

Глава 26. ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ПРОЧНОСТНЫХ РАСЧЕТАХ ОДНОРОДНЫХ ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ ПРИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Хвисевич В.М., Веремейчик А.И., Гарбачевский В.В.

Учреждение образования «Брестский государственный технический университет»
г. Брест, Беларусь, E-mail: vai_mrtm@bstu.by

Введение

Технические достижения последних десятилетий характеризуются интенсивным развитием ядерной энергетики, ракетной техники, высокопроизводительных плазменных и лазерных технологий, сооружением и эксплуатацией подземных выработок.

Элементы конструкций, подземные сооружения, детали механизмов и машин подвергаются воздействию механических усилий, стационарных и нестационарных полей температуры.

Во многих случаях достаточно рассмотреть напряженно-деформированное состояние (НДС) тел при стационарном воздействии температурных полей без учета тепловых и механических свойств материала, в других же случаях при работе элементов конструкций в жестких температурных режимах зависимость тепловых и механических свойств материала от температуры является весьма существенной.

В таких условиях работают, например, корпуса реакторов и ракет, доменных печей, детали плазматронов, различные подземные сооружения и т. д. Все это приводит к необходимости создания новых материалов, эффективных инженерных и конструктивных решений. Перед исследователями возникают задачи теории теплопроводности и механики деформируемого твердого тела (МДТТ) и в частности краевые задачи теплопроводности и термоупругости.

Применение известных методов МДТТ для исследования прочностных характеристик тел приводит к краевым задачам, решение которых возможно лишь в простых случаях. Решение же прикладных задач требует рассмотрения сложных областей деформирования, граничных условий, учета изменения тепловых и физических параметров тела при высоких температурах. Это дает возможность более обоснованно подойти к вопросам проектирования, удовлетворить современным требованиям повышения прочности и эксплуатационных свойств при одновременном снижении веса и размеров исследуемых объектов. Поэтому актуальной проблемой является разработка и развитие эффективных методов численного решения краевых задач термоупругости однородных и неоднородных тел и создания комплекса компьютерных программ.

В последнее время для решения различных прикладных задач механики широко используются различные численные методы, наиболее распространенными из которых являются конечно-разностные методы и метод конечных элементов. Однако в большинстве случаев и в частности при решении краевых задач термоупругости (особенно внешних) более эффективными являются методы на основе теории потенциала.

Метод потенциала. Сингулярные интегральные уравнения (СИУ) краевых задач теории упругости

Понятие потенциала возникло при изучении равновесия различных сплошных сред в случае их установившегося движения. Такие задачи обычно сводятся к решению уравнения Лапласа при заданных на границе области краевых условиях, которым должно удовлетворять искомое решение – гармоническая функция. Эту функцию называют потенциалом сил или других физических величин. Решение гармонической задачи представляется интегралом от элементарных решений. Каждое из решений соответствует воздействию в точке бесконечной среды и эти решения называют фундаментальными. Наложение (суперпозиция) фундаментальных решений – это также решение дифференциального уравнения и получается оно в виде интеграла, тоже называемого потенциалом. Непрерывное распределