$$-\left(3 \cdot 0,5 - 0,5 \cdot 0,5^2 - 1,25 \ln 0,5\right) \approx 0,988.$$

Тогда вероятность

$$P = \frac{0,988}{16} = 0,062.$$

Пример 3. На плоскости область G ограничена эллипсом $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$, а область g – эллипсом $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. В область G брошена точка. Какова вероятность того, что точка попадет в область g?

Решение. Вычислим площадь области, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, записав его параметрическое уравнение: $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$. Поскольку эллипс симметричен относительно координатных осей, то площадь равна

$$S=4\int\limits_0^a ydx=4\int\limits_{\pi/2}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt=-4ab\int\limits_{\pi/2}^{0}\sin^2 tdt=\pi ab.$$

Для данной задачи $S_G=5\cdot 7\cdot\pi=35\pi$, $S_g=5\cdot 3\cdot\pi=15\pi$. По формуле (1.3.3) получим $P=\dfrac{S_g}{S_G}=\dfrac{15\pi}{35\pi}=\dfrac{3}{7}\approx 0{,}43$.

ЗАДАЧИ

1.3.1 Наудачу называем число x, принадлежащее отрезку $[2;12]$. Найти вероятность того, что оно удовлетворяет неравенству $x\ge 8$. (Ответ: 0,4)

1.3.2 Наудачу ставим точку на отрезок $[1;9]$. Вероятность того, что она попадёт на отрезок $[2;b]$ равна $0{,}25$. Найти b. (Ответ: 4)

1.3.3 В круге радиуса R_1 = 4 см расположен круг радиуса R_2 = 2 см. На большой круг наудачу ставим точку. Найти вероятность того, что точка попадёт в малый круг. (Ответ: 0,25)

1.3.4 Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(2;1), B(-2;-1)$, $C(2;-1)$. Ставим точку наудачу в треугольник ABC. Найти вероятность того, что точка окажется в первой четверти. (Ответ: 0,25)

1.3.5 В квадрат вписан круг. На квадрат наудачу ставим точку. Найти вероятность того, что точка попадёт в круг. (Ответ: $\pi/4\approx 0{,}79$)

1.3.6 В квадрат вписан круг, а в этот круг снова вписан квадрат. На большой квадрат наудачу ставим точку. Найти вероятность того, что точка попадёт в малый квадрат. (Ответ: 0,5)

1.3.7 В прямоугольник с вершинами в точках $O(0;0), A(0;4), B(2;4), C(2;0)$ наудачу брошена точка $Q(x;y)$. Найти вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству $y>\dfrac{x}{4}$. (Ответ: 15/16=0,9375)

1.3.8 На плоскости область G ограничена эллипсом $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{25}=1$, а область g – этим эллипсом и эллипсом $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$. В область G брошена точка. Какова вероятность того, что точка попадет в область g? (Ответ: 0,4)

1.3.9 В область G, ограниченной эллипсоидом $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{9}=1$, наудачу брошена точка. Какова вероятность того, что координаты x, y, z этой точки будут удовлетворять неравенству $x^2+y^2+z^2\le 4$? Замечание: объем эллипсоида вычисляют по формуле $V=\frac{4}{3}\pi abc$, где числа a,b,c называют полуосями эллипсоида. (Ответ: 0,13)

1.3.10 Точка брошена в область G, ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. Какова вероятность того, что она попадет в область g, ограниченную этим эллипсом и линиями $y\le\frac{1}{2}x, y\ge 0$? (Ответ: 1/8)

1.3.11 На отрезке $[0;3]$ выбраны два числа x и y. Найти вероятность того, что эти числа удовлетворяют неравенствам $x^2/9\le y\le x$. (Ответ: 7/18)

1.3.12 Два автомобиля должны подъехать к одному и тому же таможенному пункту. Время прибытия автомобилей независимо и равновозможно в течение суток. Определить вероятность того, что одному из автомобилей придется ожидать освобождение терминала, если время прохождения контроля первым автомобилем равно одному часу, а второго – полтора часа. (Ответ: 0,1)

1.3.13 Два школьника договорились о встрече между 9 и 10 часами утра. Пришедший первым ждет второго в течение 15 минут, после чего уходит (если не встретились). Найти вероятность встречи, если каждый наудачу выбирает момент своего прихода в течение указанного часа. (Ответ: 0,44)

1.3.14 В шар вписан правильный тетраэдр. Найти вероятность того, что случайно брошенная в шар точка окажется внутри тетраэдра. (Ответ: 0,1225)

1.3.15 Задумайте любые два положительных числа, каждое из которых не больше трех. Какова вероятность того, что их сумма не превзойдет трех, а произведение будет не больше двух? (Ответ: 0,487)

1.3.16 В прямоугольник с вершинами $A(-2;-1), B(-2;4), C(1;4), D(1;-1)$ наудачу брошена точка. Какова вероятность, что ее координаты будут удовлетворять неравенствам $x^2\le y\le 2-x$? (Ответ: 0,3)

1.3.17 Коэффициенты p и q для уравнения $x^2+px+q=0$ выбираются наудачу из отрезка $[0;1]$. Какова вероятность того, что корни уравнения будут действительными? Замечание: корни уравнения действительны, если дискриминант $D\ge 0$, т. е. $p^2-4q\ge 0$ или $q\le p^2/4$. (Ответ: 0,083)

1.3.18 На площадку, покрытую квадратной кафельной плиткой со стороной 4 см, бросают монету радиусом 1 см. Найти вероятность того, что монета попадет целиком внутрь одного квадрата. Замечание: пусть $(x;y)$ – координаты центра монеты. Монета окажется внутри квадрата, если: $1\le x\le 3$; $1\le y\le 3$. (Ответ: 0,25)

1.3.19 Минное заграждение состоит из мин, расположенных в одну линию на расстоянии 50 м одна от другой. Ширина корабля 20 м. Какова вероятность того, что корабль пройдет через заграждение? (Ответ: 0,6)

1.3.20 Наудачу взяты два положительных числа x и y, причем $x \le 5, y \le 3$. Найти вероятность того, что $x + y \le 5$ и $y - x \le 0$. (Ответ: 1/3)

1.3.21 Поезда метро идут в данном направлении с интервалом 3 мин. Найти вероятность того, что пассажиру придется ждать поезда не более 30 с. (Ответ: 1/6)

1.3.22 В прямоугольник вписаны две окружности равного радиуса, касающиеся друг друга внешним образом. Найти вероятность того, что точка, случайным образом брошенная в прямоугольник, не попадет ни в один из кругов. (Ответ: 0,2146)

1.4 Операции над событиями. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условные вероятности

Пусть Ω – пространство элементарных событий для данного опыта и A, B – два события, рассматриваемые в данном опыте.

Суммой $A + B$ или ***объединением*** $A \bigcup B$ ***двух событий*** называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них (т. е. в появлении события A, или события B, или обоих этих событий).

Произведением $A \cdot B$ или ***пересечением*** $A \bigcap B$ ***двух событий*** называется событие, состоящее в одновременном их появлении.

Аналогично обозначается и определяется сумма и произведение n событий.

Разностью $A - B$ $(A \setminus B)$ ***двух событий*** называется событие, состоящее в том, что событие A происходит, а событие B не происходит.

Событие $\Omega \setminus A$ называют ***противоположным событию*** A и обозначают $\overline{A}$ (читают «не A»).

Говорят, что ***событие*** A ***влечет событие*** B или что B следует из A, обозначается $A \subseteq B$, если из наступления события A следует наступление события B.

Очевидно, что любое событие A влечет достоверное и следует из невозможного: $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$.

События A и B называются ***равносильными*** или ***равными***, обозначаются $A = B$, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

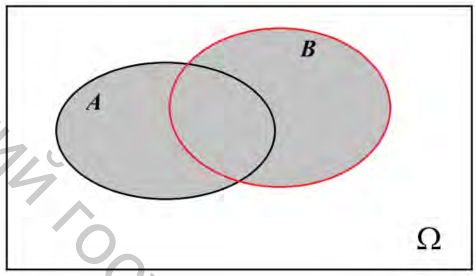
Два события A и B называются ***несовместными***, если они не могут произойти одновременно, т. е. $A \cdot B = \emptyset$.

Множество событий $A_1, A_2, ..., A_n$, $A_i \subseteq \Omega, i = \overline{1, n}$ образуют ***полную группу***, если

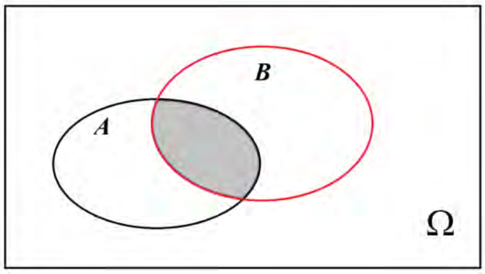
- они являются попарно несовместными: $A_i \cdot A_j = \emptyset$ при $i \ne j$;
- в сумме дают достоверное событие: $A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega$.

Из этого определения следует, что в результате одного опыта обязательно произойдет одно и только одно из событий, образующих полную группу. В частности, события A и $\overline{A}$ всегда образуют полную группу.

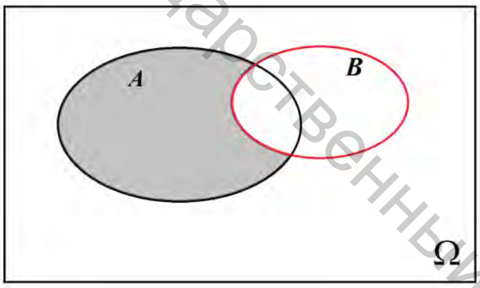
События и действия над ними можно наглядно проиллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера-Венна: достоверное событие Ω изображается прямоугольником; элементарные случайные события – точками прямоугольника; случайное событие – областью внутри прямоугольника (рис. 4).



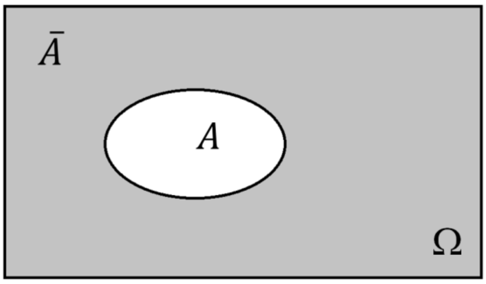
$A+B$



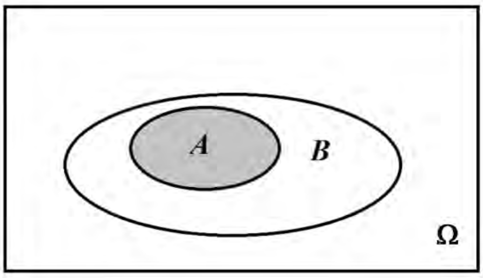
$A \cdot B$



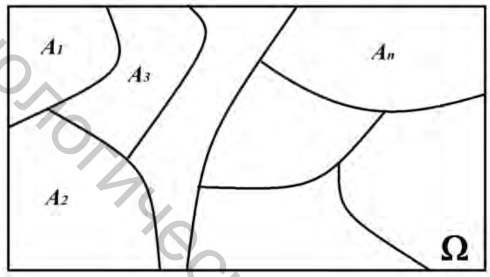
$A-B$



$\overline{A} = \Omega \setminus A$



$A \subset B \subset \Omega$



$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$

Рисунок 4

Свойства операций над событиями

1) $A+B=B+A, A\cdot B=B\cdot A$ – коммутативность;
2) $(A+B)+C=A+(B+C), (A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$ – ассоциативность;
3) $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$ – дистрибутивность;
4) $A+\Omega=\Omega, A\cdot\Omega=A$;
5) $A+\emptyset=A, A\cdot\emptyset=\emptyset$;
6) $A+A=A, A\cdot A=A$;
7) $A+\overline{A}=\Omega, A\cdot\overline{A}=\emptyset$;

8) $\overline{\Omega} = \emptyset, \overline{\emptyset} = \Omega$;

9) $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}, \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ – свойства двойственности или законы Де Моргана;

10) $A \subseteq B \Rightarrow A + B = B, A \cdot B = A$;

11) $A \cdot B \subseteq A \subseteq A + B$;

12) $A - B = A \cdot \overline{B}$.

В справедливости данных свойств можно убедиться с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

Теорема 1 (сложения вероятностей несовместных событий). Если события $A_1, A_2, ..., A_n$, $A_i \subseteq \Omega, i = \overline{1, n}$, несовместны, то

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n). \qquad (1.4.1)$$

Следствие. Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу, то

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1. \qquad (1.4.2)$$

В частности, согласно формуле (1.4.2)

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \qquad (1.4.3)$$

или

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \qquad (1.4.4)$$

Поскольку согласно свойству 9) операций над событиями, события $B = A_1 + A_2 + ... + A_n$ и $\overline{B} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot ... \cdot \overline{A_n}$ являются противоположными, то по формуле (1.4.4):

$$P(A_1 + A_2 + ... + A) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot ... \cdot \overline{A_n}). \qquad (1.4.5)$$

Заметим, что формула (1.4.5) верна в случае, если события $A_1, A_2, ..., A_n$ как совместны, так и несовместны.

Теорема 2 (сложения вероятностей двух совместных событий). Если события *A* и *B* совместны, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \qquad (1.4.6)$$

Условной вероятностью $P(A \mid B)$ называется вероятность наступления события *A* при условии наступления события *B*.

Событие *A* называют ***независимым*** от события *B*, если появление события *B* не изменяет вероятности события *A*, т. е. если условная вероятность события *A* равна его безусловной вероятности: $P(A \mid B) = P(A)$.

Заметим, что если событие *A* не зависит от события *B*, то и событие *B* не зависит от события *A*; это означает, что свойство независимости взаимно.

Таким образом, два события называются ***независимыми***, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого. В противном случае события называют ***зависимыми***.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются ***попарно независимыми***, если независимы любые два из них.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются ***независимыми в совокупности*** или просто ***независимыми***, если каждое из них и любая комбинация остальных являются независимыми событиями.

Из независимости в совокупности следует попарная независимость; обратное, вообще говоря, не верно.

Теорема 3 (умножения вероятностей). Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ зависимы, то

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = \\ P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cdot A_2) \cdot ... \cdot P(A_n \mid A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_{n-1}). \quad (1.4.7)$$

Следствие. Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ независимы, то формула (1.4.7) примет вид

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n). \quad (1.4.8)$$

Пример 1. Стрелок производит два выстрела по мишени. Событие $A_i (i = 1,2)$ – «попадание в мишень при i-м выстреле». Выразить через A_1, A_2 следующие события: A – «хотя бы одно попадание»; B – «два попадания»; C – «два промаха»; D – «хотя бы один промах».

Решение. Поскольку $A_1 + A_2$ это событие, состоящее в попадании при первом выстреле, или при втором, или в обоих выстрелах, то $A = A_1 + A_2$. Два попадания будут тогда, когда попадание наступит при каждом выстреле, то есть события A_1, A_2 осуществляются вместе, значит $B = A_1 \cdot A_2$. Два промаха будут в случае промаха при каждом выстреле: $C = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$. Событие D состоит в промахе при первом выстреле, или при втором, или в обоих выстрелах, поэтому $D = \overline{A_1} + \overline{A_2}$.

Пример 2. В трех урнах находятся белые и черные шары: в первой урне 5 белых и 20 черных, во второй 2 белых и 3 черных, в третьей 7 белых и 3 черных. Из каждой урны извлекают наудачу по одному шару. Найти вероятности следующих событий: а) извлечено не менее двух белых шаров (событие A); б) извлечен хотя бы один белый шар (событие B).

Решение. Обозначим через A_i событие, состоящее в том, что из i-й урны извлечен белый шар (i=1,2,3). Используя формулу классического определения вероятности, находим $P(A_1) = 5/20 = 0{,}25$, $P(A_2) = 2/5 = 0{,}4$, $P(A_3) = 7/10 = 0{,}7$. Тогда, согласно формуле (1.4.4), $P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 0{,}75$, $P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_2) = 0{,}6$, $P(\overline{A_3}) = 1 - P(A_3) = 0{,}3$.

а) Событие A, означающее извлечение не менее двух белых шаров, с использованием введенных операций над событиями, можно представить в виде:

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3,$$

причем все слагаемые из правой части этого равенства представляют собой попарно несовместные события. Далее, очевидно, извлечение шара из какой-либо урны не влияет на вероятность появления белого шара при извлечении шаров из других урн. Поэтому события, входящие в каждое из четырех фигурирующих в последнем равенстве произведений, независимы. Суммируя все сказанное, получаем равенство:

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = \text{[формула 1.4.1]} =$$
$$= P(A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}) + P(A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3) + P(\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3) + P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = \text{[формула 1.4.8]} =$$
$$= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) + P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) +$$
$$+ P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}25 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}25 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 + 0{,}75 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 + 0{,}25 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 =$$
$$= 0{,}415.$$

б) Событие B, означающее извлечение хотя бы одного белого шара, можно представить так: $B = A_1 + A_2 + A_3$, причем слагаемые в правой части представляют собой совместные события. Поэтому для нахождения вероятности события B воспользуемся формулой (1.4.5):

$$P(B) = P(A_1 + A_2 + A_3) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) =$$
$$= 1 - 0{,}75 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}865.$$

Пример 3. В урне 5 белых и 6 черных шаров. Из урны наудачу по одному извлекают шары до появления черного шара. Найти вероятность того, что произведено ровно три извлечения, если: а) после каждого извлечения шар возвращается обратно в урну; б) извлеченные шары откладываются в сторону.

Решение. Обозначим через A_i событие, состоящее в появлении черного шара при i-м извлечении. Тогда событие, о котором речь идет в пункте а), запишется так: $A = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$, причем все события из правой части независимы (шар после каждого извлечения возвращается в урну, значит состав и соотношение шаров не меняется). Поэтому, согласно формуле (1.4.8), имеем:

$$P(A) = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) = \frac{5}{11} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{6}{11} = \frac{150}{1331} \approx 0{,}1127.$$

В случае б) по-прежнему $A = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$, но события в правой части зависимы и поэтому воспользуемся формулой (1.4.7):

$$P(A) = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2} \mid \overline{A_1}) \cdot P(A_3 \mid \overline{A_1} \cdot \overline{A_2}) =$$
$$= \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{4}{33} \approx 0{,}1212.$$

ЗАДАЧИ

1.4.1 Упростить выражения: а) $(A + B)(B + C)$; б) $(A + B)(\overline{A} + B)$; в) $(A + B)(B + C)(C + A)$. (Ответ: а) $B + AC$; б) B; в) $AB + BC + AC$)

1.4.2 Два гроссмейстера играют в шахматы против ЭВМ. Первый гроссмейстер выигрывает у машины с вероятностью 0,4, а второй – с вероятностью 0,8. Каждый сыграл две партии. Найти вероятность того, что общее число партий, выигранных гроссмейстерами, равно трем. (Ответ: 0,3584)

1.4.3 События A, B и C образуют полную группу. Вероятности событий таковы: $P(A) = 0{,}3$; $P(C) = 0{,}2$. Найти вероятность события B. (Ответ: 0,5)

1.4.4 В коробке имеется 15 деталей, среди которых 5 нестандартных. Найти вероятность того, что среди отобранных 7 деталей окажется не более одной нестандартной детали. (Ответ: 0,18)

1.4.5 Имеются три партии деталей: в первой партии бракованные детали составляют 5 % от общего числа, во второй 3 % и в третьей 4 %. Из каждой партии берут для контроля по одной детали. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей будут: а) ровно одна бракованная; б) ни одной бракованной; в) хотя бы одна бракованная. (Ответ: а) 0,1108; б) 0,8846; в 0,1154)

1.4.6 Экзаменационный билет состоит из трех вопросов, на каждый из которых имеются четыре ответа, но лишь один из них верный. Экзамен считается сданным, если указаны верные ответы не менее чем на два вопроса. Какова вероятность сдать экзамен в случае, если выбирать ответы на вопросы наудачу? (Ответ: 0,1563)

1.4.7 Имеется связка из десяти ключей, тремя из которых можно открыть замок. Берем наудачу один из ключей и пытаемся с его помощью открыть замок. Найти вероятность того, что замок откроется ровно с четвертой попытки, если после каждой неудачной попытки соответствующий ключ: а) откладывается в сторону; б) возвращается в связку. (Ответ: а) 0,125; б) 0,1029)

1.4.8 Из колоды, содержащей 36 карт, наудачу по одной извлекают три карты. Найти вероятность того, что будет извлечена хотя бы одна карта бубновой масти, при условии, что извлеченные карты откладывают в сторону. (Ответ: 0,5903)

1.4.9 На сборку поступают однотипные детали с трех станков, причем производительность второго и третьего станков больше в 1,5 раза и в 2,5 раза соответственно, чем первого. Найти вероятность того, что из трех наудачу взятых деталей окажутся: а) все с разных станков; б) ни одной с третьего станка; в) две с третьего станка. (Ответ: а) 0,03; б) 0, 875; в) 0,125)

1.4.10 Найти вероятность совместного появления цифры при подбрасывании трех монет. (Ответ: 1/8)

1.4.11 В ящике 5 шаров: 3 белых и 2 чёрных. Наудачу извлекаем 2 шара. Найти вероятность того, что один из них окажется белым, а другой – чёрным. (Ответ: 0,6)

1.4.12 В первом ящике находятся 2 белых шара и 5 синих, во втором – 4 белых и 2 синих. Из каждого ящика извлекаем по одному шару. Найти вероятность того, что оба выбранных шара будут синие. (Ответ: 5/21)

1.4.13 В первом ящике находятся 2 красных, 4 зеленых и 5 синих шаров, во втором – 3 красных, 5 зеленых и 2 синих. Из каждого ящика извлекают по одному шару. Найти вероятность того, что цвета вынутых шаров одинаковы. (Ответ: 18/55)

1.4.14 В каждом из 3 ящиков содержится по 15 деталей. В первом ящике – 10, во втором – 7 и в третьем – 11 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными. (Ответ: 0,23)

1.4.15 Рабочий обслуживает пять станков с программным управлением. Вероятность того, что на любом станке в течение часа возникнут неполадки, равна $0{,}55$. Найти вероятность того, что в течение часа потребуют внимания рабочего: а) все пять станков, б) ни один из станков, в) хотя бы один станок. Следует полагать, что неполадки на станках независимы. (Ответ: а) 0,0503; б) 0,0185; в) 0,9815)

1.4.16 В первом ящике находится 5 шаров: 3 белых и 2 чёрных, а во втором 4 шара: 1 белый и 3 чёрных. Из каждого ящика наудачу извлекаем по одному шару. Найти вероятности событий: а) оба шара белые; б) хотя бы один из них чёрный; в) оба шара одного цвета. (Ответ: а) $0{,}15$; б) $0{,}85$; в) $0{,}45$)

1.4.17 Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным или 2 (событие A), или 7 (событие B), или тому и другому одновременно. (Ответ: $P(A+B)=51/90$)

1.4.18 Два стрелка делают по два выстрела (каждый по своей мишени). За один выстрел первый стрелок поражает мишень с вероятностью 0,8, а второй – с вероятностью 0,6. Какова вероятность того, что оба стрелка поразят мишень ровно по одному разу? (Ответ: 0,8)

1.4.19 Три спортсмена стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого спортсмена равна 0,7, а для второго – 0,8 и для третьего – 0,9. Спортсмены независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Найти вероятность следующих событий: а) в мишень попадет один спортсмен; б) в мишень попадет хотя бы один спортсмен. (Ответ: а) 0,092; б) 0,994)

1.4.20 На лабораторной работе по физике два студента производят измерение некоторой физической величины. Вероятность того, что они допустят ошибку при считывании показаний прибора, равна 0,1 и 0,2 соответственно. Найти вероятность того, что при однократном измерении хотя бы один студент допустит ошибку. (Ответ: 0,28)

1.4.21 Вероятность того, что событие появится хотя бы один раз в четырех независимых испытаниях, равна 0,974. Предполагая, что во всех испытаниях вероятность появления события одна и та же, найти вероятность появления события в одном испытании. (Ответ: 0,6)

1.4.22 Абитуриент сдает три экзамена. Вероятность сдать экзамен по русскому языку равна 0,9, по математике и физике вероятности соответственно равны 0,7 и 0,4. Найти вероятности следующих событий: а) абитуриент сдаст все три экзамена; б) абитуриент не сдаст ни один экзамен; в) абитуриент сдаст только экзамен по русскому языку; г) абитуриент сдаст только один экзамен; д) абитуриент сдаст хотя бы один экзамен. (Ответ: а) 0,252; б) 0,018; в) 0,162; г) 0,216; д) 0,982)

1.4.23 В ящике находится 10 синих и 8 белых шаров. Из ящика последовательно без возвращения извлекается три шара. Найти вероятность того, что все три шара синие. (Ответ: 0,15)

1.4.24 В ящике находится 12 деталей первого сорта, 5 деталей второго сорта и 3 бракованных детали. Поочередно из ящика берут три детали. Найти вероятность того, что при первом извлечении появится деталь первого сорта (событие A), при втором – второго (событие B), при третьем – бракованная деталь (событие C). (Ответ: 0,26)

1.4.25 Студент знает ответы на 15 вопросов из 50. Преподаватель задает вопросы последовательно один за другим. Найти вероятность того, что три подряд заданных вопроса – счастливые. (Ответ: 0,02)

1.4.26 Шестигранный игральный кубик подбрасывается 4 раза. Какова вероятность того, что цифра 5 выпадет: а) три раза; б) не менее трех раз? (Ответ: а) 0,0154; б) 0,0162)

1.4.27 Из колоды, содержащей 36 карт, наудачу по одной без возвращения извлекают карты до появления короля. Найти вероятность того, что будут извлечены ровно четыре карты. (Ответ: 0,0842)

1.4.28 В урне 3 белых и 7 черных шаров. Из урны наудачу последовательно извлекают 2 шара. Найти вероятность того, что будут извлечены шары разного цвета, если первый извлеченный шар: а) возвращен в урну; б) отложен в сторону. (Ответ: а) 0,42; б) 0,4667)

1.4.29 Студент одинаково плохо подготовился к каждому из трёх экзаменов. С какой вероятностью он сдаёт каждый экзамен, если хотя бы один из них он сдаст с вероятностью 0,385875? (Ответ: 0,15)

1.4.30 Участок электрической цепи AB состоит из элементов, указанных на схеме (рис. 5). Электрическая схема выходит из строя, если цепь разомкнута. Элементы Z в течение месяца независимо друг от друга выходят из строя с вероятностями:

а) $p_1 = 0{,}3;\ p_2 = 0{,}7$ (рис. 5 а); б) $p_1 = 0{,}1;\ p_2 = 0{,}05;\ p_3 = 0{,}05$ (рис. 5 б);

в) $p_1 = 0{,}2;\ p_2 = 0{,}3$ (рис. 5 в); г) $p_1 = 0{,}2;\ p_2 = 0{,}5;\ p_3 = 0{,}08$ (рис. 5 г).

Определить вероятность безотказной работы схемы (событие A) в течение месяца. (Ответ: а) 0,21; б) 0,99; в) 0,94; г) 0,77)

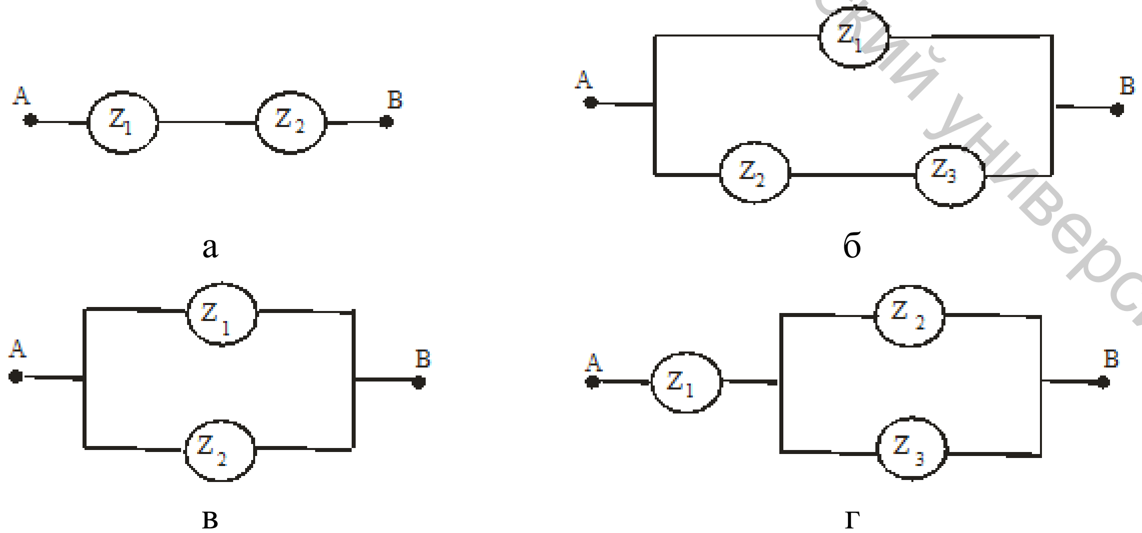


Рисунок 5

1.5 Формула полной вероятности и формула Байеса

Пусть с данным опытом связана полная группа событий $H_1, H_2, ..., H_n$, вероятности которых $P(H_i), i = \overline{1,n}$ известны. Событие A может наступить при условии появления одного из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, причем известны условные вероятности $P(A \mid H_i), i = \overline{1,n}$ наступления события A при каждом H_i.

Тогда вероятность события A определяется ***формулой полной вероятности***:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A \mid H_i), \tag{1.5.1}$$

в которой события H_i называют гипотезами, а вероятности $P(H_i)$ – априорными вероятностями гипотез (они определяются *a priori* – до проведения опыта).

Предположим, что эксперимент уже проведен и известно, что событие A произошло. Вероятность осуществления при этом гипотезы H_k вычисляют по ***формуле Байеса***:

$$P(H_k \mid A) = \frac{P(H_k) P(A \mid H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A \mid H_i)}. \tag{1.5.2}$$

В формуле (1.5.2) условные вероятности $P(H_k \mid A)$ называют апостериорными вероятностями гипотез (они вычисляются *a posteriori* – после проведения опыта, когда стало известно, что событие A произошло).

Следует заметить, что поскольку события $H_1, H_2, ..., H_n$ образуют полную группу, то $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$.

Пример 1. В группе из десяти студентов два отличника, четыре хорошиста, три троечника и один двоечник. Отличник решает правильно в среднем 90 % предложенных задач, хорошист – 70 %, троечник – 40 % и двоечник – 20 %. Найти вероятность того, что наудачу выбранный студент решит задачу.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что выбранный студент решит задачу. Очевидно, на величину вероятности этого события будет существенно влиять одна из произошедших при этом гипотез: H_1 – выбран отличник, H_2 – выбран хорошист, H_3 – выбран троечник, H_4 – выбран двоечник.

Из условия находим вероятности гипотез и условные вероятности события A при данных гипотезах:

$$P(H_1) = 0{,}2, P(H_2) = 0{,}4, P(H_1) = 0{,}3, P(H_4) = 0{,}1;$$

$$P(A \mid H_1) = 0{,}9, P(A \mid H_2) = 0{,}7, P(A \mid H_3) = 0{,}4, P(A \mid H_4) = 0{,}2.$$

По формуле полной вероятности (1.5.1) находим вероятность события A:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{4} P(H_i)P(A \mid H_i) = 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}6.$$

Пример 2. Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность получения нестандартной детали на первом автомате равна 0,09, а на втором – 0,07. Производительность второго автомата вдвое больше, чем первого. Наугад взятая с конвейера деталь оказалась нестандартной. Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена на первом станке.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что взятая с конвейера деталь оказалась нестандартной. Введем в рассмотрение гипотезы: H_1 – деталь изготовлена первым автоматом, H_2 – деталь изготовлена вторым автоматом.

Поскольку производительность второго автомата вдвое больше первого, то за определенный промежуток времени первый автомат изготавливает x деталей, а второй – $2x$ деталей. Тогда вероятности введенных гипотез будут:

$$P(H_1) = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3},\ \ P(H_2) = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3};$$

а, согласно условию задачи, условные вероятности события A при данных гипотезах:

$$P(A \mid H_1) = 0{,}09,\ \ P(A \mid H_2) = 0{,}07.$$

По формуле Байеса находим апостериорную вероятность гипотезы H_1, вычисленную при условии, что произошло событие A:

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1)P(A \mid H_1)}{P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2)} = \frac{1/3 \cdot 0{,}09}{1/3 \cdot 0{,}09 + 2/3 \cdot 0{,}07} \approx 0{,}3913.$$

Пример 3. В первой урне находятся два белых шара и один черный, во второй – три белых и два черных, в третьей – один белый и два черных. Из первой урны извлекают шар и, не глядя, откладывают в сторону; затем извлекают еще один шар из наудачу выбранной урны. Какова вероятность того, что второй извлеченный шар – белый?

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что второй извлеченный шар оказался белым; через H_i обозначим гипотезу, состоящую в том, что этот шар был извлечен из i-й урны $(i = 1,2,3)$. Поскольку урну (одну из трех) выбирают наудачу, то вероятности введенных гипотез таковы:

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_1) = 1/3.$$

Используя условие задачи, находим условные вероятности:

$$P(A \mid H_2) = 3/5,\ \ P(A \mid H_3) = 1/3.$$

Для вычисления $P(A \mid H_1)$ применим формулу полной вероятности. Через B_1 обозначим гипотезу, состоящую в том, что первый извлеченный шар оказался белым, а B_2 – черным; тогда, очевидно, что

$$P(B_1) = 2/3, \;\; P(B_2) = 1/3, \;\; P(A \mid B_1) = 1/2, \;\; P(A \mid B_2) = 1.$$

Согласно формуле (1.5.1), имеем:

$$P(A \mid H_1) = P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2) = 2/3 \cdot 1/2 + 1/3 \cdot 1 = 2/3.$$

Теперь можно найти вероятность события A:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(A \mid H_i) = 1/3 \cdot 2/3 + 1/3 \cdot 3/5 + 1/3 \cdot 1/3 = 8/15 \approx 0{,}5333.$$

ЗАДАЧИ

1.5.1 На столе лежат три колоды карт по 36 штук в каждой. Из первой колоды берут даму треф и короля треф, из второй – даму пик, из третьей – даму треф и даму пик. Все взятые карты откладывают в сторону. После этого из наудачу выбранной колоды берут первую попавшуюся карту. Найти вероятность того, что эта карта окажется трефовой масти. (Ответ:0,2328)

1.5.2 В четырех ящиках лежит по 12 шаров, отличающихся только цветом. В двух ящиках – по 5 зеленых и 7 белых шаров. В одном ящике – 3 зеленых и 9 белых. И в последнем – 8 зеленых и 4 белых. Из наудачу выбранного ящика взят один шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар оказался: а) белым; б) зеленым? (Ответ: а) 0,5625; б) 0,438)

1.5.3 В урну, содержащую три шара, опущен черный шар. Затем наудачу извлекают один шар. Все возможные предположения о первоначальном составе шаров по цвету равновозможны. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется черным. (Ответ: 0,63)

1.5.4 Три станка штампуют детали. Первый станок производит 25 %, второй – 30 % и третий – 45 % всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 2 %, 2,5 %, 4 %. Найти вероятность того, что случайно взятая деталь окажется бракованной. (Ответ: 0,0305)

1.5.5 Квалифицированный рабочий обслуживает четыре станка, производящие одинаковые детали. Производительность первого станка в два раза больше, чем второго, а третьего и четвертого в три раза меньше, чем второго. Детали складываются в один контейнер. Вероятность брака для первого станка равна 0,01, для второго – 0,02, для третьего – 0,03, для четвертого – 0,035. Какова вероятность того, что наудачу взятая деталь будет бракованной? (Ответ: 0,0168)

1.5.6 В одной группе 10 студентов, из которых 2 отличника, во второй – 12 студентов, из которых 3 отличника. Из наудачу выбранной группы наудачу выбран студент. Найти вероятность того, что он отличник. (Ответ: 0,225)

1.5.7 Экономист считает, что вероятность роста стоимости акций компании в следующем году составит 0,81, если экономика страны будет на подъеме, и 0,42, если экономика не будет успешно развиваться. По мнению экспертов, вероятность экономического подъема равна 0,55. Оценить вероятность того, что акции компании поднимутся в следующем году. (Ответ: 0,6345)

1.5.8 В магазине имеются телевизоры, изготовленные на трех заводах, в отношении $8:2:5$. Продукция первого завода содержит 3 % телевизоров со скрытым дефектом, второго – 8 % и третьего – 2 %. Найти вероятность приобретения исправного телевизора. (Ответ:0,9667)

1.5.9 Инвестор вложил капитал в ценные бумаги двух финансовых фирм. При этом он надеется получить доход в течение года от первой фирмы с вероятностью $0,9$, а от второй – с вероятностью 1. Вероятность банкротства первой и второй фирмы независимо друг от друга соответственно равна 0,1 и 0,02. В случае банкротства инвестор получает вложенный капитал. Какова вероятность того, что инвестор получит прибыль? (Ответ: $0,9962$)

Указание. Введите обозначения: событие A – «получение инвестором прибыли», C_1 – «банкротство первой фирмы», C_2 – «банкротство второй фирмы». По условию задачи $P(C_1)=0,1$ и $P(C_2)=0,02$. Тогда возможны четыре гипотезы: $B_1=C_1\overline{C}_2$, $B_2=\overline{C}_1C_2$, $B_3=C_1C_2$, $B_4=\overline{C}_1\overline{C}_2$. Так как возможности банкротства фирм независимы друг от друга, то $P(B_1)=P(C_1)P(\overline{C}_2)$. Аналогичные выражения можно записать для $P(B_2),P(B_3),P(B_4)$. Учитывая, что $P_{B_1}(A)=1$, $P_{B_2}(A)=0,9$, $P_{B_3}(A)=0$, $P_{B_4}(A)=1$.

1.5.10 В первой группе обучается 20 студентов, из которых 8 отличников, во второй группе – 24 студента, из которых 3 отличника, в третьей группе – 16 студентов, из которых 4 отличника. Из наудачу выбранной группы для сдачи экзамена приглашается наугад один студент, который оказался отличником. Найти вероятность того, что этот студент из второй группы. Из какой группы наиболее вероятно выбрать этого студента? (Ответ: 0,16; из первой группы)

1.5.11 Оператор радиолокационной станции фиксирует самолет противника с вероятностью 0,8 и принимает помеху за самолет с вероятностью 0,1. Практика показала, что в 15 % случаев на экран оператора попадает помеха. Оператор принял решение о наличии в воздушном пространстве самолета противника. Определить вероятность того, что сигнал получен действительно от самолета. (Ответ: 0,9784)

1.5.12 В цехе работают 4 мастера и 8 учеников. При изготовлении изделия мастер допускает брак с вероятностью $0,04$; ученик – с вероятностью $0,15$. Поступившее из цеха изделие оказалось бракованным. Какова вероятность того, что его изготовил: а) мастер; б) ученик? (Ответ: а) 0,12; б) 0,88)

1.5.13 В магазин электрические лампочки поставляются двумя заводами в соотношении $7:8$. Среди продукции первого завода стандартные лампочки составляют 95 %, а второго – 90 %. Взятая наугад лампочка оказалась стандартной. Найти вероятность того, что она изготовлена первым заводом. (Ответ: 0,48)

1.5.14 Вероятности попадания в мишень первым, вторым и третьим стрелками равны соответственно 0,7, 0,8 и 0,9. Наугад выбранный стрелок выстрелил в мишень. Мишень поражена. Найти вероятность того, что стрелял третий стрелок. (Ответ: 0,38)

1.5.15 Две из трех независимо работающих микросхемы прибора отказали. Найти вероятность того, что отказали первая и третья микросхемы, если вероятность отказа первой, второй и третьей микросхемы соответственно равны: 0,01, 0,02 и 0,015. (Ответ: 0,23)

Указание. Введите обозначения: событие A – «отказали две микросхемы», гипотеза H_1 – «отказала первая и вторая микросхемы, а третья работает исправно»; гипотеза H_2 – «отказала первая и третья микросхемы, а вторая работает исправно»; гипотеза H_3 – «отказала вторая и третья микросхемы, а первая работает исправно»; гипотеза H_4 – «отказала только одна микросхема», гипотеза H_5 – «отказали все три микросхемы», гипотеза H_6 – «ни одна из микросхем не отказала». Вероятности гипотез H_1, H_2, H_3 можно найти следующим образом: $P(H_1) = p_1 p_2 q_3$, $P(H_2) = p_1 p_3 q_2$, $P(H_3) = q_1 p_2 p_3$. При гипотезах H_4, H_5, H_6 событие A невозможно и, следовательно, условные вероятности $P(A \mid H_4), P(A \mid H_5), P(A \mid H_6)$ равны нулю. Поскольку при гипотезах H_1, H_2, H_3 событие A достоверно, то соответствующие условные вероятности равны единице.

1.5.16 Три стрелка производят по одному выстрелу по одной и той же мишени. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,7, для третьего – 0,6. В результате произведенных выстрелов в мишени оказалось две пробоины. Найти вероятность того, что в мишень попали второй и третий стрелки.

1.5.17 В каждом из трех ящиков по 9 шаров. Число белых шаров в первом, втором и третьем ящиках соответственно равно 9, 6 и 3. Из наудачу выбранного ящика наудачу извлечен шар, оказавшийся белым. Шар возвращают в ящик и второй раз из того же ящика извлекают шар, который также оказывается белым. Найти вероятность того, что шары были извлечены из первого ящика. (Ответ: 0,643)

1.5.18 Среди восьми винтовок пристреленными оказываются только две. Вероятность попадания из пристреленной винтовки равна 0,9, а из непристреленной – 0,2. Выстрелом из одной наугад взятой винтовки цель поражена. Определить вероятность того, что взята пристреленная винтовка. (Ответ: 0,6)

1.5.19 Компьютерной диагностике подвергается группа участников диспансеризации, среди которых 10 % страдают некоторыми заболеваниями. В результате диагностики болезнь выявляется с вероятностью 0,95, и с вероятностью, равной 0,03, здоровый участник признаётся больным. У произвольно выбранного протестированного участника компьютер выявил заболевание. Какова вероятность, что произошла ошибка? (Ответ: 0,2213)

1.5.20 Заявки работодателей на специалистов инженерных, экономических и юридических направлений поступают на биржу в отношении 6:3:1. Вероятность того, что претендент на вакансию инженера удовлетворит требованиям работодателя равна 0,8, на вакансию экономиста – 0,7, на вакансию юриста – 0,4. Найти вероятность того, что: а) случайно выбранный на бирже претендент устроится на работу по своей специальности; б) устроившийся на работу специалист – экономист. (Ответ: а) 0,73; б) 0,2877)

1.5.21 На строительство объекта поставляются блоки, изготовленные двумя заводами. Производительность второго завода выше производительности первого на 20 %. Вероятность того, что блок, изготовленный на первом заводе высокого качества, равна 0,9; для второго завода эта вероятность равна 0,85. Найти вероятности следующих событий: а) наудачу взятый блок оказался высокого качества; б) блок изготовлен на первом заводе, если он не оказался высокого качества. (Ответ: а) 0,8727; б) 0,3571)

1.5.22 На столе лежат пять одинаковых с виду шестигранных игральных кубика. Четыре из них обычные, а один изготовлен мошенником: цифра «6» на нем выпадает с вероятностью 0,5, а каждая из остальных цифр – с вероятностью 0,1. Наугад взятый со стола кубик бросают, и на нем выпадает цифра «6». Какова вероятность того, что этот кубик изготовлен мошенником? (Ответ: 0,4286)

1.5.23 На экзамене преподаватель разложил билеты в два ряда по 10 штук в каждом. Один из студентов мог ответить правильно на 7 билетов, лежащих в первом ряду, и на 6 – во втором. До него экзамен сдали два человека, причем один из них брал билет из первого ряда, а второй – со второго. Студент взял первый попавшийся билет из наудачу выбранного ряда. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен. (Ответ: 0,65)

1.5.24 По каналу связи с помехами передаются двоичные символы «0» и «1». Вероятности искажения символов в канале (0→1, 1→0) одинаковы и равны 0.2. Вероятность символа «0» на входе канала равна 0,9, а вероятность символа «1» – 0,1. На выходе канала принят сигнал, соответствующий 1. Определить вероятность того, что на вход канала подавалась также 1. (Ответ: 0,3077)

1.5.25 Известно, что 95 % изделий, выпускаемых данным предприятием, отвечают стандарту. Упрощенная схема проверки качества продукции признает пригодной стандартную деталь с вероятностью 0,96 и нестандартную – с вероятностью 0,08. Найти вероятность того, что: а) наудачу взятое изделие пройдет контроль; б) изделие, прошедшее контроль, окажется нестандартным. (Ответ: а) 0,916; б) 0,0038)

1.5.26 На наблюдательном пункте станции установлены четыре радиолокатора различных конструкций. Вероятность обнаружения цели с помощью первого локатора равна 0,87, второго – 0,82, третьего – 0,9, четвертого – 0,95. Наблюдатель наугад включает один из локаторов. Какова вероятность обнаружения цели? (Ответ: 0,885)

1.5.27 Изделия одного наименования изготавливаются на трех заводах. Первый завод поставляет 45 % всех изделий, поступающих на производство, второй – 30 % и третий – 25 %. Вероятность безотказной работы изделия, изготовленного на первом заводе, равна 0,8, на втором – 0,85 и на третьем – 0,9. Наудачу взятое на производстве изделие оказалось неисправным. Найти вероятность того, что это изделие изготовлено на третьем заводе. (Ответ: 0,1563)

1.6 Последовательность независимых испытаний. Формула Бернулли

Предположим, что некоторый эксперимент может повторяться при неизменных условиях сколь угодно раз, и эти повторения не зависят друг от друга. В этом случае говорят о проведении последовательности независимых испытаний.

Простейшей является последовательность из n независимых испытаний, в каждом из которых может произойти некоторое событие A (его называют *успехом*) с вероятностью $P(A)=p$ или ему противоположное $\overline{A}$ (его называют *неуспех* или *неудача*) с вероятностью $P(\overline{A})=q=1-p$, называемая ***схемой Бернулли.***

Вероятность того, что в серии из n независимых испытаний событие A наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), вычисляют по формуле Бернулли:

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{1.6.1}$$

где $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A

а) не произойдет ни разу

$$P_n(0)=q^n; \tag{1.6.2}$$

б) произойдет n раз

$$P_n(n)=p^n; \tag{1.6.3}$$

в) произойдет от k_1 до k_2 раз

$$P_n(k_1\le k\le k_2)=P_n(k_1)+P_n(k_1+1)+...+P_n(k_2); \tag{1.6.4}$$

г) произойдет менее k_2 раз

$$P_n(0\le k<k_2)=P_n(0)+P_n(1)+...+P_n(k_2-1); \tag{1.6.5}$$

д) произойдет более k_1 раз

$$P_n(k_1<k\le n)=P_n(k_1+1)+P_n(k_1+2)+...+P_n(n); \tag{1.6.6}$$

е) произойдет хотя бы один раз

$$P_n(1 \le k \le n) = 1 - P_n(0) = 1 - q^n. \quad (1.6.7)$$

Число k_0, которому при заданном n соответствует максимальная вероятность $P_n(k_0)$, называется ***наивероятнейшим числом появления*** события A. При известных n и p это число определяется из двойного неравенства:

$$np - q \le k_0 \le np + p. \quad (1.6.8)$$

Пример 1. Найти вероятность того, что при семи подбрасываниях шестигранного кубика цифра «2» выпадет: а) ровно 5 раз; б) не менее 5 раз; в) менее 5 раз; г) хотя бы один раз. Найти наивероятнейшее число выпадений цифры «2».

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в выпадении цифры «2» при однократном подбрасывании кубика. Тогда $P(A) = \frac{1}{6} = p \Rightarrow q = 1 - p = \frac{5}{6}$ и по условию задачи $n = 7$.

а) Вероятность того, что цифра «2» выпадет ровно 5 раз (формула (1.6.1)):

$$P_7(5) = C_7^5 p^5 q^2 = \frac{7!}{5! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0{,}0019.$$

б) Вероятность того, что цифра «2» выпадет не менее 5 раз, то есть 5 и более раз (формула (1.6.6)):

$$P_7(5 \le k \le 7) = P_7(5) + P_7(6) + P_7(7) = 0{,}0019 + C_7^6 p^6 q^1 + p^7 =$$

$$= 0{,}0019 + 7 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^6 \cdot \frac{5}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^7 = 0{,}0019 + 0{,}000125 + 0{,}000004 = 0{,}002029.$$

в) Вероятность того, что цифра «2» выпадет менее 5 раз:

$$P_7(k < 5) = P_7(0 \le k \le 4) = 1 - P_7(5 \le k \le 7) = 1 - 0{,}002029 = 0{,}997971.$$

г) Вероятность того, что цифра «2» выпадет хотя бы один раз (формула (1.6.7)):

$$P_n(1 \le k \le 7) = 1 - P_7(0) = 1 - q^7 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^7 = 0{,}7209.$$

Найдем наивероятнейшее число выпадений цифры «2». Воспользуемся формулой (1.6.8):

$$7 \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \le k_0 \le 7 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \;\Rightarrow\; \frac{2}{6} \le k_0 \le \frac{8}{6} \;\Rightarrow k_0 = 1.$$

Пример 2. Что более вероятно: выиграть у равносильного соперника три партии из четырех или шесть из восьми (ничьи не считаются)?

Решение. В данном случае речь идет о сравнении двух вероятностей: $P_4(3)$ и $P_8(6)$, когда $p = 0{,}5$. Найдем эти вероятности и сравним их.

$$P_4(3) = C_4^3 \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5 = 4 \cdot 0{,}125 \cdot 0{,}5 = 0{,}25,$$

$$P_8(6) = C_8^6 \cdot 0{,}5^6 \cdot 0{,}5^2 = 28 \cdot 0{,}015625 \cdot 0{,}25 = 0{,}109375.$$

Таким образом, $P_4(3) > P_8(6)$ и, значит, более вероятно выиграть три партии из четырех.

ЗАДАЧИ

1.6.1 Подбрасывается 4 одинаковых монеты. Найти вероятность того, что выпало: а) ровно 2 герба; б) более одного герба. (Ответ: а) 0,375; б) 0,688)

1.6.2 Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень одним выстрелом равна $0{,}8$. Найти вероятность того, что будет ровно два промаха. (Ответ: 0,096)

1.6.3 Имеется 10 лотерейных билетов. Вероятность выигрыша по каждому из них равна $0{,}2$. Найти вероятность того, что выигрышными среди них окажутся: а) ровно три билета; б) менее трех билетов; в) хотя бы один билет. (Ответ: а) 0,201; б)б0,6778; в) 0,8926)

1.6.4 Вероятность банкротства одной из 7 фирм к концу года равна $0{,}3$. Какова вероятность того, что к концу года обанкротится не более двух фирм? (Ответ: 0,652)

1.6.5 Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найти вероятность того, что из 19 новорожденных будет 10 мальчиков. (Ответ: 0,178)

1.6.6 Каждое из 9 предприятий отрасли выполняет месячный план с вероятностью $0{,}93$. Найти вероятность того, что в конце месяца план выполнят, по крайней мере, 7 предприятий. (Ответ: 0,98)

1.6.7 При эпидемии гриппа 40 % населения заражены вирусом. В лаборатории числится 12 сотрудников. Какова вероятность того, что носителями вируса среди них будут: а) ровно 6 человек; б) не менее одного человека? (Ответ: а) 0,1766; б) 0,9978)

1.6.8 Найти вероятность того, что при восьми подбрасываниях шестигранного игрального кубика выпадет число очков, большее четырех: а) ровно пять раз; б) не менее семи раз. (Ответ: а) 0,0683; б) 0,0026)

1.6.9 На отрезке $[0;9]$ наудачу ставим 4 точки. Найти вероятность того, что ровно 2 из них попадут на отрезок $[0;3]$. (Ответ: 8/27)

1.6.10 В квадрат $ABCD$ наудачу брошены 3 точки. Найти вероятность того, что все они попадут в треугольник ABC. (Ответ: 0,125)

1.6.11 В квадрат, длина стороны которого равна 4 см, наудачу брошены 4 точки. Найти вероятность того, что все они окажутся удаленными от сторон квадрата не менее чем на 1 см. (Ответ: 1/256)

1.6.12 На фабрике, изготовляющей болты, брак в продукции составляет 5 %. Найти вероятность того, что среди четырёх взятых наугад болтов будет хотя бы два бракованных. (Ответ: 0,014)

1.6.13 В водоёме 70 % всех рыб составляют карпы. Найти вероятность того, что из пяти выловленных рыб окажется хотя бы один карп. (Ответ: 0,998)

1.6.14 На круг с центром в начале координат наудачу ставим 5 точек. Найти вероятность того, что хотя бы 4 из них попадут в первую четверть. (Ответ: 0,016)

1.6.15 В круге радиуса 4 см находится меньший круг радиуса 2 см. В большой круг наудачу поставлены 5 точек. Найти вероятность того, что в малый круг попадёт хотя бы одна точка. (Ответ: 0,763)

1.6.16 Из колоды, содержащей 36 карт, наудачу извлекается одна карта. Затем карта возвращается в колоду, и колода тщательно перетасовывается. Опыт повторяется 10 раз. Какова вероятность того, что король при этом появится не более одного раза? (Ответ: 0,6929)

1.6.17 Стрелок поражает мишень хотя бы один раз при трёх выстрелах с вероятностью 0,992. Найти вероятность того, что при пяти выстрелах он попадёт не менее двух раз. (Ответ: 0,9933)

1.6.18 В урне 5 белых, 6 черных и 9 красных шаров. Из урны наудачу извлекают шар, фиксируют его цвет и возвращают обратно в урну. Опыт повторяют 7 раз. Какова вероятность того, что шар белого цвета появится: а) ровно 2 раза; б) по крайней мере 2 раза? (Ответ: 0,3115; б) 0,5551)

1.6.19 В лотерее 1000 билетов, среди которых 50 выигрышных. Найти вероятность того, что у человека, купившего 10 билетов, выигрышными окажутся: а) один билет; б) ни одного билета; в) хотя бы один билет. (Ответ: а) 0,3151; б) 0,5987; в) 0,4013)

1.6.20 Какова вероятность того, что в группе, состоящей из 20 студентов, никто не родился в июне? (Ответ: 0,1755)

1.6.21 Орудие произвело шесть выстрелов по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,3. Найти вероятность уничтожения цели, если для этого необходимо не менее двух попаданий. (Ответ: 0,58)

1.6.22 Известно, что 2 % изделий, изготовленных на автоматическом станке, являются бракованными. Найти вероятность того, что из восьми наудачу взятых изделий все окажутся стандартными. (Ответ: 0,8508)

1.6.23 Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,85. Найти наиболее вероятное число попаданий в мишень при 7 выстрелах и соответствующую этому числу вероятность. (Ответ: 6; 0,396)

1.6.24 Всхожесть семян составляет в среднем 60 %. Найти наивероятнейшее число всхожих среди десяти семян. (Ответ: 6)

1.6.25 Какова вероятность наступления события в каждом испытании, если наивероятнейшее число наступлений события в 100 испытаниях равно k_0=25? (Ответ: $25/101 \le p \le 26/101$)

1.6.26 Шестигранный игральный кубик подбрасывают 12 раз. Чему равно наивероятнейшее число выпадений шестерки? (Ответ: 2)

1.6.27 Вероятность изготовления изделия высшего сорта равна 0,9. Сколько должно быть деталей в партии, чтобы наивероятнейшее число изделий высшего сорта было равно 10? (Ответ: 11)

1.6.28 При установившемся технологическом процессе 80 % всей произведенной продукции оказывается продукцией высшего сорта. Какое количество изделий должно быть в партии, чтобы наивероятнейшее число изделий высшего сорта в партии составляло 250 штук.

1.6.29 Из колоды, содержащей 36 карт, наудачу извлекается одна карта. Затем карта возвращается в колоду, и колода тщательно перетасовывается. Опыт повторяют 120 раз. Найти наивероятнейшее число появлений карты трефовой масти. (Ответ: 30)

1.6.30 Товаровед исследует 50 образцов некоторого товара. Производитель этого товара указывает, что процент брака составляет 8 %. Найти наивероятнейшее число образцов, которые товаровед признает как годные. (Ответ: 46)

1.7 Предельные теоремы в схеме Бернулли

Если число испытаний n в схеме Бернулли велико, то вычисления вероятности $P_n(k)$ по формуле Бернулли весьма трудоемкие. В этом случае используют асимптотические приближения для вероятностей $P_n(k)$, основанные на предельных теоремах Пуассона и Муавра-Лапласа.

Итак, пусть выполняются условия схемы Бернулли.

Теорема Пуассона. Если n велико, а p мало (обычно $p < 0{,}1$ и $npq \le 9$), то вероятность того, что событие A наступит ровно k раз, приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, \tag{1.7.1}$$

где $\lambda = np$.

Локальная теорема Муавра-Лапласа. Если n велико, а вероятность p не слишком близка к нулю и единице (обычно $npq > 9$), то вероятность того, что событие A наступит ровно k раз, приближенно выражается формулой

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{1.7.2}$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

Таблица значений функции $\varphi(x)$ для положительных значений аргумента x дана в приложении А (табл. А.1). Для отрицательных значений аргумента пользуются теми же таблицами, так как функция $\varphi(x)$ четна, т. е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$. При значениях переменной $x > 5$ функция $\varphi(x)$ практически равна нулю.

Заметим, что для частного случая $p = 1/2$ формула была найдена в 1730 г. Муавром. В 1783 г. Лаплас обобщил формулу на случай произвольного p, отличного от 0 и 1. Поэтому теорему и называют теоремой Муавра-Лапласа.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Если в условии схемы Бернулли $npq > 9$, то вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A появится от k_1 до k_2 раз, приближенно определяется формулой

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad (1.7.3)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$ – функция Лапласа, причем она нечетная: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, и ее значения приведены в приложении А (табл. А.2). Для значений $x > 5$ полагают $\Phi(x) = 0{,}5$.

Заметим, что равенства (1.7.1) – (1.7.3) тем точнее, чем больше n.

Пусть при n независимых испытаниях событие A наступает m раз. Вероятность появления события A в одном испытании равна p и $0 < p < 1$. Тогда частота появления: $w(A) = \frac{m}{n}$. Вероятность того, что модуль отклонения частоты появления события от вероятности события p не превышает положительного числа ε, приближенно равна удвоенному значению функции Лапласа при $x = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (1.7.4)$$

Пример 1. В урне находятся 99 белых и 1 черный шар. Производится 200 извлечений шара из урны, причем после каждого извлечения шар возвращается в урну и шары перемешиваются. Какова вероятность появления не менее двух черных шаров?

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в появлении черного шара при однократном извлечении. Из условия задачи находим: $P(A) = 0{,}01 = p \Rightarrow q = 1 - p = 0{,}99$, $n = 200$.

Поскольку n велико и $npq = 200 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99 = 1{,}98 < 9$, то для нахождения указанной в условии вероятности применим формулу Пуассона при $\lambda = np = 200 \cdot 0{,}01 = 2$. Имеем:

$$P_{200}(k \ge 2) = 1 - P_{200}(k < 2) == 1 - P_{200}(0 \le k \le 1) = 1 - P_{200}(0) - P_{200}(1) \approx$$

$$\approx 1 - \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} - \frac{2^1 \cdot e^{-2}}{1!} = 1 - \frac{1}{e^2} - \frac{2}{e^2} = 1 - \frac{3}{e^2} \approx 0{,}594.$$

Пример 2. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,8. Произведено 100 выстрелов. Найти вероятность того, что цель будет поражена: а) ровно 70 раз; б) не менее 70 раз. Найти также наивероятнейшее число попаданий.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что цель будет поражена при одном выстреле. Из условия задачи: $P(A)=0{,}8=p\Rightarrow$ $q=1-p=0{,}2$, $n=100$.

Поскольку n велико и $npq=100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2=16>9$, то

а) для нахождения вероятности поражения цели ровно 70 раз применим локальную теорему Муавра-Лапласа ($npq=100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2=16,\ \ np=100\cdot 0{,}8=80$):

$$P_{100}(70)\approx\frac{1}{\sqrt{16}}\cdot\varphi\left(\frac{70-80}{\sqrt{16}}\right)=\frac{1}{4}\cdot\varphi(-2{,}5)=\frac{1}{4}\cdot\varphi(2{,}5)\approx\frac{1}{4}\cdot 0{,}01753=0{,}0438;$$

б) для нахождения вероятности поражения цели не менее 70 раз применим интегральную теорему Муавра-Лапласа:

$$P_{100}(k\ge 70)=P_{100}(70\le k\le 100)\approx\Phi\left(\frac{100-80}{\sqrt{16}}\right)-\Phi\left(\frac{70-80}{\sqrt{16}}\right)=$$
$$=\Phi(5)-\Phi(-2{,}5)=\Phi(5)+\Phi(2{,}5)\approx 0{,}5+0{,}49379=0{,}99379.$$

Найдем наивероятнейшее число попаданий k_0. Воспользуемся формулой (1.6.8):

$$np-q\le k_0\le np+p\Rightarrow$$
$$100\cdot 0{,}8-0{,}2\le k_0\le 100\cdot 0{,}8+0{,}8\Rightarrow$$
$$79{,}8\le k_0\le 80{,}8\Rightarrow k_0=80.$$

ЗАДАЧИ

1.7.1 При социологических опросах граждан каждый человек, независимо от других, может дать неискренний ответ с вероятностью 0,2. Найти вероятность, что из 800 опросов число неискренних ответов будет 180. (Ответ: 0,0074)

1.7.2 Вероятность обнаружения упавшего на Землю метеорита, по подсчетам ученых, составляет $0{,}0001$. Какова вероятность обнаружения двух метеоритов из 3000 упавших на Землю? (Ответ: 0,006)

1.7.3 Вероятность появления события A в каждом из 850 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие A произойдет: а) 700 раз; б) 670 раз. (Ответ: а) 0,0079; б) 0,024)

1.7.4 Вероятность появления события A в одном испытании равна 0,5. Сколько раз с вероятностью 0,0352 можно ожидать появления события A в 150 независимых испытаниях? (Ответ: 81)

1.7.5 Найти вероятность того, что из 300 наудачу отобранных человек в летние месяцы родились 66 человек. (Ответ: 0,026)

1.7.6 Вероятность изготовления детали первого сорта на данном станке равна 0,75. Найти вероятность того, что среди наугад взятых 100 деталей окажется 70 деталей первого сорта. (Ответ: 0,047)

1.7.7 Вероятность появления события A в каждом из 500 независимых испытаний постоянна и равна 0,9. Найти вероятность того, что данное событие появится: а) не менее 430 и не более 470 раз; б) не менее 430 раз; в) не более 429 раз. (Ответ: а) 0,997; б) 0,9986; в) 0,0014)

1.7.8 По каналу связи передается сообщение, состоящее из 1000 символов. Вероятность ошибки при передаче одного символа равна 0,01. Найти вероятность того, что ошибок будет: а) ровно пять; б) менее трех.

1.7.9 Вероятность приема каждого из 100 передаваемых сигналов равна 0,75. Найти вероятность того, что будет принято от 71 до 80 сигналов. (Ответ: 0,696)

1.7.10 Известно, что в среднем 97 % продукции, выпускаемой на данном предприятии, соответствует стандарту. ОТК наудачу выбирает 200 изделий и если среди них окажется более 5 бракованных изделий, то вся партия бракуется. Какова вероятность того, что партия будет принята?

1.7.11 Стая пустынной саранчи, состоящая из миллиона особей, подверглась химической обработке. Вероятность гибели отдельного насекомого составляла при этом 0,75. Найти вероятность того, что после обработки количество оставшихся живыми насекомых будет заключено между 249000 и 251000.

1.7.12 Из колоды, содержащей 36 карт, наудачу извлекается одна карта. Затем карта возвращается в колоду, и колода тщательно перетасовывается. Опыт повторяется 250 раз. Какова вероятность того, что карта трефовой масти при этом появится не более 120 раз?

1.7.13 Игральная кость изготовлена в форме икосаэдра – правильного многогранника, гранями которого являются 20 правильных треугольников. На грани икосаэдра нанесены числа от 1 до 20. При бросании такой кости выпавшим количеством очков считается число, нанесенное на верхнюю грань. Кость бросается 100 раз. Какова вероятность того, что цифра 1 выпадет не менее двух раз?

1.7.14 В большой партии деталей бракованные составляют 1,2 %. Детали упаковывают в коробки по 250 штук. Какова вероятность того, что в случайно взятой коробке будут ровно 3 бракованные детали?

1.7.15 Проводятся испытания 500 приборов. Вероятность отказа любого из них равна 0,008. Найти вероятность того, что откажет хотя бы один прибор.

1.7.16 Некоторое сложное техническое устройство состоит из 2500 деталей, вероятность выхода из строя каждой из которых равна 0,002. При выходе из строя более трех деталей устройство перестает функционировать. Какова вероятность того, что устройство перестанет функционировать?

1.7.17 В новом доме установлено 340 лампочек. Вероятность перегореть в течение месяца для каждой лампочки равна 0,015. Найти вероятность того, что в течение месяца перегорят менее трех лампочек.

1.7.18 В некотором вузе обучаются 2460 студентов. Полагая, что днем рождения студента может быть любой из дней года, найти вероятность того, что не менее трех студентов родились 1 сентября.

1.7.19 Вероятность появления герба при бросании гнутой монеты равна 0,45. Монету бросают 600 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет при этом: а) 295 раз; б) не более 250 раз.

1.7.20 При искусственном выращивании жемчуга вероятность получить жемчужину от одного моллюска равна 0,22. Найти вероятность того, что количество жемчужин, полученных от 20000 моллюсков, заключено между 4340 и 4460.

1.7.21 В урне находятся 9 белых, 5 красных и 6 черных шаров. Производится 250 извлечений шара из урны, причем после каждого извлечения шар возвращается в урну и шары перемешиваются. Какова вероятность того, что белый шар появится: а) 120 раз; б) более 120 раз?

1.7.22 Известно, что вероятность выпадения осадков в любой день в течение трех летних месяцев равна 0,19. Найти вероятность того, что количество ясных дней за этот промежуток времени будет заключено между 40 и 50.

1.7.23 Телефонная станция обслуживает 10000 абонентов. В течение определенного промежутка времени каждый из них может сделать вызов с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что общее число вызовов будет заключено между 1980 и 2040.

1.7.24 Наудачу производится 150 извлечений одной карты из колоды, содержащей 36 карт, причем после каждого извлечения карту возвращают в колоду и колоду перетасовывают. Найти вероятность того, что туз при этом появится: а) 25 раз; б) хотя бы один раз.

1.7.25 Считается, что вероятность рождения девочки равна 0,485. Найти границы числа m, чтобы с вероятностью 0,95 можно было утверждать, что среди 800 новорожденных m девочек. *Указание*: использовать для решения задачи формулу (1.7.4). (Ответ: $360 \le m \le 416$)

1.7.26 Отдел технического контроля проверяет 475 изделий на брак. Вероятность того, что изделие бракованное, равна $0{,}05$. Найти с вероятностью $0{,}95$ границы, в которых будет заключено число m бракованных изделий среди проверенных. (Ответ: $15 \le m \le 33$)

1.7.27 Шестигранный игральный кубик подбрасывают 120 раз. Найти с вероятностью 0,99 границы, в которых будет заключено число выпадений шестерки.

1.7.28 Сколько раз нужно подбросить шестигранный игральный кубик, чтобы с вероятностью $0{,}85$ можно было ожидать не менее 150 выпадений шестерки? (Ответ: 953)

1.7.29 Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна $0{,}5$. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по модулю не больше чем на $0{,}02$. (Ответ: 0,7698)

1.7.30 В урне находятся 40 белых и 10 черных шаров. Из урны наудачу извлекают шар, фиксируют цвет и шар возвращается в урну, шары перемешиваются. Чему равно наименьшее число извлечений, при котором с вероятностью 0,95 можно утверждать, что абсолютная величина отклонения относительной частоты появления белого шара от его вероятности не будет превышать 0,01. (Ответ: 6147)

ВОПРОСЫ

1. Что изучает комбинаторика?

2. Что называют перестановками, размещениями, сочетаниями?

3. По какой формуле вычисляют число перестановок из n различных элементов?

4. По какой формуле вычисляют число перестановок с повторениями?

5. По какой формуле вычисляют число размещений из n различных элементов по m элементов?

6. По какой формуле вычисляют число размещений с повторениями?

7. По какой формуле вычисляют число сочетаний из n элементов по m элементов?

8. По какой формуле вычисляют число сочетаний с повторениями?

9. Что называют событием?

10. Какие события называют элементарными?

11. Какое событие называют достоверным?

12. Какое событие называют невозможным?

13. Какие элементарные исходы называют благоприятствующими данному событию?

14. Какие события считают равновозможными?

15. Дайте классическое определение вероятности.

16. Дайте статистическое определение вероятности.

17. В чем отличие классического и статистического определения вероятности?

18. Чему равна вероятность достоверного события?

19. Чему равна вероятность невозможного события?

20. В каких пределах заключена вероятность случайного события?

21. Как определяется геометрическая вероятность в плоском случае?

22. Как определяется геометрическая вероятность в линейном случае?

23. Как определяется геометрическая вероятность попадания точки в объем?

24. Что называют суммой, или объединением, двух событий? Как ее обозначают?

25. Что называют произведением, или пересечением, двух событий? Как ее обозначают?

26. Назовите свойства операций объединения и пересечения событий.

27. Какие события называются несовместными?

28. Сформулируйте теорему сложения вероятностей n событий.

29. Сформулируйте теорему сложения вероятностей n несовместных событий.

30. Что называют полной группой событий?

31. Сформулируйте теорему умножения вероятностей n событий.

32. Сформулируйте теорему умножения вероятностей n независимых событий.

33. Какой вид имеет формула полной вероятности?

34. Какой вид имеет формула Байеса?

35. Какими должны быть испытания, чтобы можно было применять формулу Бернулли?

36. Какой вид имеет формула Бернулли?

37. Что называют наивероятнейшим числом появления события в n независимых испытаниях? Как находится это число?

38. Как найти вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A появится хотя бы один раз?

39. Как вычислить вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A наступит: менее k раз, более k раз, не менее k раз, не более k раз?

40. Как формулируется теорема Пуассона?

41. Как формулируется локальная теорема Лапласа?

42. Как формулируется интегральная теорема Муавра-Лапласа?

43. Как определяется функция Лапласа?

44. Функция Лапласа является четной или нечетной?

2 СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

2.1 Определение случайной величины. Функция распределения случайной величины и ее свойства

Пусть рассматривается математическая модель некоторого эксперимента со случайным исходом, и $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\omega_n, ...\}$ – соответствующее пространство элементарных событий. Если каждому $\omega_i \in \Omega$ поставить в соответствие действительное число $x = x(\omega_i)$, то получим функцию, которая (при некоторых дополнительных ограничениях) называется ***случайной величиной***. Случайные величины обычно обозначают заглавными буквами латинского алфавита $X, Y, Z...$, а их значения – соответствующими строчными буквами $x, y, z, ...$.

Примеры случайных величин:

а) число пассажиров в автобусе (конечное число значений);

б) число извлеченных карт до появления короля, при условии, что каждую карту после извлечения возвращают в колоду (счетное число значений);

в) время безотказной работы прибора за время Т (несчетное число значений).

Из приведенных примеров видно, что существуют случайные величины, возможные значения которых есть отдельные изолированные числа и существуют случайные величины, возможные значения которых сплошь заполняют некоторый промежуток или промежутки. Из вышесказанного следует, что целесообразно разделить все случайные величины на два вида: ***дискретные и непрерывные.***

Функция распределения случайной величины

Для того, чтобы определять вероятности событий, связанных со случайными величинами, причем делать это для любых случайных величин одним и тем же способом, в теории вероятностей вводят понятие функции распределения.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, определяемая для любого действительного числа $x \in \mathbf{R}$ равенством:

$$F(x) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} = P(X < x). \qquad (2.1.1)$$

Геометрически функция распределения $F(x)$ означает вероятность попадания случайной точки X левее заданной точки x.

Функция распределения является исчерпывающей вероятностной характеристикой случайной величины, поскольку позволяет определять вероятности любых событий, с ней связанных.

Свойства функции распределения

1. Все значения функции распределения принадлежат отрезку $[0;1]$, т. е.

$$0 \le F(x) \le 1. \qquad (2.1.2)$$

2. Функция распределения $F(x)$ является неубывающей функцией, т. е.

$$F(x_2) \ge F(x_1), \text{ если } x_2 > x_1. \qquad (2.1.3)$$

3. Функция $F(x)$ непрерывна слева в точке x_0, т. е.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0), F(x_0 - 0) = F(x_0). \qquad (2.1.4)$$

4. Если возможные значения случайной величины X принадлежат бесконечному интервалу $(-\infty, +\infty)$, то

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1. \qquad (2.1.5)$$

5. Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a;b)$, то для ее функции распределения

$$F(x) = 0 \text{ при } x \le a, \ F(x) = 1 \text{ при } x \ge b. \qquad (2.1.6)$$

6. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в полуинтервале $[a,b)$, равна разности значений ее функции распределения $F(x)$ на концах этого полуинтервала:

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a). \qquad (2.1.7)$$

7. Для любого значения $X = x_0$ справедлива формула

$$P(X = x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} F(x) - F(x_0). \qquad (2.1.8)$$

Заметим, что если X – непрерывная случайная величина, то из (2.1.8) следует, что $P(X = x_0) = 0$. Поэтому в этом случае справедливы равенства

$$P(a \le X < b) = P(a < X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b) = F(b) - F(a). \qquad (2.1.9)$$

2.2 Дискретные случайные величины. Закон распределения дискретной случайной величины

Если множество значений, которые может принимать случайная величина, конечно или счетно, то случайная величина называется ***дискретной***. Для полной вероятностной характеристики дискретной случайной величины X достаточно указать все ее возможные значения $x_i \in X$ и вероятности $p_i = P(X = x_i), i = 1,2,...$, с которыми эти значения принимаются; такое соотношение называется ***законом распределения*** дискретной случайной величины.

Считается, что дискретная случайная величина задана, если известен ее закон распределения, представленный различным способом: табличным, графическим или аналитическим.

При табличном способе задания дискретной случайной величины X в первой строке таблицы указывают все ее возможные значения x_i (обычно в возрастающем порядке), а во второй – соответствующие им вероятности p_i.

Такая таблица называется ***рядом распределения*** дискретной случайной величины.

Если дискретная случайная величина X принимает конечное множество значений, то ряд распределения имеет вид:

$X = x_i$	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Следует заметить, что $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Если же дискретная случайная величина X принимает бесконечное счетное множество значений, то ряд распределения имеет вид:

$X =$	x_1	x_2	...	x_n	...
$P($	p_1	p_2	...	p_n	...

Причем ряд $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} p_i$ сходится и его сумма равна единице.

При графическом способе задания дискретной случайной величины X в прямоугольной системе координат по оси абсцисс откладывают все возможные значения случайной величины, а по оси ординат – соответствующие им вероятности, затем полученные точки соединяют отрезками прямых. Полученная при этом ломаная линия называется ***многоугольником распределения***.

При аналитическом способе задания закона распределения указывается формула, позволяющая для каждого значения случайной величины определить его вероятность:

$$P(X = x_i) = \varphi(x_i) \quad (i = 1, ..., n), \quad \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) = 1.$$

Функция распределения дискретной случайной величины, все различные значения которой суть $x_1, x_2, ...,$, имеет вид:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i), \tag{2.2.1}$$

где неравенство $x_i < x$ означает, что суммируются вероятности тех возможных значений случайной величины, которые меньше x.

Функция, определяемая выражением (2.2.1), является кусочно-заданной, и имеет точки разрыва.

Пример 1. Из урны, содержащей 3 белых и 5 черных шаров, последовательно, без возвращения наудачу извлекают по одному шары до тех пор, пока не появится черный шар. Случайная величина X равна числу извлеченных белых шаров. Для этой случайной величины построить ряд распределения и многоугольник распределения, найти функцию распределения и построить ее график, найти $P(X > 1)$.

Решение. Очевидно, что возможные значения случайной величины равны:

0 (первый извлеченный шар – черный);

1 (первый шар – белый, второй – черный);

2 (первый шар – белый, второй – белый, третий – черный);

3 (первый, второй и третий шары – белые, третий – черный).

Найдем вероятности, с которыми случайная величина принимает эти значения. Для этого введем в рассмотрение событие A_i, состоящее в том, что при i – м извлечении появился черный шар. Тогда искомые вероятности:

$$P(X=0)=P(A_1)=\frac{5}{8};$$

$$P(X=1)=P(\overline{A_1}\cdot A_2)=P(\overline{A_1})\cdot P(A_2\mid\overline{A_1})=\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}=\frac{15}{56};$$

$$P(X=2)=P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3)=P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2}\mid\overline{A_2})\cdot P(A_3\mid\overline{A_1}\cdot\overline{A_2})=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{56};$$

$$P(X=3)=P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot A_4)=P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2}\mid\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3}\mid\overline{A_1}\cdot\overline{A_2})\cdot P(A_4\mid\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3})=$$

$$=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{5}=\frac{1}{56}.$$

Таким образом, ряд распределения примет вид:

$X=x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	5/8	15/56	5/56	1/56

Построим многоугольник распределения (рис. 6).

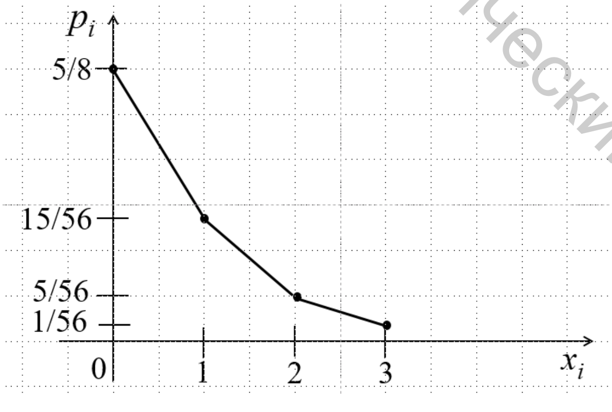


Рисунок 6

Для нахождения функции распределения $F(x)$ воспользуемся формулой (2.2.1):

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ \dfrac{5}{8}, & 0<x\le 1;\\ \dfrac{5}{8}+\dfrac{15}{56}, & 1<x\le 2;\\ \dfrac{5}{8}+\dfrac{15}{56}+\dfrac{5}{56}, & 2<x\le 3;\\ \dfrac{5}{8}+\dfrac{15}{56}+\dfrac{5}{56}+\dfrac{1}{56}, & x>3. \end{cases} \Rightarrow F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ \dfrac{5}{8}, & 0<x\le 1;\\ \dfrac{50}{56}, & 1<x\le 2;\\ \dfrac{55}{56}, & 2<x\le 3;\\ 1, & x>3. \end{cases}$$

Построим график функции распределения (рис. 7).

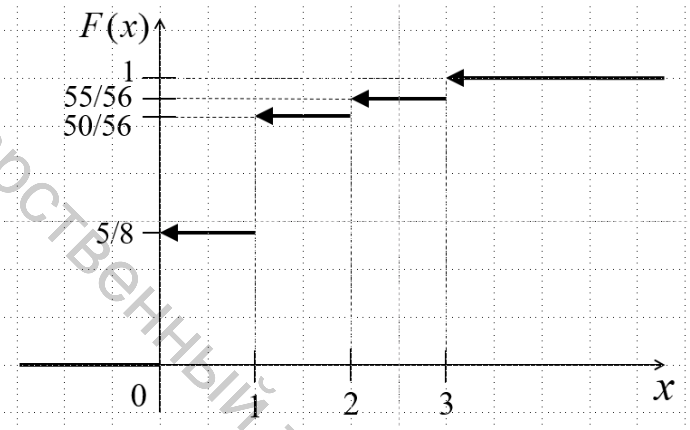


Рисунок 7

Найдем $P(X>1)$.

$$P(X>1)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{5}{56}+\frac{1}{56}=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}.$$

ЗАДАЧИ

2.2.1 Задают ли законы распределения дискретной случайной величины следующие таблицы?

а)

$X=x_i$	1	3	5	7
$P(X=x_i)$	0,2	0,1	0,6	0,1

б)

$X=x_i$	10	20	30	40
$P(X=x_i)$	0,1	0,5	0,2	0,1

в)

$X=x_i$	$1/2$	$1/2^2$	$1/2^3$	...	$1/2^i$	...
$P(X=x_i)$	1	1/2	1/3	...	1/i	...

г)

$X=x_i$	$1/5$	$1/5^2$	$1/5^3$	...	$1/5^i$	...
$P(X=x_i)$	$1/7$	$1/7^2$	$1/7^3$	...	$1/7^i$	...

2.2.2 Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

$X = x_i$	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,10	p_2	0,12	p_4	0,46	0,22

Найти вероятности p_2 и p_4, если $p_1 = 4p_4$.

В каждой из предлагаемых ниже задач определена некоторая случайная величина X. Для этой случайной величины построить ряд распределения и многоугольник распределения, найти функцию распределения и построить ее график. Найти вероятность $P(X \leq 2)$.

2.2.3 В ящике находятся детали, 10 % из которых – бракованные. Наудачу отобрано 5 деталей. Случайная величина X равна числу бракованных деталей среди пяти отобранных.

2.2.4 Подбрасывается три монеты. Случайная величина X равна числу выпадений цифры на трех монетах.

2.2.5 В коробке 9 шаров, из которых 5 белых. Из коробки наудачу извлекают 4 шара. Случайная величина X равна числу белых шаров в выборке.

2.2.6 В партии из 14 деталей имеется 3 нестандартных. Из партии наудачу взято 4 детали. Случайная величина X равна числу стандартных деталей в выборке.

2.2.7 Подбрасывается два игральных кубика. Случайная величина X равна сумме выпавших очков на двух игральных кубиках.

2.2.8 Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,7. Стрелок произвел четыре выстрела. Случайная величина X равна числу попаданий в мишень.

2.2.9 Три спортсмена стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого спортсмена равна 0,7, а для второго – 0,8 и для третьего – 0,9. Спортсмены независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Случайная величина X равна числу попаданий.

2.2.10 Из колоды, содержащей 36 карт, наудачу извлекают три карты. Случайная величина X равна числу королей в выборке.

2.2.11 В первом ящике находится 3 белых и 7 чёрных шаров, во втором – 2 белых и 3 чёрных, и в третьем – 15 белых и 5 черных. Из каждого ящика наудачу извлекаем по одному шару. Случайная величина X равна числу белых шаров в выборке.

2.2.12 Три станка штампуют однотипные детали. Известно, что брак в их продукции составляет соответственно 1 %, 2 % и 3 %. С каждого станка берут наудачу по одной детали. Случайная величина X равна числу бракованных деталей в выборке.

2.2.13 Студент знает ответы на 25 вопросов из 40. Преподаватель задает 2 вопроса последовательно один за другим. Случайная величина X равна числу «счастливых» вопросов.

2.2.14 Два человека в тире по очереди стреляют по одной мишени, причем у каждого из них по два патрона. Первый стрелок попадает с вероятностью 0,3, а второй – с вероятностью 0,4. В случае попадания стрельба прекращается. Случайная величина X равна числу прозвучавших выстрелов.

2.2.15 Из колоды, содержащей 36 карт, наудачу извлекают одну карту, запоминают ее масть и карту возвращают обратно, колоду перетасовывают. Опыт повторяют пять раз. Случайная величина X равна числу извлеченных карт масти «пик».

2.3 Непрерывные случайные величины

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Очевидно, что число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Основной формой закона распределения непрерывной случайной величины является ***плотность распределения вероятностей*** или просто ***плотность вероятностей***.

Плотностью вероятностей случайной величины X называют предел отношения вероятности попадания ее на элементарный участок от x до $x+\Delta x$, к длине участка Δx, когда $\Delta x \to 0$:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X < x + \Delta x)}{\Delta x}. \qquad (2.3.1)$$

Из определения следует, что плотность вероятностей равна первой производной от функции распределения:

$$f(x) = F'(x). \qquad (2.3.2)$$

Тогда функция распределения выражается через плотность вероятностей формулой:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \qquad (2.3.3)$$

На основании равенств (2.3.2) и (2.3.3) плотность вероятностей $f(x)$ называют еще ***дифференциальной функцией распределения***, а функцию распределения $F(x)$ – ***интегральной функцией распределения***.

Функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины непрерывна на всей оси Ox.

Свойства плотности вероятностей

1. Плотность распределения $f(x)$ – неотрицательная функция, т. е.

$$f(x) \ge 0. \qquad (2.3.4)$$

2. Несобственный интеграл от плотности распределения по бесконечному промежутку $(-\infty, +\infty)$ равен единице (условие нормировки):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \qquad (2.3.5)$$

3. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(a;b)$, определяется равенством

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx. \qquad (2.3.6)$$

Замечание. С учетом равенства (2.1.9), вероятность попадания непрерывной случайной величины на закрытый или полузакрытый промежуток, то есть на $[a;b],(a;b],[a;b)$ тоже определяется равенством (2.3.6), то есть

$$P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx. \quad (2.3.7)$$

Геометрически полученный результат можно трактовать так: вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее промежутку $(a;b)$ $([a;b],(a;b],[a;b))$, численно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью *Ox*, кривой распределения *f(x)* и прямыми *x=a* и *x=b*.

Следует отметить, что если известна функция распределения *F(x)* непрерывной случайной величины, то для нахождения вероятности того, что эта случайная величина примет значение, принадлежащее конечному промежутку, проще пользоваться формулой (2.1.9).

Пример 1. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ \sin 3x, & \text{если } 0 < x \le \dfrac{\pi}{6}; \\ 1, & \text{если } x > \dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$$

1) Найти плотность распределения вероятностей этой случайной величины.
2) Найти вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала $\left(\dfrac{\pi}{12};\dfrac{\pi}{9}\right)$.

Решение. 1) Воспользуемся равенством (2.3.2):

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ 3\cos 3x, & \text{если } 0 < x \le \dfrac{\pi}{6}; \\ 0, & \text{если } x > \dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$$

2) Воспользуемся равенством (2.1.9):

$$P\left(\frac{\pi}{12} < X < \frac{\pi}{9}\right) = F\left(\frac{\pi}{9}\right) - F\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(3\cdot\frac{\pi}{9}\right) - \sin\left(3\cdot\frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4} \approx 0{,}1589.$$

Пример 2. Случайная величина X задана плотностью вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{если } x \le 0; \\ x, & \textit{если } 0 < x \le 1; \\ 2 - x, & \textit{если } 1 < x \le 2; \\ 0 & \textit{если } x > 2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения этой случайной величины.

Решение. Воспользуемся формулой (2.3.3).

Если $x \le 0$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$

Если $0 < x \le 1$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{x} tdt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^x = \frac{x^2}{2}.$

Если $1 < x \le 2$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{1} tdt + \int\limits_{1}^{x} (2-t)dt =$

$$= \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 + \left.\left(2t - \frac{t^2}{2}\right)\right|_1^x = \frac{1}{2} + 2x - \frac{x^2}{2} - 2 + \frac{1}{2} = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1.$$

Если $x > 2$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{1} tdt + \int\limits_{1}^{2} (2-t)dt + \int\limits_{2}^{x} 0dt =$

$$= \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 + \left.\left(2t - \frac{t^2}{2}\right)\right|_1^2 = \frac{1}{2} + 4 - 2 - 2 + \frac{1}{2} = 1.$$

Тогда функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \textit{если } x \le 0; \\ \dfrac{x^2}{2}, & \textit{если } 0 < x \le 1; \\ -\dfrac{x^2}{2} + 2x - 1, & \textit{если } 1 < x \le 2; \\ 1 & \textit{если } x > 2. \end{cases}$$

Пример 3. Проверить, является ли нижеприведенная функция плотностью вероятностей.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{если } x \le 0; \\ x(1-x) & \textit{если } 0 < x \le 1; \\ 0, & \textit{если } x > 1. \end{cases}$$

Решение. Проверим выполнение условия нормировки (равенство (2.3.5)):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{1} x(1-x)dx + \int\limits_{1}^{+\infty} 0dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \neq 1.$$

Таким образом, условие нормировки не выполняется, значит, данная функция не может быть плотностью вероятностей.

ЗАДАЧИ

В задачах 2.3.1–2.3.12 задана плотность вероятностей некоторой случайной величины. Для этой случайной величины: 1) найти параметр C; 2) найти функцию распределения; 3) построить графики плотности вероятностей и функции распределения; 4) найти вероятность попадания случайной величины на интервал $(a;b)$.

2.3.1 $a = 2, b = 3;$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 1; \\ 2(x-1)/3, & \text{если } 1 < x \le 2; \\ C(x-4), & \text{если } 2 < x \le 4; \\ 0 & \text{если } x > 4. \end{cases}$$

2.3.2 $a = 1, b = 2;$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ 2x/3, & \text{если } 0 < x \le 1; \\ C(3-x), & \text{если } 1 < x \le 3; \\ 0 & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

2.3.3 $a = 0, b = 2;$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le -1; \\ (x+1)/6, & \text{если } -1 < x \le 2; \\ C(3-x), & \text{если } 2 < x \le 3; \\ 0 & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

2.3.4 $a = 3, b = 4;$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 2; \\ 1/2, & \text{если } 2 < x \le 3; \\ C(5-x)/2, & \text{если } 3 < x \le 5; \\ 0 & \text{если } x > 5. \end{cases}$$

2.3.5 $a = 2, b = 3;$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 1; \\ C(x^2 - 5x + 4), & \text{если } 1 < x \le 4; \\ 0, & \text{если } x > 4. \end{cases}$$

2.3.6 $a = -2, b = -1;$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le -3; \\ C(x^2 + 3x), & \text{если } -3 < x \le 0; \\ 0, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

2.3.7. $a = 0{,}5, b = 1{,}5;$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 1; \\ C\sin(\pi x), & \text{если } 1 < x \le 2; \\ 0, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

2.3.8. $a = 0, b = 0{,}5;$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le -1; \\ C\cos(\pi x/2), & \text{если } -1 < x \le 1; \\ 0, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

2.3.9 $a = 0, b = 0{,}5;$

2.3.10 $a = 0{,}5, b = 1;$

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0;\\ 2x^3, & \text{если } 0<x\le 1;\\ C, & \text{если } 1<x\le 5/4;\\ 0 & \text{если } x>5/4.\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0;\\ x^3, & \text{если } 0<x\le 1;\\ C, & \text{если } 1<x\le 7/4;\\ 0 & \text{если } x>7/4.\end{cases}$$

2.3.11 $a=0{,}5, b=1;$

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0;\\ 2x/5, & \text{если } 0<x\le 1;\\ C, & \text{если } 1<x\le 3;\\ 0 & \text{если } x>3.\end{cases}$$

2.3.12 $a=0{,}5, b=1;$

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le -2;\\ 1/3, & \text{если } -2<x\le 0;\\ C(x^2-2x), & \text{если } 0<x\le 2;\\ 0 & \text{если } x>2.\end{cases}$$

2.3.13 Найти значение постоянного параметра C, если функция плотности распределения случайной величины X имеет вид $f(x)=\dfrac{C}{1+4x^2}$.

2.3.14 Проверить, являются ли нижеприведенные функции $f(x)$ функциями плотности вероятности. Найти (где это возможно) вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение из интервала $(a;b)$, если:

а) $a=1, b=3;$

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0;\\ \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}, & \text{если } x>0.\end{cases}$$

б) $a=0, b=\dfrac{\pi}{4};$

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0;\\ \dfrac{4}{\pi}\sin^2 x, & \text{если } 0<x\le \dfrac{\pi}{2};\\ 0, & \text{если } x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

в)

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0;\\ x(1-x), & \text{если } 0<x\le 1;\\ 0, & \text{если } x>1.\end{cases}$$

г)

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2}\ (-\infty<x<+\infty).$$

2.3.15 Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

а)

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0;\\ \sin x, & \text{если } 0<x\le \dfrac{\pi}{2};\\ 0, & \text{если } x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

б)

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0;\\ 0{,}5, & \text{если } 0<x\le 1;\\ 2-\dfrac{2}{3}x, & \text{если } 1<x\le 2;\\ 0 & \text{если } x>2.\end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$. Построить графики функций $f(x)$, $F(x)$.

2.3.16 Плотность распределения непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & если\ x<0; \\ Cxe^{-2x}, & если\ x\geq 0. \end{cases}$$

Найти значение коэффициента C и функцию распределения $F(x)$.

2.4 Числовые характеристики случайных величин

Числа, выражающие в сжатой форме характерные свойства распределения случайной величины, называются числовыми характеристиками случайной величины.

1. Математическое ожидание случайной величины и его свойства.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X, ***принимающей конечное множество значений***, называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности

$$M(x)=x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i\ . \quad (2.4.1)$$

Математическое ожидание дискретной случайной величины, принимающей бесконечную последовательность значений, определяется формулой

$$M(x)=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i\ , \quad (2.4.2)$$

если ряд в правой части равенства сходится абсолютно.

Математическое ожидание является ***взвешенной средней*** (обычно говорят ***средним значением***) наблюдаемых значений случайной величины. При симметрии многоугольника распределения относительно некоторой прямой, параллельной оси ординат, математическое ожидание совпадает с абсциссой любой точки этой прямой.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X с плотностью вероятностей $f(x)$ называется значение несобственного интеграла

$$M(x)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx, \quad (2.4.3)$$

если он сходится абсолютно.

Если возможные значения непрерывной случайной величины принадлежат отрезку $[\alpha;\beta]$, то

$$M(x)=\int_{\alpha}^{\beta}xf(x)dx. \quad (2.4.4)$$

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной

$$M(C) = C \ \ (C = const). \qquad (2.4.5)$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания

$$M(CX) = CM(X) \ \ (C = const). \qquad (2.4.6)$$

3. Математическое ожидание суммы (разности) двух случайных величин равно сумме (разности) их математических ожиданий

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y). \qquad (2.4.7)$$

4. Математическое ожидание произведения двух и более независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \ldots \cdot M(X_n). \qquad (2.4.8)$$

2. Дисперсия случайной величины и ее свойства.

Дисперсией, или ***рассеянием,*** случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M\left((X - M(X))^2\right). \qquad (2.4.9)$$

Дисперсию удобно также вычислять по формуле:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2. \qquad (2.4.10)$$

Из определения следует, что $D(X) \geq 0$ и чем плотнее группируются значения случайной величины около математического ожидания (среднего значения), тем дисперсия меньше.

Дисперсию дискретной случайной величины вычисляют по формуле:

$$D(X) = \sum_i (x_i - M(X))^2 \cdot p_i \qquad (2.4.11)$$

или

$$D(X) = \sum_i x_i^2 p_i - (M(X))^2. \qquad (2.4.12)$$

Дисперсия непрерывной случайной величины с плотностью вероятностей $f(x)$ равна значению несобственного интеграла

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^2 f(x)dx \qquad (2.4.13)$$

или

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (M(x))^2, \qquad (2.4.14)$$

если этот несобственный интеграл сходится абсолютно.

Если все возможные значения непрерывной случайной величины принадлежат отрезку $[\alpha; \beta]$, то формулы (2.4.13) и (2.4.14) примут вид

$$D(x) = \int_{\alpha}^{\beta} (x - M(x))^2 f(x)dx \ \text{ и } \ D(x) = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x)dx - (M(x))^2. \qquad (2.4.15)$$

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$D(C) = 0 \quad (C = const). \tag{2.4.16}$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2 D(X) \quad (C = const). \tag{2.4.17}$$

3. Дисперсия суммы двух и более независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y). \tag{2.4.18}$$

4. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X-Y) = D(X) + D(Y). \tag{2.4.19}$$

3. Среднее квадратическое отклонение случайной величины.

Средним квадратическим отклонением или ***стандартным отклонением*** случайной величины X называется корень квадратный из ее дисперсии

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{2.4.20}$$

4. Мода и медиана случайной величины.

Модой $M_O(X)$ ***дискретной случайной величины*** X называется то ее возможное значение, вероятность которого наибольшая по сравнению с вероятностями двух соседних значений.

Модой $M_O(X)$ ***непрерывной случайной величины*** X называется то ее возможное значение, которому соответствует локальный максимум плотности вероятностей $f(x)$.

Если мода единственна, то распределение называют ***унимодальным***, в противном случае – ***полимодальным***.

Медианой $M_e(X)$ ***непрерывной случайной величины*** X называют то ее возможное значение, которое определяется равенством

$$P(X < M_e(X)) = P(X > M_e(X)) = 0{,}5. \tag{2.4.21}$$

Для дискретных случайных величин медиана обычно не определяется.

Пример 1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины, заданной рядом распределения:

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,504	0,398	0,092	0,006

Решение. Воспользуемся формулами (2.4.1), (2.4.12) и (2.4.20) соответственно:

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}504 + 1 \cdot 0{,}398 + 2 \cdot 0{,}092 + 3 \cdot 0{,}006 = 0{,}6,$$

$$D(X) = 0^2 \cdot 0{,}504 + 1^2 \cdot 0{,}398 + 2^2 \cdot 0{,}092 + 3^2 \cdot 0{,}006 - 0{,}6^2 = 0{,}46,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0{,}46} \approx 0{,}678.$$

Пример 2. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины, если известна ее функция распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0;\\ \frac{1}{8}x^3, & \text{если } 0<x\le 2;\\ 1, & \text{если } x>2.\end{cases}$$

Решение. Сначала найдем плотность вероятностей случайной величины:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0;\\ \frac{3}{8}x^2, & \text{если } 0<x\le 2;\\ 0, & \text{если } x>2.\end{cases}$$

Воспользуемся формулами (2.4.4), (2.4.15) и (2.4.20) соответственно:

$$M(x)=\int_0^2 xf(x)dx=\int_0^2 x\cdot\frac{3}{8}x^2dx=\frac{3}{8}\int_0^2 x^3dx=\frac{3}{8}\cdot\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2=\frac{3}{8}\cdot\frac{16}{4}=\frac{3}{2},$$

$$D(x)=\int_0^2 x^2 f(x)dx-\left(M(x)\right)^2=\int_0^2 x^2\cdot\frac{3}{8}x^2dx-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{8}\int_0^2 x^4dx-\frac{9}{4}=\frac{3}{8}\cdot\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^2-\frac{9}{4}=$$

$$=\frac{3}{8}\cdot\frac{32}{5}-\frac{9}{4}=\frac{12}{5}-\frac{9}{4}=\frac{3}{20}=0{,}15,$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}15}\approx 0{,}387.$$

ЗАДАЧИ

2.4.1 Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины, заданной рядом распределения:

а)

$X=x_i$	-2	-1	0	1
$P(X=x_i)$	0,2	0,1	0,4	0,3

б)

$X=x_i$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3^2}$	$\frac{1}{3^3}$	…	$\frac{1}{3^n}$	…
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	…	$\frac{1}{2^n}$	…

в)

$X=x_i$	2	4	6	8
$P(X=x_i)$	0,2	0,3	0,4	0,1

г)

$X=x_i$	1	2	3	…	n	…
$P(X=x_i)$	p	pq	pq^2	…	pq^{n-1}	

2.4.2 Подбрасывается две монеты. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины X, равной числу появления «герба» на двух монетах.

2.4.3 Дискретная случайная величина X принимает три значения: $x_1=-2, x_2=0, x_3=2$. Найти вероятности p_1, p_2, p_3, соответствующие возможным значениям x_1, x_2, x_3, если известны математические ожидания этой величины и ее квадрата: $M(X)=0{,}2,\ M(X^2)=0{,}8$.

2.4.4 Дискретная случайная величина X принимает два значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Вероятность того, что случайная величина примет значение x_1, равна 0,2. Найти закон распределения случайной величины X, если известно ее математическое ожидание $M(X)=2{,}6$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=0{,}8$.

2.4.5 Из группы студентов, состоящей из 12 человек, 4 из которых – отличники, наудачу выбирают троих. Случайная величина X равна числу отличников в выборке. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

2.4.6 В экзаменационном билете 3 задачи. Вероятность правильного решения студентом первой задачи равна $0{,}8$, второй – 0,6 и третьей – 0,4. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X – числа правильно решенных задач.

2.4.7 Найти математическое ожидание случайной величины $Z=5X+Y$, если известно, что $M(X)=3, M(Y)=2$.

2.4.8 Найти математическое ожидание случайной величины $Z=15+9X$, если известно, что $M(X)=7$.

2.4.9 Известны математические ожидания двух независимых случайных величин X и Y: $M(X)=2, M(Y)=5$. Найти математические ожидания суммы, разности и произведения этих величин.

2.4.10 Дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

$X=x_i$	2	4	6	8	10	12
$P(X=x_i)$	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8

Записать закон распределения случайных величин $3X, X/2$. Найти математическое ожидание случайных величин $X, 3X, X/2$.

2.4.11 Найти дисперсию случайной величины $Z=X+6Y$, если известно, что $D(X)=3, D(Y)=5$.

2.4.12 Найти числовые характеристики $M(X), D(X), \sigma(\mathrm{X})$ непрерывной случайной величины X, если известна ее функция распределения:

а)

$$F(x)=\begin{cases}0, & если\ \ x\le 0;\\ x^5, & если\ \ 0<x\le 1;\\ 1, & если\ \ x>1,\end{cases}$$

б)

$$F(x)=\begin{cases}0, & если\ \ x\le 0;\\ \sin 2x, & если\ \ 0<x\le \pi/4;\\ 1, & если\ \ x>\pi/4,\end{cases}$$

в)

$$F(x)=\begin{cases}0, & если\ \ x\le -1;\\ 0{,}5x+0{,}5, & если\ \ -1<x\le 1;\\ 1, & если\ \ x>1,\end{cases}$$

г)

$$F(x)=\begin{cases}0, & если\ \ x\le 2;\\ (x-2)^2, & если\ \ 2<x\le 3;\\ 1, & если\ \ x>3.\end{cases}$$

2.4.13 Случайная величина X задана плотностью распределения вероятности: $f(x)=\dfrac{2}{\pi(1+x^2)}$, $x\in(-\infty;+\infty)$. Найти математическое ожидание случайной величины X.

2.4.14 Найти дисперсию непрерывной случайной величины X, если известна ее плотность распределения вероятностей:

а)

$$f(x)=\begin{cases}0, & если\ \ x\le 0;\\ 0{,}125x, & если\ \ 0<x\le 4;\\ 0, & если\ \ x>4,\end{cases}$$

б)

$$f(x)=\begin{cases}0, & если\ \ x\le -3;\\ 1/\left(\pi\sqrt{9-x^2}\right), & если\ \ -3<x\le 3;\\ 0, & если\ \ x>3.\end{cases}$$

2.4.15 Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)=2\cos 2x$ в интервале $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти: а) моду; б) медиану случайной величины X.

2.4.16 Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)=-x^2+8x-15$ в интервале $(3;5)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти моду, математическое ожидание и медиану случайной величины X.

2.5 Моменты случайных величин

Математическое ожидание и дисперсия являются частными случаями следующих общих понятий – моментов случайных величин.

Начальным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание величины X^k:

$$\nu_k = M(X^k), \qquad (2.5.1)$$

если математическое ожидание существует.

Тогда начальный момент первого и второго порядка имеет вид

$$\nu_1 = M(X),\ \nu_2 = M(X^2). \qquad (2.5.2)$$

И формулу для вычисления дисперсии можно записать в виде:

$$D(X)=M(X^2)-\left(M(X)\right)^2=\nu_2-\nu_1^2. \qquad (2.5.3)$$

Для дискретной случайной величины начальный момент определяется суммой:

$$\nu_k = \sum_i x_i^k p_i \,, \qquad (2.5.4)$$

а ***для непрерывной*** – интегралом:

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx \,. \qquad (2.5.5)$$

Центральным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание случайной величины $(X - M(X))^k$:

$$\mu_k = M\left((X - M(X))^k\right), \qquad (2.5.6)$$

если математическое ожидание существует.

В частности,

$$\mu_1 = M(X - M(X)) = 0, \qquad (2.5.7)$$

$$\mu_2 = M\left((X - M(X))^2\right) = D(X). \qquad (2.5.8)$$

Для дискретной случайной величины центральный момент определяется суммой:

$$\mu_k = \sum_i (x_i - M(X))^k p_i \,, \qquad (2.5.9)$$

а ***для непрерывной*** – интегралом:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^k f(x) dx \,. \qquad (2.5.10)$$

При вычислениях удобно использовать формулы, выражающие центральные моменты через начальные

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2, \qquad (2.5.11)$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3, \qquad (2.5.12)$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4. \qquad (2.5.13)$$

Пример 1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

$X = x_i$	1	2
$P(X = x_i)$	0,4	0,6

Найти начальные и центральные моменты первого, второго и третьего порядка случайной величины X .

Решение. Найдем начальные моменты по формуле (2.5.4):

$$\nu_1 = 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}6 = 1{,}6; \; \nu_2 = 1^2 \cdot 0{,}4 + 2^2 \cdot 0{,}6 = 2{,}8; \; \nu_3 = 1^3 \cdot 0{,}4 + 2^3 \cdot 0{,}6 = 5{,}2.$$

Вычислим центральные моменты по формулам (2.5.7), (2.5.11), (2.5.12) соответственно:

$$\mu_1 = M(X - M(X)) = 0; \; \mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = 2{,}8 - (1{,}6)^2 = 0{,}24;$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = 5{,}2 - 3 \cdot 1{,}6 \cdot 2.8 + 2 \cdot (1{,}6)^3 = -0{,}48 \,.$$

Значения μ_2 и μ_3 также можно найти по формуле (2.5.9)

$$\mu_2 = (1-1{,}6)^2 \cdot 0{,}4 + (2-1{,}6)^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}24;$$
$$\mu_3 = (1-1{,}6)^3 \cdot 0{,}4 + (2-1{,}6)^3 \cdot 0{,}6 = -0{,}48.$$

ЗАДАЧИ

2.5.1 Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

$X = x_i$	2	3	5
$P(X = x_i)$	0,1	0,4	0,5

Найти начальные моменты первого, второго и третьего порядка случайной величины X.

2.5.2 Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

$X = x_i$	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Найти начальные и центральные моменты первого, второго и третьего порядка случайной величины X.

2.5.3 Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

$X = x_i$	3	5
$P(X = x_i)$	0,2	0,8

Найти центральные моменты первого, второго и третьего порядка случайной величины X.

2.5.4 Доказать, что начальный момент нулевого порядка равен единице, а начальный момент первого порядка случайной величины X равен ее математическому ожиданию.

2.5.5 Доказать, что центральный момент нулевого порядка равен единице; центральный момент первого порядка равен нулю; центральный момент второго порядка случайной величины X равен дисперсии этой величины.

2.5.6 Доказать, что центральные моменты второго, третьего и четвертого порядков связаны с начальными моментами формулами (2.5.11), (2.5.12), (2.5.13).

ВОПРОСЫ

1. Какую величину называют дискретной случайной величиной?
2. Что называют законом распределения дискретной случайной величины?
3. Как можно задать закон распределения дискретной случайной величины?
4. Какой закон распределения называется биномиальным?
5. Дайте определение математического ожидания дискретной случайной величины.

6. Какое другое название используют для математического ожидания?

7. Назовите свойства математического ожидания случайной величины.

8. Что называют отклонением случайной величины от ее математического ожидания?

9. Чему равно математическое ожидание отклонения?

10. Дайте определение дисперсии случайной величины.

11. По какой формуле можно вычислять дисперсию?

12. Назовите свойства дисперсии случайной величины.

13. Что называют средним квадратическим отклонением?

14. Дайте определение функции распределения случайной величины?

15. Какую величину называют непрерывной случайной величиной?

16. Назовите свойства функции распределения случайной величины.

17. Как с помощью функции распределения $F(X)$ вычислить вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в полуинтервале $[a;b)$?

19. Дайте определение плотности распределения случайной величины.

20. Как выражается функция распределения через плотность распределения?

21. Как выражается плотность распределения через функцию распределения?

22. Как с помощью плотности распределения найти вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(a;b)$?

23. Как определяется математическое ожидание непрерывной случайной величины, все значения которой принадлежат отрезку $[\alpha;\beta]$?

24. Как определяется математическое ожидание непрерывной случайной величины, все значения которой принадлежат промежутку $(-\infty;+\infty)$?

25. По каким формулам можно вычислить дисперсию непрерывной случайной величины, если все возможные значения принадлежат отрезку $[\alpha;\beta]$?

26. По каким формулам можно вычислить дисперсию непрерывной случайной величины, если все возможные значения принадлежат промежутку $(-\infty;+\infty)$?

27. Что называют модой непрерывной случайной величины X?

28. Что называют медианой непрерывной случайной величины X?

29. Что называют начальным моментом k-го порядка случайной величины?

30. Что называют центральным моментом k-го порядка случайной величины?

31. Чему равны начальные моменты первого и второго порядка?

32. Чему равны центральные моменты первого и второго порядка?

33. Запишите формулы, выражающие центральные моменты через начальные.

3 ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Вся информация о случайной величине заключена в ее законе распределения. Поэтому, зная закон распределения случайной величины, можно находить любые вероятности событий, связанных с этой случайной величиной. Некоторые частные виды распределения дискретных и непрерывных случайных величин особенно часто встречаются в прикладных задачах теории вероятностей. Для вычисления их основных числовых характеристик удобно пользоваться готовыми формулами.

3.1 Биномиальное распределение

Пусть выполняются условия схемы Бернулли: в одинаковых условиях производится n независимых испытаний, в результате каждого из которых может появиться событие A с вероятностью p или противоположное событие $\overline{A}$ с вероятностью q $(q = 1 - p)$.

Через X обозначим число наступлений события A в серии из n опытов.

Дискретная случайная величина X называется распределенной по ***биномиальному закону***, если вероятности ее возможных значений $0, 1, \ldots, n$ можно вычислять по формуле Бернулли:

$$P(X = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{3.1.1}$$

где $k = 0, 1, \ldots, n.$

Постоянные n и p называются ***параметрами*** биномиального распределения.

Биномиальная случайная величина X имеет ряд распределения:

$X = x_i$	0	1	2	$\ldots$	n
$P(X = x_i)$	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	$\ldots$	p^n

Числовые характеристики для биномиального распределения:

$$M(X) = np, \tag{3.1.2}$$

$$D(X) = npq, \tag{3.1.3}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{npq}. \tag{3.1.4}$$

Пример 1. В урне 1 белый и 3 черных шара. Из урны извлекают шар три раза подряд, причем каждый раз вынутый шар возвращают в урну и шары перемешивают. Случайная величина X равна числу извлеченных белых шаров. Составить закон распределения этой случайной величины; найти математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Дискретная случайная величина X – число извлеченных белых шаров, имеет биномиальное распределение и может принимать следующие значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. Вероятность появления белого шара в каждом извлечении равна $p = 1/4 = 0{,}25$, значит $q = 3/4 = 0{,}75$.

Найдем вероятности этих возможных значений по формуле Бернулли:

$$P(X=0) = P_3(0) = C_3^0 \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^3 = 27/64;$$

$$P(X=1) = P_3(1) = C_3^1 \cdot 0{,}25^1 \cdot 0{,}75^2 = 27/64;$$

$$P(X=2) = P_3(2) = C_3^2 \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^1 = 9/64;$$

$$P(X=3) = P_3(3) = C_3^3 \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^0 = 1/64.$$

Напишем искомый закон распределения

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	27/64	27/64	9/64	1/64

Найдем числовые характеристики по формулам (2.4.1) и (2.4.12):

$$M(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 0 \cdot 27/64 + 1 \cdot 27/64 + 2 \cdot 9/64 + 3 \cdot 1/64 = 3/4,$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i - \left(M(X)\right)^2 = 0^2 \cdot 27/64 + 1^2 \cdot 27/64 + 2^2 \cdot 9/64 + 3^2 \cdot 1/64 -$$

$$-(3/4)^2 = 9/16;$$

или по формулам (3.1.2) и (3.1.3):

$$M(X) = np = 3 \cdot 1/4 = 3/4, \quad D(X) = npq = 3 \cdot 1/4 \cdot 3/4 = 9/16.$$

ЗАДАЧИ

3.1.1 Вероятность попадания в мишень в одном выстреле равна $p = 0{,}6$. Сделано 100 выстрелов. Пусть X – число попаданий. Найти $M(X)$, $D(X)$.

3.1.2 Шестигранную игральную кость выбрасываем 30 раз. Случайная величина X – число выпавших шестёрок. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

3.1.3 Наудачу выбраны 10 человек. Найти числовые характеристики числа людей из этих 10 человек, которые родились в мае.

3.1.4 Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение следующих случайных величин:

а) числа гербов при выбрасывании 20 монет;

б) числа попадания в мишень из 50 выстрелов, если вероятность попадания в одном выстреле равна $p = 0{,}6$;

в) числа точек, попавших на отрезок [3; 7] при выбрасывании наудачу 30 точек на отрезок [1; 15].

3.1.5 По данным ОТК на сотню металлических брусков, заготовленных для обработки, приходится 30 с зазубринами. Записать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа брусков с зазубринами среди случайно взятых 4 брусков. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

3.1.6 В планово-экономическом отделе предприятия имеется 4 компьютера. Вероятность работы одного компьютера без ремонта в течение месяца составляет 0,9. Записать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X числа компьютеров в отделе, проработавших в течение месяца без ремонта. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

3.1.7 20 % изделий, выпускаемых данным предприятием, нуждаются в дополнительной регулировке. Наудачу отобрано 150 изделий. Найти среднее значение и дисперсию случайной величины X – числа изделий в выборке, нуждающихся в регулировке.

3.1.8 Найти среднее число лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 20 билетов, а вероятность выигрыша одного билета равна 0.1. Найти дисперсию числа успехов в данном опыте.

3.1.9 Проводятся 3 независимых испытания, в каждом из которых вероятность наступления некоторого события A постоянна и равна *p*. Пусть X – число появления события A в этом опыте. Найти $D(X)$, если известно, что $M(X) = 2{,}1$.

3.1.10 Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,4. Сколько надо произвести выстрелов, чтобы можно было ожидать в среднем 80 попаданий в цель?

3.1.11 Контрольная работа по теории вероятности состоит из 6 задач. Вероятность решить правильно каждую задачу для данного студента равна 0,7. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X – числа правильно решенных задач.

3.1.12 Известно, что: среднее число попаданий в мишень в серии из *n* выстрелов равно 192; вероятность попадания при каждом выстреле равна *p*; $\sigma(X) = 8$, где X – число попаданий. Найти *n* и *p*.

3.1.13 В боевой операции участвуют 30 самолетов. Вероятность гибели самолета в результате обстрела противником равна 1/15. Найти $M(X)$ и $\sigma(X)$, где X – число сбитых самолетов.

3.1.14 Успеваемость студентов 1 курса составляет 80 %. Найти математическое ожидание и дисперсию числа успевающих студентов среди 50 наудачу отобранных первокурсников.

3.1.15 Вероятность приема радиосигнала при каждой передаче равна 0,86. Найти среднее число приемов радиосигнала при пятикратной передаче сигнала.

3.2 Закон Пуассона (закон редких событий)

Пусть выполняются условия схемы Бернулли при большом числе испытаний *n* и малом значении вероятности *p*.

Дискретная случайная величина X, представляющая собой число появлений случайного события *A* в этих *n* испытаниях, называется распределенной по ***закону Пуассона***, если вероятности ее возможных значений $0, 1, 2, 3, \ldots$ (счетное множество значений) можно вычислять по формуле Пуассона:

$$P(X = k) = P_n(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, \qquad (3.2.1)$$

где $k = 0,1,2,...$ и $\lambda = np$ – параметр распределения.

Случайная величина X имеет ряд распределения:

$X = x_i$	0	1	2	3	…	k	…
$P(X = x_i)$	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 \cdot e^{-2}}{2!}$	$\frac{\lambda^3 \cdot e^{-3}}{3!}$	…	$\frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$	…

Условие нормировки при этом следует из разложения экспоненты в ряд Тейлора:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

Числовые характеристики распределения Пуассона:

$$M(X) = \lambda, \qquad (3.2.2)$$

$$D(X) = \lambda, \qquad (3.2.3)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\lambda}. \qquad (3.2.4)$$

Распределение Пуассона является предельным для биномиального и приближенно заменяет биномиальное распределение в случае, когда число испытаний *n* велико, а вероятность *p* появления события в каждом испытании очень мала.

Примеры дискретных случайных величин, распределенных по закону Пуассона: число вызовов на телефонной станции за время t; число опечаток в большом тексте; число бракованных деталей в большой партии; число α-частиц, испускаемых радиоактивным источником, и т. д. При этом считается, что события появляются независимо друг от друга с постоянной средней интенсивностью, характеризующейся параметром $\lambda = np$.

Пример 1. Случайная величина X распределена по закону Пуассона. Найти $P(X = 3)$, если $\lambda = 4$, а также математическое ожидание и дисперсию величины X.

Решение. По формуле (3.2.1) находим $P(X=3)=\frac{4^3}{3!}e^{-4}=0{,}1952$. Согласно формулам (3.2.2) и (3.2.3) получаем $M(X)=4$, $D(X)=4$.

Пример 2. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 минуты равна $p=0{,}002$. Найти вероятность того, что в течение 1 минуты обрыв произойдет более чем на трех веретенах.

Решение. В соответствии с условием имеем: $n=1000$, $p=0{,}002$. Распределение Пуассона приближенно заменяет биномиальное распределение в случае, когда число испытаний $n=1000$ велико, а вероятность $p=0{,}002$ появления события в каждом испытании очень мала и $\lambda=np=2$ – среднее число появлений события в n испытаниях.

Пусть X – число обрывов нити за 1 минуту. Тогда

$$P_n(X>3)=1-P_n(X\le 3)=1-P_n(0)-P_n(1)-P_n(2)-P_n(3).$$

Применяя формулу (3.2.1), находим

$$P_n(X>3)\approx 1-e^{-2}\frac{2^0}{0!}-e^{-2}\frac{2^1}{1!}-e^{-2}\frac{2^2}{2!}-e^{-2}\frac{2^3}{3!}=0{,}1428.$$

ЗАДАЧИ

3.2.1 Случайная величина X распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda=0{,}324$. Найти математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение величины X. (Ответ: 0,324; 0,569)

3.2.2 Производятся независимые испытания, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью $p=0{,}002$. Какова вероятность того, что при 1000 испытаниях событие A появится 5 раз? (Ответ: 0,0361)

3.2.3 Производятся независимые испытания, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью $p=0{,}0015$. Какова вероятность того, что при 2000 испытаниях событие A появится 3 раза? (Ответ: 0,2242)

3.2.4 Вероятность изготовления нестандартной детали $p=0{,}004$. Найти вероятность того, среди 1000 деталей окажется 5 нестандартных. (Ответ: 0,1562)

3.2.5 Известно, что в принятой для сборки партии из 1000 деталей имеется 4 дефектных. Найдите вероятность того, что среди 50 наугад взятых деталей нет дефектных. (Ответ: 0,8187)

3.2.6 Производятся независимые испытания, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью $p=0{,}001$. Какова вероятность того, что при 2000 испытаниях событие A появится не менее двух и не более четырех раз? (Ответ: 0,541)

3.2.7 Завод отправил на базу 500 качественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,002. Какова вероятность того, что среди 500 изделий в пути будет повреждено: а) ровно 3 изделия; б) ровно 1 изделие; в) не более трех изделий; г) более трех изделий?

3.2.8 Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найдите вероятность того, что магазин получит: а) хотя бы одну; б) менее 2; в) ровно 2; г) более 2 разбитых бутылок. (Ответ: а) 0,0631; б) 0,3679; в) 0,9810; г) 0,0190)

3.2.9 Радиоаппаратура состоит из 1000 элементов. Вероятность отказа одного элемента в течение одного года работы равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Какова вероятность отказа двух элементов? Какова вероятность отказа не менее двух элементов за год? (Ответ: 0,1831; 0,2642)

3.2.10 Коммутатор обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение одной минуты абонент позвонит на коммутатор, равна 0,01. Найти вероятность того, что в течение одной минуты позвонят: а) ровно 3 абонента; б) менее трех абонентов; в) более трех абонентов; г) хотя бы один абонент. (Ответ: а) 0,0613; б) 0,9177; в) 0,019; г) 0,6321)

3.2.11 Проверяется партия из 10000 изделий. Вероятность того, что изделие окажется бракованным, равна 0,002. Найти математическое ожидание и дисперсию числа бракованных изделий в этой партии. Найти вероятность того, что в партии есть хотя бы одно бракованное изделие. (Ответ: 20; 19,96; ≈ 1)

3.2.12 Вероятность того, что частица, вылетевшая из радиоактивного источника, будет зарегистрирована счетчиком, равна 0,0001. За время наблюдения из источника вылетело 30000 частиц. Найти вероятность того, что счетчик зарегистрировал: а) ровно 3 частицы; б) ни одной частицы; в) не менее 10 частиц. (Ответ: а) 0,2240; б) 0,0498; в) 0,0011)

3.2.13 Аппаратура содержит 3000 одинаково надежных элементов, вероятность отказа которых равна 0,001. Какова вероятность отказа аппаратуры, если он наступает при отказе хотя бы одного элемента? (Ответ: 0,95)

3.2.14 Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,015. Сделано 600 выстрелов. Какова вероятность того, что число попаданий не менее 7 и не более 10? (Ответ: 0,381)

3.2.15 Сообщение содержит 1000 символов. Вероятность искажения одного символа равна 0,004. Найти среднее число искаженных символов; найти вероятность того, что будет искажено не более 3 символов. (Ответ: 4; 0,433)

3.3 Равномерное распределение

Непрерывная случайная величина X называется распределенной по ***равномерному закону*** на промежутке $[a;b]$, если плотность распределения вероятностей сохраняет постоянное значение на этом промежутке и имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<a;\\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{если } a\le x\le b;\\ 0, & \text{если } x>b.\end{cases} \tag{3.3.1}$$

Функция распределения равномерно распределенной случайной величины X имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } a< x\le b;\\ 1, & \text{если } x>b.\end{cases} \tag{3.3.2}$$

Числовые характеристики для равномерного распределения:

$$M(X)=\frac{a+b}{2}, \tag{3.3.3}$$

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}, \tag{3.3.4}$$

$$\sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \tag{3.3.5}$$

Вероятность попадания равномерно распределенной случайной величины на интервал $(\alpha;\beta)\subset[a;b]$ выражается формулой:

$$P(\alpha<x<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\frac{\beta-\alpha}{b-a}. \tag{3.3.6}$$

С равномерным распределением встречаются всякий раз, когда по условиям опыта величина X принимает значения в конечном промежутке $[a;b]$. Все значения из этого промежутка возможны в одинаковой степени, причем ни одно из значений не имеет преимуществ перед другими. Например, время ожидания пассажиром транспорта, курсирующего с определенным интервалом; ошибка округления числа до целого; ошибка отсчета показаний стрелочного прибора распределена равномерно на отрезке, равном цене деления.

Пример 1. Известно, что передатчик может начать работу в любой момент времени между 12 и 14 часами. Какова вероятность того, что начало передачи придется ждать не более 15 минут?

Решение. Пусть X – время начала работы передатчика в часах. Поскольку передача может начаться в любой момент между 12 и 14 часами и все моменты равновозможны, следует считать, что X – случайная величина, равномерно распределенная в промежутке [12; 14]. Тогда ее плотность распределения вероятностей примет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<12;\\ \dfrac{1}{14-12}=\dfrac{1}{2}, & \text{если } 12\le x\le 14;\\ 0, & \text{если } x>14.\end{cases}$$

Искомую вероятность находим по формуле (3.3.6)

$$P(12<X<12{,}25)=\int\limits_{12}^{12,25}0{,}5dx=0{,}5x\Big|_{12}^{12,25}=0{,}5\cdot(12{,}25-12)=0{,}125.$$

При этом учтено, что 15 мин = 0,25 ч.

Пример 2. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 ампера. Показания амперметра округляются до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,03 ампера. Найти математическое ожидание, дисперсию ошибки округления отсчета и функцию $f(x)$.

Решение. Ошибку округления отсчета можно считать распределенной равномерно на [0; 0,1], т.е. a=0, b=0,1. Тогда ее плотность распределения вероятностей примет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0;\\ \dfrac{1}{0{,}1-0}=10, & \text{если } 0\le x\le 0{,}1;\\ 0, & \text{если } x>0{,}1.\end{cases}$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию ошибки округления:

$$M(X)=\frac{a+b}{2}=\frac{0+0{,}1}{2}=0{,}05, D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(0{,}1-0)^2}{12}=\frac{0{,}01}{12}=0{,}0008.$$

Вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,03 ампера:

$$P(0{,}03<X<0{,}07)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}=\frac{0{,}07-0{,}03}{0{,}1-0}=\frac{0{,}04}{0{,}1}=0{,}004.$$

ЗАДАЧИ

3.3.1 Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [−2; 10]. Найти $M(X), D(X)$.

3.3.2 Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [10; 12]. Найти $M(X), D(X)$.

3.3.3 Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [2; 4]. Найти $M(X), D(X)$.

3.3.4 Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [a; a+6], причем $M(X)=8$. Найти число a.

3.3.5 Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [a; a+4], причем $M(X)=6$. Найти число a.

3.3.6 Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [1; b], причем $D(X)=3$. Найти b.

3.3.7 Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [a; b], причем $D(X)=1/3$, $P(10 \le X \le 20)=0{,}5$, $P(5 \le X \le 15)=1$. Найти числа a, b.

3.3.8 Случайная величина X распределена равномерно, причем $M(X)=3$. Функция плотности вероятностей $f(x)$ принимает значения 0 и 0,5. Найти дисперсию $D(X)$.

3.3.9 Случайная величина X имеет равномерное распределение на [3; 5]. Найти дифференциальную и интегральную функцию распределения, построить их графики, найти математическое ожидание, дисперсию и $P(2<X<4)$.

3.3.10 Некто ожидает телефонный звонок между 19.00 и 20.00. Время ожидания звонка есть непрерывная случайная величина X, имеющая равномерное распределение на отрезке [19, 20]. Найти вероятность того, что звонок поступит в промежутке от 19 часов 22 минут до 19 часов 46 минут.

3.3.11 Случайная величина X – отклонение емкости конденсатора от номинала распределена равномерно на отрезке [-50, 50]. Найти плотность распределения и функцию распределения, найти математическое ожидание и дисперсию, $P(10<X<30)$.

3.3.12 Маршрутное такси ходит строго по расписанию с интервалом 5 минут. К остановке подошел пассажир. Время ожидания такси есть равномерно распределенная случайная величина. Записать ее плотность и функцию распределения. Найти математическое ожидание, дисперсию и вероятность того, что пассажир будет ожидать такси менее одной минуты.

3.4 Показательное (экспоненциальное) распределение. Функция надежности

Непрерывная случайная величина X называется распределенной по ***показательному (экспоненциальному) закону***, если ее плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f(x)=\begin{cases} 0, & если\ x<0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & если\ x \ge 0, \end{cases} \qquad (3.4.1)$$

где $\lambda > 0$ – параметр распределения.

Функция распределения такой случайной величины имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & если\ x<0; \\ 1-e^{-\lambda x}, & если\ x \ge 0. \end{cases} \qquad (3.4.2)$$

Числовые характеристики показательного распределения:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}, \qquad (3.4.3)$$

$$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}, \qquad (3.4.4)$$

$$\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}. \qquad (3.4.5)$$

Вероятность того, что случайная величина, распределенная по показательному закону, попадет в интервал $(\alpha;\beta)\subset[0;+\infty)$, выражается формулой

$$P(\alpha<x<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=(1-e^{-\lambda\beta})-(1-e^{-\lambda\alpha})=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta} \qquad (3.4.6)$$

Примеры непрерывных случайных величин, распределенных по показательному закону: длительность работы прибора до первого отказа; длительность времени обслуживания в системе массового обслуживания; продолжительность телефонного разговора; срок службы радиоэлектронной аппаратуры; время ожидания при техническом обслуживании; длина пути молекулы между двумя последовательными столкновениями с другими молекулами; время обнаружения цели локатором.

Показательное распределение широко используется для расчета надежности различных систем (радиотехнических, электрических, механических и т. п.). Под надежностью понимается способность системы не отказывать в работе. Оказывается, время безотказной работы системы со случайными отказами имеет показательный закон распределения. Количественной характеристикой надежности является функция надежности $R(t)$, равная вероятности безотказной работы системы за время от 0 до t. Известно, что если в системе происходят только случайные отказы, то функция надежности имеет вид

$$R(t)=e^{-\lambda t}, \qquad (3.4.7)$$

где $\lambda=1/t_{cp}$, t_{cp} – среднее время безотказной работы системы.

Пример 1. Случайная величина X – время работы радиолампы имеет показательное распределение. Найти вероятность того, что лампа проработает не менее 800 часов, если среднее время работы радиолампы 400 часов?

Решение. Так как $M(X)=400$, то по формуле (3.4.3) $\lambda=1/400$.

Тогда искомая вероятность

$$P(X\ge 800)=1-P(X<800)=1-F(800)=1-(1-e^{-\frac{800}{400}})=e^{-2}\approx 0{,}135.$$

Пример 2. Время исполнения заказа на ремонт телеаппаратуры имеет показательный закон распределения со средним временем исполнения в 5 суток. Какова вероятность того, что сданный в мастерскую телевизор починят не ранее чем через 4 суток?

Решение. Случайная величина X – время исполнения заказа. Так как по формуле (3.4.6) $P(0<X<4)=e^{-\frac{1}{5}\cdot 0}-e^{-\frac{1}{5}\cdot 4}=1-e^{-\frac{4}{5}}\approx 0{,}55$, то искомая вероятность

$$P(X>4)=1-P(0<X<4)=1-0{,}55=0{,}45.$$

Пример 3. Время ожидания в очереди имеет показательный закон распределения со средним временем ожидания 20 мин. Какова вероятность того, что покупатель потратит на покупку не менее 10 и не более 15 мин?

Решение. Случайная величина X – время ожидания в очереди. Так как $M(X)=1/3$ (20 мин = 20/60 ч = 1/3 ч), то по формуле (3.4.3) $\lambda=3$. По формуле (3.4.6) искомая вероятность

$$P\left(\frac{1}{6}<X<\frac{1}{4}\right)=e^{-3\cdot\frac{1}{6}}-e^{-3\cdot\frac{1}{4}}\approx 0{,}134.$$

Пример 4. Устройство состоит из двух последовательно соединенных независимо работающих блоков. Зная, что среднее время безотказной работы для первого и второго блоков составляет соответственно 200 ч, 150 ч, найти вероятность безотказной работы устройства в течение 100 часов.

Решение. Найдем функции надежности для каждого блока. Учитывая, что $t_{cp1}=200\,ч$, $t_{cp2}=150\,ч$, имеем согласно (3.4.7) $R_1(t)=e^{-\frac{t}{t_{cp1}}}=e^{-\frac{t}{200}}$ и $R_2(t)=e^{-\frac{t}{t_{cp2}}}=e^{-\frac{t}{150}}$.

Находим вероятности безотказной работы каждого блока в течение 100 часов. Получаем $p_1=R_1(100)=e^{-\frac{1}{2}}\approx 0{,}607$, $p_2=R_2(100)=e^{-\frac{2}{3}}\approx 0{,}513$. Значит, вероятность работы всего устройства равна

$$p_1\cdot p_2=0{,}607\cdot 0{,}513\approx 0{,}311.$$

Пример 5. Испытываются два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы первого элемента имеет показательное распределение $F_1(t)=1-e^{-0{,}02t}$, второго $F_2(t)=1-e^{-0{,}05t}$, t – время в часах. Найти вероятность того, что за 6 часов: а) оба элемента откажут; б) оба элемента не откажут; в) только один элемент откажет; г) хотя бы один элемент откажет.

Решение. Пусть A_i – событие, состоящее в безотказной работе i-го элемента в течение 6 часов ($i=1,2$). Найдем вероятность безотказной работы элементов в течение 6 часов:

$$P(A_1)=F_1(6)=1-e^{-0{,}02\cdot 6}=1-e^{-0{,}12}\approx 0{,}113,$$

$$P(A_2)=F_2(6)=1-e^{-0{,}05\cdot 6}=1-e^{-0{,}3}\approx 0{,}259.$$

Тогда вероятности отказа в течение 6 часов первого и второго элементов составят соответственно

$$P(\overline{A}_1)=1-P(A_1)=1-0{,}113=0{,}887 \text{ и } P(\overline{A_2})=1-P(A_2)=1-0{,}259=0{,}741.$$

а) Вероятность отказа двух независимо работающих элементов составит по теореме умножения

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)=0{,}887\cdot 0{,}741\approx 0{,}657.$$

б) Вероятность безотказной работы двух независимо работающих элементов по теореме умножения

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}113 \cdot 0{,}259 \approx 0{,}029 .$$

в) Вероятность отказа только одного элемента

$$P(A_1 \overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2) = 0{,}113 \cdot 0{,}741 + 0{,}887 \cdot 0{,}259 \approx 0{,}313.$$

г) Вероятность отказа хотя бы одного элемента

$$P(A_1 \overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2 + \overline{A}_1 \overline{A}_2) = 1 - P(A_1 A_2) = 1 - 0{,}029 = 0{,}971 .$$

ЗАДАЧИ

3.4.1 Случайная величина X распределена по показательному закону $f(x) = 0$ при $x < 0$; $f(x) = 2e^{-2x}$ при $x \ge 0$. Найти вероятность попадания значений величины X в интервал (0,1; 0,7). (Ответ: 0,572)

3.4.2 Случайная величина X распределена по показательному закону $f(x) = 0$ при $x < 0$; $f(x) = 3e^{-3x}$ при $x \ge 0$. Найти вероятность попадания значений величины X в интервал (0,1;1). (Ответ: 0,691)

3.4.3 Математическое ожидание показательно распределенной случайной величины X равно $M(X) = 5$. Найти вероятность $P(X < 5)$. (Ответ: 0,632)

3.4.4 Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 0{,}4$. Найти вероятность попадания значений случайной величины X в интервал (0,25; 5). (Ответ: 0,77)

3.4.5 Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 4$. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем $M(X)$. (Ответ: 0,632)

3.4.6 Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 5$. Найти $M(X)$ и $P(|X - M(X)| < 3\sigma(X))$. (Ответ: 0,2; 0,98)

3.4.7 90 % лампочек перегорают после 800 часов работы. Найти вероятность того, что лампочка перегорит в промежутке от 100 до 200 часов работы (Случайная величина X – время безотказной работы лампочки). (Ответ: 0,108)

3.4.8 Случайная величина X, которая равна длительности работы элемента, имеет плотность распределения $f(t) = 0{,}003e^{-0{,}003 \cdot t}$, $t \ge 0$. Найти среднее время работы элемента; вероятность того, что элемент проработает не менее 400 часов. (Ответ: 333,(3); 0,30)

3.4.9 Средняя продолжительность телефонного разговора равна 3 минуты. Найти вероятность того, что произвольный телефонный разговор будет продолжаться не более 9 минут, считая, что время разговора является случайной величиной X, распределенной по показательному закону. (Ответ: 0,95)

3.4.10 Время обнаружения цели радиолокатором распределено по показательному закону, причем $1/\lambda = 10$ с – среднее время обнаружения цели. Найти вероятность того, что цель будет обнаружена за время от 5 до 15 с после начала поиска. (Ответ: 0,383)

3.4.11 Две электрические лампочки включены последовательно. Время работы каждой лампы имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0{,}004/ч$. Найти вероятность того, что в течение 100 часов лампы будут гореть. (Ответ: 0,449)

3.4.12 Время ожидания у бензоколонки является случайной величиной X, распределенной по показательному закону со средним временем ожидания 15 минут. Найти вероятность события $A = (5 \text{ мин} < X < 7{,}5 \text{ мин})$. (Ответ: 0,11)

3.4.13 Время t телефонного разговора – случайная величина, распределенная по показательному закону с параметром $\lambda = 0{,}4$ мин. Найти вероятность того, что разговор будет продолжаться более трех минут. (Ответ: 0,435)

3.4.14 98 % топливных насосов дизельных тракторов выходит из строя после 3000 моточасов. Какова вероятность того, что насос выйдет из строя в интервале времени от 2000 до 2500 моточасов?

3.4.15 P%-м ресурсом элемента называется такое число $t = 20$, что за время t элемент не выходит из строя с вероятностью P. Считается, что время t непрерывной работы электрической лампочки распределено по показательному закону. Найти вероятность того, что лампочка будет гореть в течение 2 лет, если ее 90%-й ресурс составляет 6 месяцев. (Ответ: 0,656)

3.4.16 Линия связи состоит из двух каналов, основного и дублирующего. Моменты отказов каналов являются независимыми, показательно распределенными случайными величинами с параметрами $\lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}05$. Найти вероятность того, что линия связи будет исправно работать до момента времени $t = 20$. (Ответ: 0,603)

3.4.17 Испытываются два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение со средним значением для 1-го элемента 20 часов, 2-го – 25 часов. Найти вероятность того, что за промежуток времени длительностью 10 часов: а) оба элемента будут работать; б) откажет только один элемент; в) хотя бы один элемент откажет. (Ответ: а) 0,130; б) 0,464; в) 0,870)

3.4.18 Для надежности схемы устанавливаются n параллельно соединенных и независимо работающих элементов, моменты отказов за единицу времени которых распределены по экспоненциальному закону с параметром $\lambda = 0{,}05$. Сколько нужно поставить таких элементов, чтобы с вероятностью 0,99 схема безотказно работала в течение времени $t = 10$ (ед. времени)? (Ответ: 10)

3.4.19 На новогодней елочке висит гирлянда из 10 последовательно соединенных разноцветных лампочек. Моменты сгорания каждой из них являются независимыми, показательно распределенными величинами с равными параметрами $\lambda = 0{,}01$, при этом время измеряется в часах. Найти среднее время работы гирлянды. (Ответ: 10 часов)

3.4.20 Устройство состоит из трех независимо работающих блоков; его функциональная схема изображена на рисунке ниже. Зная, что среднее время безотказной работы 1, 2, 3 блоков соответственно равно 500 ч, 800 ч, 1000 ч, найти вероятность безотказной работы устройства в течение 1500 часов. (Ответ: 0,375)

3.5 Нормальное распределение (Закон Гаусса)

Непрерывная случайная величина X называется ***нормально распределенной (распределенной по закону Гаусса)***, если ее плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{3.5.1}$$

где a, σ – параметры распределения.

Функция распределения нормально распределенной случайной величины представляется интегралом, не выражаемым через элементарные функции:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt. \tag{3.5.2}$$

Этот «неберущийся» интеграл удобно выразить через табулированную функцию Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \tag{3.5.3}$$

Именно

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi(\frac{x-a}{\sigma}). \tag{3.5.4}$$

Приближенное значение функции Лапласа $\Phi(x)$ берется из таблиц. Кроме того, эта функция обладает свойством: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ и если $x > 5$, то $\Phi(x) \approx 0{,}5$.

Числовые характеристики нормального распределения:

$$M(X) = a, \tag{3.5.5}$$

$$D(X) = \sigma^2, \tag{3.5.6}$$

$$\sigma(X) = \sigma. \tag{3.5.7}$$

Вероятность того, что нормально распределенная случайная величина попадет в интервал $(\alpha; \beta)$, выражается формулой

$$P(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma}). \tag{3.5.8}$$

Если $\alpha = a - \delta$, $\beta = a + \delta$, где δ – произвольное число, то

$$P(|x-a| < \delta) = P(a - \delta < x < a + \delta) = \Phi(\frac{\delta}{\sigma}) - \Phi(-\frac{\delta}{\sigma}) = 2\Phi(\frac{\delta}{\sigma}). \tag{3.5.9}$$

При $\delta = 3\sigma$ получаем

$$P(a - 3\sigma < x < a + 3\sigma) = 2\Phi(3) \approx 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973.$$

Правило трех сигм. Если случайная величина подчинена нормальному закону, то вероятность ее отклонения от математического ожидания больше трех средних квадратичных ошибок, близка к нулю ($p = 0{,}0027$). Или практически достоверно, что нормальная случайная величина принимает значения в интервале $[a - 3\sigma; a + 3\sigma]$, так как $p = 0{,}9973$.

На практике многие случайные величины распределены нормально или почти нормально. Примеры непрерывных случайных величин, распределенных по нормальному закону: ошибки измерений физических величин; ошибки стрельбы, наведения; отклонение напряжения в сети от номинала; величины износа деталей в механизмах; урожайность сельскохозяйственной культуры с 1 га; величина шума в радиоприемном устройстве; производительность труда; колебания курса акций; суммарная выплата страхового общества за большой период; дальность полета снаряда; частота события при большом числе опытов; масса вылавливаемой рыбы одного вида; рост мужчин (женщин) одного возраста и национальности.

Пример 1. Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем *M(X)*=10, *D(X)*=4. Найти $P(12 < X < 14)$, $P(8 < X < 12)$, $P(X > 12)$.

Решение. Из условия следует, что $a = 10$, $\sigma = \sqrt{D(X)} = 2$. В соответствии с формулой (3.5.8) находим

$$P(12 < X < 14) = \Phi(\frac{14-10}{2}) - \Phi(\frac{12-10}{2}) = \Phi(2) - \Phi(1) \approx 0{,}1359,$$

$$P(8 < X < 12) = \Phi(\frac{12-10}{2}) - \Phi(\frac{8-10}{2}) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) \approx 0{,}6827,$$

$$P(12 < X < \infty) = \Phi(\infty) - \Phi(\frac{12-10}{2}) = \Phi(\infty) - \Phi(1) \approx 0.5 - \Phi(1) \approx 0{,}1587$$

Пример 2. Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X) = 10$. Найти $P(0 < X < 10)$, если известно $P(10 < X < 20) = 0.3$.

Решение. При нахождении искомой вероятности будем пользоваться формулой (3.5.8), условием $a = 10$, нечетностью функции Лапласа.

По условию $P(10 < X < 20) = 0.3$, поэтому

$$P(10 < X < 20) = \Phi\left(\frac{20-10}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{10-10}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - \Phi(0) = \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - 0 =$$

$$= \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0{,}3.$$

Так как $P(0 < X < 10) = \Phi\left(\frac{10-10}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{0-10}{\sigma}\right) = \Phi(0) - \Phi\left(\frac{0-10}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)$

и $\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0{,}3$, то $P(0 < X < 10) = 0{,}3$.

Пример 3. Станок-автомат изготавливает валики, контролируя их диаметры X. Считая, что случайная величина X распределена нормально, с параметрами $a = 10$ мм, $\sigma = 0{,}1$ мм, найти интервал, в котором с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры изготовленных валиков.

Решение. Воспользуемся формулой (3.5.9). В данном случае известно $a = 10$, $\sigma = 0{,}1$, $2\Phi(\delta/\sigma) = 0{,}9973$; требуется определить δ и интервал $(a - \delta; a + \delta)$.

По таблице значений функции Лапласа находим, что $\delta/\sigma = 3$. Это вытекает из равенства $\Phi(\delta/\sigma) = 0{,}9973/2 = 0{,}4987$.

Следовательно, $\delta = 3\sigma = 3 \cdot 0{,}1 = 0{,}3$. Из неравенства $|X - 10| < 0{,}3$ получаем $9{,}7 < X < 10{,}3$. Значит, искомым является интервал (9,7; 10,3).

ЗАДАЧИ

3.5.1 Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X) = 1$, $D(X) = 4$. Найти $P(3 < X < 5)$. (Ответ: 0,1359)

3.5.2 Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X) = 3$, $D(X) = 1$. Найти $P(2 < X < 5)$. (Ответ: 0,8186)

3.5.3 Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X) = 3$, $D(X) = 4$. Найти $P(-1 < X < 5)$, $P(X \le 8)$, $P(X \ge 5)$, $P(-3 < X < 9)$. (Ответ: 0,8185; 0,9938; 0,1587; 0,9972)

3.5.4 Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X) = 25$. Найти $P(35 < X < 40)$, если известно $P(10 < X < 15) = 0{,}2$. (Ответ: 0,2)

3.5.5 Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X) = 10$. Найти $P(9 < X < 10)$, если известно $P(5 < X < 15) = 0{,}8$. (Ответ: 0,1018)

3.5.6 Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X) = 7$, $D(X) = 16$. Найти $P(|X - 7| \le 2)$. (Ответ: 0,3830)

3.5.7 Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $a = 0$, $\sigma = 0{,}5$. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины X по модулю будет меньше единицы. (Ответ: 0,9544)

3.5.8 Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X) = m$, $\sigma(X) = \sigma$. Чему равно $P(m - \sigma < X < m + \sigma)$, $P(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma)$, $P(m - 3\sigma < X < m + 3\sigma)$? (Ответ: 0,6827; 0,9545; 0,9973)

3.5.9 Процент содержания золы в угле является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием 16 % и среднеквадратичным отклонением 4 %. Определить вероятность того, что в наудачу взятой пробе угля будет от 12 % до 24 % золы. (Ответ: 0,819)

3.5.10 Автомат штампует шарики. Шарик удовлетворяет требованию стандарта качества, если отклонение X диаметра шарика от проектного размера меньше 0,7. Отклонение X − нормальная величина, $\sigma(X)=0{,}4$. Сколько в среднем будет качественных шариков из изготовленных 100 шариков? (Ответ: 92)

3.5.11 Автомат изготавливает подшипники, которые считаются годными, если отклонение X от проектного размера по модулю не превышает 0,77 мм. Каково наиболее вероятное число годных подшипников из 100, если случайная величина X распределена нормально с параметром $\sigma=0{,}4$ мм? (Ответ: 95)

3.5.12 При измерении детали получаются случайные ошибки, подчиненные нормальному закону с параметром $\sigma=10$ мм. Найти вероятность того, что измерение произведено с ошибкой, не превосходящей 15 мм. (Ответ: 0,8664)

3.5.13 Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена нормально с $M(X)=50$ мм. Фактическая длина изготовленных деталей не менее 32 и не более 68 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали: а) более 55 мм; б) менее 40 мм. (Указание: из равенства $P(32<X<68)=1$ найти σ) (Ответ: а) 0,0823; б) 0,0027)

3.5.14 Диаметр изготавливаемой в цехе детали является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами $a=4{,}5$ см, $\sigma=0{,}05$ см. Найти вероятность того, что размер диаметра взятой наугад детали отличается от математического ожидания не более чем на 1 мм. (Ответ: 0,9544)

3.5.15 При взвешивании получается ошибка, подчиненная нормальному закону с параметром $\sigma=20$ г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей 30 г. (Ответ: 0,866)

3.5.16 Вес пойманной рыбы подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $a=375$ г, $\sigma=25$ г. Найти вероятность того, что вес одной рыбы будет: а) от 300 до 425 г; б) не более 450 г; в) больше 300 г. (Ответ: а) 0,9759; б) 0,9987; в) 0,9987)

3.5.17 Вероятность попадания в одном опыте нормальной случайной величины X в интервал (0; 20) равна 0,3. Найти вероятность попадания в интервал (0; 10), если $M(X)=10$. (Ответ: 0,3)

3.5.18 Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X)=10$, $\sigma(X)=5$. Найти интервал $(\alpha;\beta)$, симметричный относительно $M(X)$, такой, что $P(\alpha<X<\beta)=0{,}9973$. (Ответ: (−5; 25)

3.5.19 Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X)=16$, $\sigma(X)=2$. Найти интервал $(\alpha;\beta)$, в котором с вероятностью 0,95 следует ожидать значение случайной величины. (Ответ: (12,08; 19,92))

3.5.20 В результате проверки точности работы прибора установлено, что 80 % ошибок не вышло за пределы ± 20 мм, а остальные ошибки вышли за эти пределы. Определите среднее квадратичное отклонение ошибок прибора, если известно, что систематических ошибок прибор не дает, а случайные ошибки распределены по нормальному закону. (Ответ: 15,6)

ВОПРОСЫ

1. Какое распределение вероятностей называется биноминальным?

2. Как записываются числовые характеристики для биноминального распределения?

3. Запишите биноминальный закон распределения вероятностей случайной величины в виде таблицы.

4. Запишите формулу Пуассона.

5. Чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона?

6. При каких условиях можно применять закон распределения Пуассона?

7. Какой вид имеет плотность распределения $f(x)$ случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[a;b]$?

8. Какой вид имеет функция распределения $F(x)$ случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[a;b]$?

9. Как записываются числовые характеристики для равномерного распределения?

10. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[a;b]$. Как найти вероятность попадания ее значений в интервал $(\alpha;\beta)$, принадлежащий данному отрезку?

11. Как определяется показательное распределение случайной величины?

12. Какой вид имеет функция распределения для показательного закона?

13. Запишите числовые характеристики для показательного закона.

14. Случайная величина X распределена по показательному закону. Запишите вероятность попадания случайной величины в заданный интервал $(\alpha;\beta)$.

15. Какое распределение вероятностей случайной величины называют нормальным?

16. Каков вероятностный смысл параметров a и σ, входящих в уравнение (3.5.1)?

17. Чему равно математическое ожидание и дисперсия нормальной случайной величины.

18. Как вычислить вероятность попадания значений нормальной случайной величины в заданный интервал?

19. Сформулируйте правило трех сигм.

4 ДВУМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

4.1 Закон распределения вероятностей дискретной двумерной случайной величины

Во многих практических задачах результат опыта описывается не одной, а двумя (или более) случайными величинами X и Y. В этом случае говорят о ***двумерной случайной величине*** (X, Y) (**или *системе двух случайных величин***). Геометрически систему двух случайных величин (X, Y) можно интерпретировать как случайную точку на плоскости.

На двумерные случайные величины практически без изменений переносятся основные понятия для одномерных случайных величин, в частности закон распределения, функция распределения, плотность распределения и т. д.

Дискретной называют двумерную величину, составляющие X и Y которой дискретны.

Пусть составляющие X и Y дискретны и имеют соответственно следующие возможные значения: $x_1, x_2, ..., x_n$; $y_1, y_2, ..., y_m$.

Закон распределения случайной величины (X,Y) задаётся формулой

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), \; i = 1,...,n, \; j = 1,...,m \qquad (4.1.1)$$

или с помощью таблицы с двойным входом

Таблица 1

$X \setminus Y$	y_1	y_2	…	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1m}
…	…	…	…	…
x_n	p_{n1}	p_{n2}	…	p_{nm}

где $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$.

В формуле (4.1.1) событие $(X = x_i, \; Y = y_j)$ означает произведение событий $(X = x_i)$ и $(Y = y_j)$.

По таблице 1 составляются ***(безусловные) законы распределения*** случайных величин X и Y:

Таблица 2

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Таблица 3

Y	y_1	y_2	…	y_m
q	q_1	q_2	…	q_m

где $p_i = P(X = x_i) = p_{i1} + p_{i2} + ... + p_{im}$, $i = 1,...,n$ (суммируем по строкам),

$q_j = P(Y = y_j) = p_{1j} + p_{2j} + ... + p_{nj}$, $j = 1,...,m$ (суммируем по столбцам).

Случайные величины X и Y называются ***независимыми,*** если независимы события $(X < x)$ и $(Y < y)$ для любых действительных чисел x и y. В противном случае случайные величины называются ***зависимыми***.

Дискретные случайные величины X и Y независимы тогда и только тогда, когда

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j), \ \forall i = 1,...,n, \ j = 1,...,m. \quad (4.1.2)$$

Условным законом распределения одной из случайных величин, входящих в систему (X, Y), называется закон ее распределения, найденный при условии, что другая случайная величина приняла определенное фиксированное значение (или попала в некий интервал).

Условные вероятности составляющих случайной величины X и Y вычисляются по формулам

$$p(x_i|y_j) = P(X = x_i|Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, \ Y = y_j)}{P(Y = y_j)}, \quad (4.1.3)$$

$$p(y_j|x_i) = P(Y = y_j|X = x_i) = \frac{P(X = x_i, \ Y = y_j)}{P(X = x_i)}. \quad (4.1.4)$$

Условным распределением составляющей X при $Y = y_j$ называется совокупность условных вероятностей

$$p(x_1|y_j), p(x_2|y_j), \ldots, p(x_n|y_j), \quad (4.1.5)$$

записывать которую удобно в виде таблицы $P_{Y=y_j}$

Таблица 4

X	x_1	x_2	…	x_n
$P_{Y=y_j}$	$p(x_1\|y_j)$	$p(x_2\|y_j)$	…	$p(x_2\|y_j)$

Условным распределением составляющей Y при $X = x_i$ называется совокупность условных вероятностей

$$p(y_1|x_i), p(y_2|x_i), \ldots, p(y_m|x_i). \quad (4.1.6)$$

Таблица 5

Y	y_1	y_2	…	y_m
$P_{X=x_i}$	$p(y_1\|x_i)$	$p(y_2\|x_i)$	…	$p(y_m\|x_i)$

Для контроля вычислений целесообразно убедиться, что сумма вероятностей условного распределения равна единице.

Математическим ожиданием случайной величины (X, Y) называется совокупность двух математических ожиданий $M(X)$ и $M(Y)$ (т. е. упорядоченная пара ($M(X)$, $M(Y)$)), определяемых равенствами

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i \, p_{ij} \ \text{ и } \ M(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} y_i \, p_{ij} \, . \quad (4.1.7)$$

Дисперсией случайной величины (X, Y) называется пара

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i-M(X))^2\,p_{ij} \quad \text{и} \quad D(Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y_i-M(Y))^2\,p_{ij}\,. \qquad (4.1.8)$$

Для практических расчётов используют формулы

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i{}^2 p_{ij}-M^2(X) \quad \text{и} \quad D(Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_i{}^2 p_{ij}-M^2(Y) \qquad (4.1.9)$$

Найти $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$ можно также используя (безусловные) распределения компонент X и Y (см. табл. 2 и 3):

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n, \qquad (4.1.10)$$

$$M(Y)=y_1p_1+y_2p_2+...+y_mp_m, \qquad (4.1.11)$$

$$D(X)=x_1{}^2p_1+x_2{}^2p_2+...+x_n{}^2p_n-M^2(X), \qquad (4.1.12)$$

$$D(Y)=y_1{}^2q_1+y_2{}^2q_2+...+y_m{}^2q_m-M^2(Y). \qquad (4.1.13)$$

Математическое ожидание случайной величины $\varphi(X,Y)$, являющейся ***функцией компонент*** случайной величины (X, Y), находится по формуле:

$$M(\varphi(X,Y))=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\varphi(x_i,y_j)\,p_{ij}\,. \qquad (4.1.14)$$

Условным математическим ожиданием случайной величины X при условии $Y=y_j$ называется

$$M\left(X\,|Y=y_j\right)=M\left(X\,|\,y_j\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot p\left(x_1|y_j\right). \qquad (4.1.15)$$

Условным математическим ожиданием случайной величины Y при условии $X=x_i$ называется

$$M\left(Y\,|\,X=x_i\right)=M\left(Y|x_i\right)=\sum_{j=1}^{m}y_j\cdot p\left(y_j|x_i\right). \qquad (4.1.16)$$

Пример 1. Задана таблица распределения дискретной двумерной случайной величины

$X \setminus Y$	1	2	3
1	0,16	0,12	0,08
2	0,28	0,11	0,25

Требуется:

а) найти законы распределения случайных величин X и Y;

б) установить, зависимы или нет компоненты X и Y;

в) найти условные законы распределения случайной величины X при $Y=2$ и случайной величины Y при $X=1$;

г) найти $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$;

д) найти условные математические ожидания $M\left(X\,|Y=2\right)$ и $M\left(Y\,|\,X=1\right)$

.

Решение.

а) Случайная величина X принимает два значения: $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$. Вероятности находим в соответствии с таблицами 2, 3:

$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} = 0{,}16 + 0{,}12 + 0{,}08 = 0{,}36$, $p_2 = 0{,}28 + 0{,}11 + 0{,}25 = 0{,}64$.

Аналогично строим закон распределения Y.

В таблицах получим

X	1	2
1	0,36	0,64

Y	1	2	3
1	0,44	0,23	0,33

б) Используем (4.1.2). Для $i = 1$, $j = 1$ имеем $P(X = x_1, Y = y_1) = p_{11} = 0{,}16$,

$P(X = x_1) = 0{,}36$, $P(Y = y_1) = 0{,}44$, $0{,}16 \neq 0{,}36 \cdot 0{,}44 = 0{,}1584$

Следовательно, условие (4.1.2) не выполнено. Отсюда заключаем, что величины X и Y зависимы.

в) Используем формулы (4.1.3) − (4.1.6).

$$p(y_1|x_1) = \frac{P(X = x_1, Y = y_1)}{P(X = x_1)} = \frac{0{,}16}{0{,}36} = \frac{4}{9},\ p(y_2|x_1) = \frac{0{,}12}{0{,}36} = \frac{3}{9},\ p(y_3|x_1) = \frac{0{,}08}{0{,}36} = \frac{2}{9}.$$

Аналогично строим распределение случайной величины X при $Y = 2$.

В таблицах получим

X	1	2
$P_{Y=2}$	12/23	11/23

Y	1	2	3
$P_{X=1}$	4/9	3/9	2/9

г) Используем формулы (4.1.10)−(4.1.13) и таблицы, построенные в п. а).

$M(X) = 1 \cdot 0{,}36 + 2 \cdot 0{,}64 = 1{,}64$, $M(Y) = 1 \cdot 0{,}44 + 2 \cdot 0{,}23 + 3 \cdot 0{,}33 = 1{,}89$,

$D(X) = 1^2 \cdot 0{,}36 + 2^2 \cdot 0{,}64 - (1{,}64)^2 = 0{,}2304$,

$D(Y) = 1^2 \cdot 0{,}44 + 2^2 \cdot 0{,}23 + 3^2 \cdot 0{,}33 - (1{,}89)^2 = 0{,}7579$,

$\sigma(X) = \sqrt{0{,}2304} = 0{,}48$, $\sigma(Y) = \sqrt{0{,}7579} \approx 0{,}87$.

д) Используем формулы (4.1.15), (4.1.16) и таблицы, построенные в п. в).

$$M(X|Y = 2) = 1 \cdot \frac{12}{23} + 2 \cdot \frac{11}{23} = \frac{34}{23},\ M(Y|X = 1) = 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} + 3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{16}{9}.$$

ЗАДАЧИ

4.1.1 Закон распределения дискретной двумерной случайной величины задан таблицей

X\Y	1	2	3	4
1	0,10	0,15	0,04	0,06
2	0,12	0,08	0,05	0,04
3	0,03	0,02	0,11	D

Найти:

а) значение числа D;

б) законы распределения величин X и Y;

в) вероятности событий $(X = 1, Y \geq 2)$, $(X = Y)$ и $(XY \leq 2)$.

4.1.2 Задано распределение двумерной случайной величины (X, Y)

X\Y	1	1,5	2
1	1/12	1/24	1/24
2	1/12	1/24	1/24
2,5	1/3	1/6	1/6

Найти одномерные распределения компонент системы. Установить, зависимы ли компоненты X и Y. Найти $P(X + Y \le 3{,}5)$.

4.1.3 Используя условие задачи 4.1.1, установить, зависимы или нет случайные величины X и Y.

4.1.4 Закон распределения системы дискретных случайных величин (X, Y) задан таблицей

X\Y	−2	−1	0	1
−1	1/16	2/16	3/16	1/16
0	2/16	3/16	1/16	0
1	0	1/16	0	2/16

Найти:

а) безусловные законы распределения случайных величин X и Y;

б) условный закон распределения случайной величины Y при $X = 0$;

в) проверить независимость случайных величин X и Y.

4.1.5 Используя условие задачи 4.1.4, найти условный закон распределения:

а) случайной величины Y при $X = -1$;

б) случайной величины X при $Y = -2$;

в) случайной величины X при $Y = 0$.

4.1.6 Закон распределения дискретной двумерной случайной величины задан таблицей

$X\backslash Y$	0	1
0	0,12	0,18
1	0,28	0,42

Найти $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$.

4.1.7 Используя условие задачи 4.1.2, найти $M(Y)$, $D(Y)$, $\sigma(Y)$.

4.1.8 Закон распределения системы дискретных случайных величин (X, Y) задан таблицей

$X\backslash Y$	−2	0	2
0,2	0,03	0,05	0,12
0,6	0,15	0,30	0,35

Найти математические ожидания $M(X)$, $M(Y)$ и условные математические ожидания $M(X|\,Y = 2)$, $M(X|\,Y = 0)$, $M(Y|\,X = 0{,}2)$.

4.1.9 Используя условие задачи 4.1.4, найти: $M(Y|\,X = -1)$, $M(X|\,Y = -2)$, $M(X|\,Y = 0)$.

4.1.10 Монету подбрасывают 3 раза. Пусть X − количество гербов, выпавших в 1-м и 2-м испытаниях, Y − количество гербов, выпавших во 2-м и 3-м испытаниях. Найти: совместное распределение случайных величин X и Y; вероятность события $(X = Y)$.

4.1.11 Используя условие задачи 4.1.2, найти:

$$P(X=1\,|\,Y=2),\ P(X=2\,|\,Y=2),\ P(X=2{,}5\,|\,Y=2),\ P\left(\sqrt{X^2+Y^2}\le\sqrt{2}\right).$$

4.1.12 Среди 10 лотерейных билетов есть 2 выигрышных. Сначала девушка вытягивает один билет, затем один билет вытягивает юноша. Описать закон распределения системы случайных величин $(X,\ Y)$, где X − число выигрышных билетов у девушки, Y − у юноши. Найти $P(X>Y)$.

4.1.13 Производят два независимых выстрела по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна p. Пусть X − число попаданий в цель и Y − число промахов. Составить таблицу распределения и найти числовые характеристики $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$ системы (X,Y).

4.1.14 Используя условие задачи 4.1.2, найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

4.2 Функция распределения двумерной случайной величины

Функцией распределения вероятностей (иначе ***интегральной функцией***) двумерной случайной величины называют функцию $F(x,\ y)$, которая для любых действительных чисел x и y равна вероятности совместного выполнения двух событий $(X<x)$ и $(Y<y)$, то есть

$$F(x,y)=P(X<x,\ Y<y). \qquad (4.2.1)$$

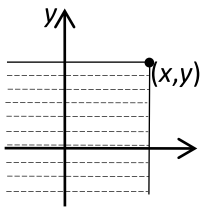


Рисунок 8

Геометрически это равенство можно истолковать так: каждое значение функции $F(x,y)$ равно вероятности попадания случайной точки (X,Y) в бесконечный квадрант с вершиной $(x,\ y)$, расположенный левее и ниже этой вершины (см. рис. 8).

Вероятность попадания случайной точки (X,Y) в прямоугольник D со сторонами, параллельными координатным осям, находится по формуле:

$$P\left(x_1\le X\le x_2,\ y_1\le Y\le y_2\right)=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1). \qquad (4.2.2)$$

Свойства двумерной функции распределения

1. $0\le F(x,y)\le 1$.

2. $F(x,y)$ не убывает по каждому из своих аргументов:

$F(x_2,y)\ge F(x_1,y)$, если $x_2>x_1$ и y − фиксировано,

$F(x,y_2)\ge F(x,y_1)$, если $y_2>y_1$ и x − фиксировано.

3. $F(x,y)$ непрерывна слева по каждому из своих аргументов.

4. $F(x,-\infty)=F(-\infty,y)=F(-\infty,-\infty)=0$, где, например,

$F(x,-\infty)=\lim\limits_{y\to-\infty}F(x,y)$.

5. $F(+\infty,+\infty)=1$.

6. $F(x,+\infty)=F_1(x),\ F(+\infty,y)=F_2(y)$, где $F_1(x),\ F_2(y)$ − функции распределения составляющих случайной величины X и Y соответственно.

7. Случайные величины X и Y независимы тогда и только тогда, когда $F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y)$.

Для системы (X,Y) двух дискретных случайных величин

$$F(x,y)=\sum_{x_i<x}\sum_{y_j<y}p_{ij}. \qquad (4.2.3)$$

Пример 1. Задана таблица распределения дискретной двумерной случайной величины

$X\setminus Y$	1	2	3
1	0,16	0,12	0,08
2	0,28	0,11	0,25

Найти функцию распределения системы случайных величин (X,Y). Найти вероятность попадания случайной точки (X,Y) в прямоугольник D: $1,5\le X\le 4$; $1,5\le Y\le 5$.

Решение. В соответствии с формулой (4.2.3) $F(x,y)=\sum\limits_{x_i<x}\sum\limits_{y_j<y}p_{ij}$ значение $F(x,y)$ будем находить в точках каждой из 12 областей на плоскости (см. рис. 9).

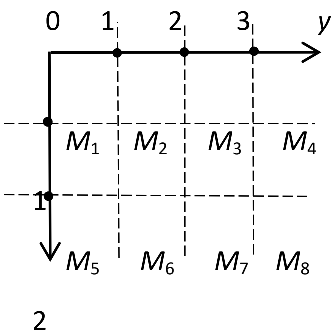


Рисунок 9

$M_1(0,5;0,5)$, $F(M_1)=\sum\limits_{x_i<0,5}\sum\limits_{y_j<0,5}p_{ij}=0$. Аналогично

$F(M_2)=F(M_3)=F(M_4)=F(M_5)=F(M_9)=0$.

$M_6(1,5;1,5)$, $F(M_6)=\sum\limits_{x_i<1,5}\sum\limits_{y_j<1,5}p_{ij}=p_{11}=0,16$ и т. д.

$M_{11}(2,5;2,5)$, $F(M_{11})=\sum\limits_{x_i<2,5}\sum\limits_{y_j<2,5}p_{ij}=$

$p_{11}+p_{12}+p_{21}+p_{22}=0,16+0,12+0,28+0,11=0,67$

$F(M_{12})=F(2,5;\,3,5)=\sum\limits_{x_i<2,5}\sum\limits_{y_j<3,5}p_{ij}=$

$p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{21}+p_{22}+p_{23}=$

$=0,16+0,12+0,08+0,28+0,11+0,25=1$.

Таким образом, функция распределения данной системы случайных величин имеет вид:

$F(x,y)=$

при	$y\le 1$	$1<y\le 2$	$2<y\le 3$	$y>3$
$x\le 1$	0	0	0	0
$1<x\le 2$	0	0,16	0,28	0,36
$x>2$	0	0,44	0,67	1

Вероятность попадания случайной точки (X,Y) в прямоугольник D найдём по формуле (4.2.2):

$P\left(1{,}5 \le X \le 4;\ 1{,}5 \le Y \le 5\right) = F(4;\,5) - F(1{,}5;\,5) - F(4;\,1{,}5) +$
$+F(1{,}5;\,1{,}5) = 1 - 0{,}36 - 0{,}44 + 0{,}16 = 0{,}36.$

ЗАДАЧИ

4.2.1 Закон распределения дискретной двумерной случайной величины задан таблицей

$X \backslash Y$	−2	0	4
0	0,15	0,05	0
10	0,10	0,20	0,10
20	0,05	0,10	0,25

Найти функцию распределения $F(x,y)$. Найти условный закон распределения случайной величины Y при $X = 20$. Выяснить, зависимы ли случайные величины X и Y.

4.2.2 По мишени производится один выстрел. Вероятность попадания равна 0,75. Пусть случайная величина X – число попаданий; случайная величина Y − число промахов. Составить таблицу совместного распределения вероятностей случайных величин (X, Y). Написать функцию распределения $F(x,y)$ системы случайных величин (X,Y).

4.2.3 Подбрасывают 2 монеты. Пусть X − число выпавших гербов, Y − модуль разности числа выпавших гербов и цифр. Пусть $F(x,y)$ – функция распределения случайной величины (X, Y). Найти её значения $F(1{,}5;\,3)$, $F(1;\,2{,}5)$, $F(5;\,1)$.

4.2.4 По цели производится два независимых выстрела. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0,8, при втором – 0,9. Случайная величина X – число попаданий при первом выстреле, Y − число попаданий при втором. Найти:

а) закон распределения системы случайных величин (X, Y);

б) безусловные законы распределения компонент X и Y и их функции распределения $F_1(x)$, $F_2(y)$;

в) функцию распределения $F(x,y)$.

4.2.5 Заданы законы распределения двух независимых друг от друга случайных величин X и Y:

x_i	8	9	10
p_i	0,1	0,3	0,6

y_i	8	9	10
p_i	0,2	0,3	0,5

Написать функцию распределения $F(x,y)$ системы случайных величин (X, Y) и вычислить её значения $F(9{,}2;\,8{,}5)$, $F(8{,}5;\,12)$.

4.2.6 Функция распределения системы дискретных случайных величин (X, Y) имеет вид

$F(x,y)$ =

при	$y \le -4$	$-4 < y \le 1$	$1 < y \le 8$	$y > 8$
$x \le -2$	0	0	0	0
$-2 < x \le 3$	0	1/12	1 / 4	7/12
$x > 3$	0	1 / 4	7/12	1

Найти: таблицу распределения случайного вектора (X, Y); ряд распределения случайной величины Y; вероятность события ($X > Y$).

4.3 Двумерная плотность вероятности непрерывной случайной величины

Непрерывной называют двумерную величину (X, Y), составляющие X и Y которой непрерывны.

Плотностью распределения вероятностей (или ***дифференциальной функцией***) непрерывной двумерной случайной величины называют вторую смешанную производную от функции распределения:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \, \partial y}. \qquad (4.3.1)$$

Плотность совместного распределения можно рассматривать как предел отношения вероятности попадания случайной точки в прямоугольник со сторонами Δx и Δy к площади этого прямоугольника, когда обе его стороны стремятся к нулю. Геометрически ее можно истолковать как поверхность, которую называют ***поверхностью распределения***.

Свойства двумерной плотности распределения вероятностей

1. $f(x,y) \ge 0$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$.

В частности, если все возможные значения (X,Y) принадлежат конечной области D, то $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = 1$.

3. $P\big((X,Y) \subset D\big) = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$, где D − произвольная область.

4. $F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$.

5. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = f_1(x)$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = f_2(y)$, где $f_1(x), f_2(y)$ − функции плотности распределения составляющих случайной величины X и Y соответственно.

6. Случайные величины X и Y независимы тогда и только тогда, когда $f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y)$.

Условной плотностью распределения составляющей X при заданном значении $Y = y$ называется отношение плотности совместного распределения системы к плотности распределения составляющей *Y:*

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}, \text{ где } f_2(y) \neq 0. \qquad (4.3.2)$$

Аналогично определяется условная плотность распределения случайной величины *Y:*

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}, \text{ где } f_1(x) \neq 0. \qquad (4.3.3)$$

Из формул (4.3.2), (4.3.3) следует, что

$$f(x,y) = f_1(x)\cdot f(y|x) = f_2(y)\cdot f(x|y). \qquad (4.3.4)$$

Распределение двумерной непрерывной случайной величины (*X, Y*) называют ***равномерным,*** если в области, которой принадлежат все возможные значения (*x,y*), плотность вероятностей *f* (*x,y*) сохраняет постоянное значение.

Математические ожидания и дисперсии непрерывной двумерной случайной величины (*X, Y*) находятся по формулам:

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x,y)\,dx\,dy \text{ или } M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, f_1(x)\,dx, \qquad (4.3.5)$$

$$M(Y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\, f(x,y)\,dx\,dy \text{ или } M(Y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\, f_2(y)\,dy, \qquad (4.3.6)$$

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x,y)\,dx\,dy - M^2(X) \text{ или } D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f_1(x)\,dx - M^2(X), \quad (4.3.7)$$

$$D(Y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2\, f(x,y)\,dx\,dy - M^2(Y) \text{ или } D(Y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2\, f_2(y)\,dy - M^2(Y). \quad (4.3.8)$$

Математическое ожидание случайной величины $\varphi(X,Y)$, являющейся ***функцией компонент*** случайной величины (*X,Y*), находится по формуле:

$$M(\varphi(X,Y)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)\cdot f(x,y)\,dx\,dy. \qquad (4.3.9)$$

Условное математическое ожидание случайной величины X при условии $Y = y$ определяется равенством

$$M(X|y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x|y)\,dx\,. \qquad (4.3.10)$$

Аналогично

$$M(Y|x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f(y|x)\,dy\,. \qquad (4.3.11)$$

Пример 1. Непрерывная двумерная случайная величина (X, Y) задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x,y)=\begin{cases} c\cdot(y-xy), & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$$

где область $D=\{(x,y)\colon 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$. Требуется:

а) найти коэффициент с;

б) найти плотности распределения компонент X и Y;

в) найти вероятность попадания случайной точки (X,Y) в область

$D_1=\{(x,y)\colon 0{,}7\le x\le 3,\ \ 0\le y\le 0{,}3\}$.

г) найти совместную функцию распределения $F(x,y)$;

д) выяснить, зависимы ли случайные величины X и Y;

е) найти условные плотности распределения компонент X и Y;

ж) найти $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$.

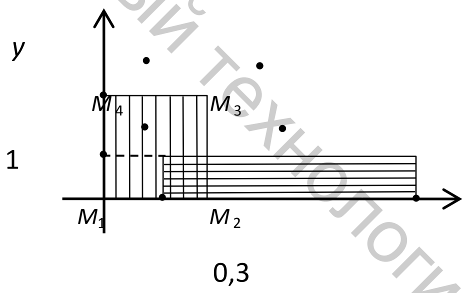


Рисунок 10

Области D и D_1 изображены на рисунке 10.

Решение.

а) Коэффициент c найдем из условия нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1$.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 c\cdot(y-xy)dy=c\int\limits_0^1(1-x)dx\cdot\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1=\frac{c}{2}\left.\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^1=\frac{c}{4},$$

откуда $\frac{c}{4}=1$, то есть $c=4$.

б) Находим плотности распределения компонент X и Y:

$$f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int\limits_0^1 4y(1-x)\,dy=4(1-x)\cdot\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1=2(1-x)\,,$$

то есть $f_1(x)=\begin{cases}2(1-x), & x\in[0;1],\\ 0, & x\notin[0;1].\end{cases}$

$$f_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int\limits_0^1 4y(1-x)\,dx=4y\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=2y,$$

то есть $f_2(y)=\begin{cases}2y, & y\in[0;1],\\ 0, & y\notin[0;1].\end{cases}$

в) Для нахождения вероятности попадания случайной точки (X,Y) в область D_1 воспользуемся формулой из свойства 3 плотности распределения:

$$P\big((X,Y)\subset D_1\big)=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dx\,dy=\int\limits_{0,7}^{1}dx\int\limits_0^{0,3}4(1-x)y\,dy+\int\limits_1^3 dx\int\limits_0^{0,3}0\,dy=$$

$$=4\int\limits_{0,7}^{1}(1-x)\,dx\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{0,3}=2\cdot 0,09\cdot\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0,7}^{1}=0,18\cdot\left(1-\frac{1}{2}-0,7+\frac{0,49}{2}\right)=0,0081.$$

г) Для нахождения совместной функции распределения $F(x,y)$ воспользуемся формулой из свойства 4.

Рассмотрим возможные положения точки (x,y) на плоскости:

1) если точка (x,y) расположена во II четверти ($x<0$, $y\geq 0$), либо в III ($x<0$, $y<0$), либо в IV четверти ($x\geq 0$, $y<0$), то $F(x,y)=0$, так как там всюду $f(x,y)=0$;

2) если точка (x,y) расположена в I четверти, то она может находиться:

(а) внутри области D (на рис. 9 точка M_1); (б) справа от области D, причём $y\leq 1$ (точка M_2); (в) справа от области D, причём $y>1$ (точка M_3); (г) над областью D, причем $x\leq 1$ (точка M_4).

В случае (а) имеем

$$F(x,y)=4\int\limits_{-\infty}^{x}du\int\limits_{-\infty}^{y}(1-u)v\,dv=4\int\limits_0^x(1-u)\,du\int\limits_0^y v\,dv=4\int\limits_0^x(1-u)\,du\cdot\frac{y^2}{2}=xy^2(2-x).$$

В случае (б) получим

$$F(x,y)=4\int\limits_0^1(1-u)\,du\int\limits_0^y v\,dv=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{2}\Bigg|_0^y=y^2.$$

В случае (в) имеем

$$F(x,y)=4\int\limits_0^1(1-u)\,du\int\limits_0^1 v\,dv=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{2}\Bigg|_0^1=1.$$

И, наконец, в случае (г):

$$F(x,y)=4\int\limits_0^x(1-u)\,du\int\limits_0^1 v\,dv=4\cdot\left(u-\frac{u^2}{2}\right)\Bigg|_0^x\cdot\frac{1}{2}=2\left(x-\frac{x^2}{2}\right)=x(2-x).$$

Таким образом,

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ или } x\geq 0,\ y<0,\\ xy^2(2-x), & (x,y)\in D,\\ y^2, & 0\leq y\leq 1,\ x>1,\\ x(2-x), & 0\leq x\leq 1,\ y>1,\\ 1, & x>1,\ y>1.\end{cases}$$

д) Для выяснения, зависимы или нет случайные величины X и Y, проверим условие независимости (свойство 6). В пунктах а) и б) получены функции $f(x,y),\ f_1(x),\ f_2(y)$.

$$f_1(x)\cdot f_2(y)=\begin{cases}2(1-x), & x\in[0;1]\\ 0, & x\not\in[0;1]\end{cases}\cdot\begin{cases}2y, & y\in[0;1]\\ 0, & y\not\in[0;1]\end{cases}=\begin{cases}4(y-xy), & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\not\in D.\end{cases}$$

Следовательно, $f_1(x)\cdot f_2(y)=f(x,y)$ и компоненты X и Y независимы.

е) Так как X и Y независимы и $f_1(x)\cdot f_2(y)=f(x,y)$, то условные плотности распределения компонент X и Y (см. формулы (4.3.2), (4.3.3)) равны

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=f_1(x)=\begin{cases}2(1-x), & x\in[0;1],\\ 0, & x\not\in[0;1];\end{cases}$$

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=f_2(y)=\begin{cases}2y, & y\in[0;1],\\ 0, & y\not\in[0;1].\end{cases}$$

ж) Числовые характеристики $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$ найдём по формулам (4.3.5)–(4.3.8).

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f_1(x)\,dx=\int_0^1 x\cdot 2(1-x)\,dx=2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}y\,f_2(y)\,dy=\int_0^1 y\cdot 2y\,dy=2\cdot\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}.$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_1(x)\,dx-M^2(X)=\int_0^1 x^2\cdot 2(1-x)\,dx-\left(\frac{1}{3}\right)^2=2\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1-\frac{1}{9}=\frac{1}{18}.$$

$$D(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f_2(y)\,dx-M^2(Y)=\int_0^1 y^2\cdot 2y\,dy-\left(\frac{2}{3}\right)^2=2\cdot\frac{y^4}{4}\Bigg|_0^1-\frac{4}{9}=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}.$$

ЗАДАЧИ

4.3.1 Задана плотность совместного распределения системы непрерывных случайных величин (X, Y)

$$f(x,y)=\begin{cases}cxy, & \text{если } (x,y)\in D,\\ 0, & \text{если } (x,y)\notin D,\end{cases}$$

где $D = \{(x,y)\colon x \ge 0,\, y \ge 0,\, x + y \le 1\}$. Найти: коэффициент c; плотности распределения отдельных компонент X и Y; функции распределения отдельных компонент; вероятность события $A = (X > 0{,}5; Y \le 1)$.

4.3.2 Двумерная случайная величина (X, Y) имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x,y) = \frac{c}{\left(1/3 + x^2\right)\cdot(3 + y^2)},\ x \in R,\ y \in R.$$

Найти: значение величины c; функцию распределения $F(x,y)$; плотности распределения отдельных компонент X и Y; вероятность события $A = \left(X < 1, Y < \sqrt{3}\right)$.

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}\left(1/3 + x^2\right)},\quad f_2(y) = \frac{\sqrt{3}}{\pi(3 + y^2)},\quad P(A) = 5/8\,)$$

4.3.3 Используя условие задачи 4.3.1, выяснить, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

4.3.4 Используя условие задачи 4.3.2, показать, что случайные величины X и Y независимы.

4.3.5 Независимые случайные величины X и Y имеют соответственно плотности:

$$f_1(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & \text{при } x \ge 0, \\ 0, & \text{при } x < 0, \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 4e^{-4y}, & \text{при } y \ge 0, \\ 0, & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения двумерной случайной величины (X, Y) и функцию распределения $F(x,y)$.

4.3.6 Используя условие задачи 4.3.1, найти условные плотности компонент X и Y.

Ответ: $$f(y\,|\,x) = \begin{cases} \dfrac{2y}{(1 - x^2)}, & \text{если } (x,y) \in D, x \ne 1, \\ 0, & \text{если } (x,y) \notin D, \end{cases}$$

$$f(x\,|\,y) = \begin{cases} \dfrac{2x}{(1 - y^2)}, & \text{если } (x,y) \in D,\ y \ne 1, \\ 0, & \text{если } (x,y) \notin D. \end{cases}$$

4.3.7 Двумерная случайная величина (X, Y) имеет равномерное распределение вероятностей в треугольной области $D(\Delta\, ABC)$, то есть

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{S}, & \text{если } (x,y) \in D, \\ 0, & \text{если } (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где S – площадь области D. Известны координаты вершин $\Delta\, ABC$: $A(-1;1)$, $B(1;1)$, $C(0;0)$. Найти плотность распределения компонент X и Y, условные плотности распределения случайных величин X и Y. Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

4.3.8 Используя условие задачи 4.3.7, найти $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$.

4.3.9 Используя условие задачи 4.3.1, найти $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$.

4.3.10 Плотность совместного распределения случайных величин X и Y задана формулой

$$f(x,y)=\begin{cases}0{,}25(1-xy^3), & \text{при } -1\le x\le 1,\ -1\le y\le 1,\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Найти безусловные и условные плотности распределения с.в. X и Y и условное математическое ожидание $M(Y|X=x)$.

4.3.11 Случайные величины X и Y независимы, имеют плотности распределения соответственно

$$f_1(x)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}, & \text{при } x\ge 0\\ 0, & \text{при } x<0\end{cases},\quad f_2(y)=\begin{cases}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}, & \text{при } y\ge 0\\ 0, & \text{при } y<0\end{cases},\quad \lambda_1>0, \lambda_1>0.$$

Найти плотность совместного распределения $f(x,y)$, $P(X>Y)$, $M(X)$, $M(Y)$.

4.3.12 Двумерная случайная величина (X, Y) имеет плотность распределения

$$f(x,y)=\begin{cases}c\cdot\sin(x+y), & \text{если } (x,y)\in D,\\ 0, & \text{если } (x,y)\notin D,\end{cases}$$

где $D=\{(x,y): 0\le x\le \frac{\pi}{2},\ 0\le y\le \frac{\pi}{2}\}$. Найти коэффициент c, плотности распределения компонент X и Y и вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=0,\ x=\frac{\pi}{6},\ y=0,\ y=\frac{\pi}{2}$.

4.3.13 Дана плотность распределения двумерной случайной величины (X, Y)

$$f(x,y)=\begin{cases}c\cdot e^{-x-y}, & x\ge 0,\ y\ge 0,\\ 0, & x<0 \text{ или } y<0.\end{cases}$$

Найти: а) параметр c; б) функцию распределения вероятностей $F(x,y)$; в) вероятности событий: $A=(X<0, Y<2)$, $B=(0\le X\le 1, -X<Y<X)$.

4.3.14 Двумерная случайная величина (X, Y) имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x,y)=\begin{cases}c, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases},\ \text{где } D=\{(x,y): y\ge 0,\ x+y\le 1,\ 2y-x\le 2\}.$$

Найти: а) величину c; б) плотность распределения случайной величины X; в) вероятность события $(X\ge 0)$.

4.3.15 Плотность распределения вероятностей системы случайных величин (X, Y) имеет вид

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y, & x\in[0;1],\ y\in[0;1],\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Найти $f_1(x), f_2(y),\ P(X+Y<1)$. Являются ли X и Y независимыми?

4.4 Коэффициент корреляции

Корреляционный момент служит для характеристики связи между случайными величинами X и Y.

Корреляционным моментом K_{XY} (иначе ***ковариация*** $\operatorname{cov}(X,Y)$) системы (X, Y) называют число

$$K_{XY} = M\left([X - M(X)]\cdot[Y - M(Y)]\right). \tag{4.4.1}$$

В практических расчётах удобнее использовать формулу

$$K_{XY} = M(XY) - M(X)\cdot M(Y). \tag{4.4.2}$$

Для дискретных величин X и Y с учётом формулы (4.1.14) имеем

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij} - M(X)\cdot M(Y). \qquad (4.4.2)$$

Для непрерывных величин X и Y с учётом формулы (4.3.9) имеем

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\cdot f(x,y)\,dx\,dy - M(X)\cdot M(Y). \tag{4.4.3}$$

Коэффициентом корреляции величин X и Y называют безразмерную величину

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}, \tag{4.4.4}$$

где $\sigma(X),\ \sigma(Y)$ − средние квадратические отклонения величин X и Y.

Величины X и Y называются ***коррелированными***, если $K_{XY} \neq 0$.

Величины X и Y называются ***некоррелированными***, если $K_{XY} = 0$.

Свойства коэффициента корреляции

1. $-1 \le r_{XY} \le 1$.

2. Если X и Y − независимые случайные величины, то $r_{XY} = 0$.

3. Если X и Y связаны линейной зависимостью $Y = aX + b,\ a \neq 0$, то $|r_{XY}| = 1$.

4. Если $|r_{XY}| = 1$, то случайные величины X и Y связаны линейной функциональной зависимостью.

Коэффициент корреляции характеризует степень линейной зависимости случайных величин X и Y: чем ближе $|r_{XY}|$ к единице, тем связь сильнее; чем ближе $|r_{XY}|$ к нулю, тем связь слабее.

Пример 1. Задана таблица распределения дискретной двумерной случайной величины

$X \setminus Y$	1	2	3
1	0,16	0,12	0,08
2	0,28	0,11	0,25

Найти корреляционный момент K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}.

Решение. В примере 1(г) п. 4.1 вычислены $M(X)$=1,64, $M(Y)$=1,89, $\sigma(X)$=0,48, $\sigma(Y)$=0,87. По формуле (4.4.2) $K_{XY} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij} - M(X)\cdot M(Y) =$

$= 1\cdot1\cdot0{,}16 + 1\cdot2\cdot0{,}12 + 1\cdot3\cdot0{,}08 + 2\cdot1\cdot0{,}28 + 2\cdot2\cdot0{,}11 + 2\cdot3\cdot0{,}25 - 1{,}64\cdot 1{,}89 =$
$= 3{,}14 - 3{,}0996 = 0{,}0404.$

По формуле (4.4.4) $r_{XY} = \dfrac{K_{XY}}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)} = \dfrac{0{,}0404}{0{,}48\cdot 0.87} \approx 0{,}0967432$, то есть $r_{XY} \approx 0{,}1$.

Пример 2. Непрерывная двумерная случайная величина (X, Y) задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x,y) = \begin{cases} 4(y - xy), & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D. \end{cases}$$

где область $D = \{(x,y):\ 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1\}$.

Найти корреляционный момент K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}.

Решение. В примере 1(ж) п. 4.3 вычислены $M(X) = 1/3$, $M(Y) = 2/3$.

По формуле (4.4.3)

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\cdot f(x,y)\,dx\,dy - M(X)\cdot M(Y) = \int_0^1\int_0^1 xy\cdot 4y(1-x)\,dx\,dy - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} =$$

$$= 4\int_0^1 \left(x - x^2\right)dx \int_0^1 y^2 dy - \frac{2}{9} = 4\cdot\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 \cdot\frac{1}{3} - \frac{2}{9} = 4\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} - \frac{2}{9} = 0.$$

Отсюда $r_{XY} = \dfrac{K_{XY}}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)} = \dfrac{0}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)} = 0$. Этого следовало ожидать, так как X и Y – независимые величины (см. пример 1(д) п. 4.3).

ЗАДАЧИ

4.4.1 Используя условие задачи 4.1.6, найти K_{XY} и r_{XY}.

4.4.2 Используя условие задачи 4.1.4, найти K_{XY} и r_{XY}.

4.4.3 Используя условие задачи 4.3.7, найти коэффициент корреляции r_{XY}.

4.4.4 Используя условие задачи 4.3.1, найти K_{XY} и r_{XY}.

4.4.5 Используя условие задачи 4.1.2, найти r_{XY}. (Ответ: 0)

4.4.6 Задано распределение двумерной случайной величины (X, Y)

$X\backslash Y$	10	20	30
50	0,15	0,30	0,15
100	0,10	0,05	0,25

Найти K_{XY} и r_{XY}.

4.4.7 Закон распределения дискретной двумерной случайной величины задан таблицей

$X\backslash Y$	4	5	6	7
1	0,08	0,10	0,10	0,03
2	0,08	0,14	0,16	0,05
3	0,04	0,06	0,14	D

Найти число D, $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$, K_{XY}.

4.4.8 Используя условие задачи 4.3.12, найти K_{XY} и r_{XY}.

(Ответ: $(8\pi-16-\pi^2)/16 \approx -0{,}05$; $(8\pi-16-\pi^2)/(\pi^2+8\pi-32) \approx -0{,}25$)

4.4.9 Задана плотность совместного распределения системы случайных величин (X, Y)

$$f(x,y)=\begin{cases}90x^2y^2, (x,y)\in D,\\ 0, \qquad (x,y)\notin D,\end{cases}$$

где $D=\{(x,y):\ |x|+|y|<1,\ y<0\}$. Найти r_{XY}.

4.4.10 В урне содержится 5 белых и 3 чёрных шара. Из нее извлекают 2 шара без возвращения. Пусть случайная величина X − число белых шаров в выборке, случайная величина Y – число черных шаров в выборке. Найти коэффициент корреляции r_{XY}.

4.4.11 Задана плотность совместного распределения системы случайных величин (X, Y): $f(x,y)=(1/4)\sin x\cdot\sin y$ в квадрате $0\le x\le\pi$, $0\le y\le\pi$; вне квадрата $f(x,y)=0$. Найти корреляционный момент.

ВОПРОСЫ

1. Какую двумерную случайную величину (X, Y) называют дискретной, а какую − непрерывной?

2. Как задаётся закон распределения дискретной случайной величины?

3. Сформулируйте определение функции распределения F(x,y) двумерной случайной величины (X, Y).

5. Как вычислить функцию распределения для дискретной случайной величины (X, Y)?

6. Сформулируйте определение функции плотности распределения вероятностей f (x,y) непрерывной двумерной случайной величины.

7. Назовите свойства плотности вероятностей f (x,y).

8. Как построить законы распределения компонент X и Y для дискретной случайной величины (X,Y) и для непрерывной случайной величины (X, Y)?

9. Какие случайные величины X и Y называются независимыми?

10. Сформулируйте условия независимости для дискретных и для непрерывных случайных величин.

11. Запишите формулы для вычисления M(X), M(Y), D(X), D(Y) для дискретной и для непрерывной двумерных случайных величин (X, Y).

12. Запишите формулы для вычисления корреляционного момента K_{XY} для дискретной и для непрерывной случайных величин (X, Y)?

13. Что называют коэффициентом корреляции случайных величин X и Y?

14. Сформулируйте свойства коэффициента корреляции r_{XY} .

15. Какое свойство случайных величин X и Y характеризует коэффициент корреляции r_{XY}?

ЛИТЕРАТУРА

1. Белько, И. В. Теория вероятностей и математическая статистика / И. В. Белько, Г. П. Свирид. – Минск: ООО «Новое знание», 2004. – 251 с.

2. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – Москва: Кронус, 2018. – 658 с.

3. Высшая математика. Теория вероятностей и математическая статистика. Методические указания к практическим занятиям для студентов дневной и заочной форм обучения / Е. Б. Дунина [и др.]. – Витебск: УО «ВГТУ», 2012. – 128 с.

4. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – 12-е изд., перераб. – Москва: Высш. образование: Юрайт-Издат, 2009. – 479 с.

5. Гринберг, А. С. Теория вероятностей и математическая статистика: курс лекций / А. С. Гринберг, О. Б. Плющ, Б. В. Новыш. – Академия управления при президенте Республики Беларусь, 2005. – 186 с.

6. Гурский, Е. И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике / Е. И. Гурский. – Минск: Выш. школа, 1984. – 223 с.

7. Гусак, А. А. Теория вероятностей. Справочное пособие к решению задач / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. – Минск: ТетраСистемс, 2007. – 288 с.

8. Коломиец, Э. И. Теория вероятностей и математическая статистика. Конспект лекций [Электронный ресурс]: электрон. учеб. пособие / Э. И. Коломиец. – Самара: Изд-во СГАУ им. С. П. Королева, 2011. – 154 с.

9. Куликов, Г. М. Теория вероятностей и математическая статистика / Г. М. Куликов, И. В. Косенкова, А. Д. Нахман. – Тамбов: Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. – 80 с.

10. Муранов, Ю. В. Индивидуальные задания по теории вероятностей и математической статистике / Ю. В. Муранов, П. Л. Иванков, О. Е. Рубаник. – Витебск: УО «ВГТУ», 2000. – 66 с.

11. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике / Д. Т. Письменный. – Москва: Айрис-пресс, 2004. – 256 с.

12. Рябушко, А. П. Индивидуальные задания по высшей математике. В 4 ч. Ч. 4. Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика / А. П. Рябушко. – Минск: Выш. школа, 2010. – 336 с.

13. Чистяков, В. П. Курс теории вероятностей / В. П. Чистяков. – 7-е изд., испр. и доп. – Москва: Дрофа, 2007. – 253 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Таблица А.1 – Таблица значений для функций $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003

Окончание таблицы А.1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,1	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,2	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Таблица А.2 – Таблица значений для функций $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986

Окончание таблицы А.2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,1	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,2	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методические указания к практическим занятиям

Составители:
Рубаник Оксана Евгеньевна
Никонова Татьяна Викторовна
Дунина Елена Брониславовна

Редактор *Т.А. Осипова*
Корректор *Т.А. Осипова*
Компьютерная верстка *О.Е. Рубаник*

Подписано к печати 11.06.2021. Формат 60x90 $^{1}/_{16}$. Усл. печ. листов 6,7.
Уч.-изд. листов 8,5. Тираж 95 экз. Заказ № 132.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»
210038, г. Витебск, Московский пр., 72
Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный технологический университет»
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1497 от 30 мая 2017 г.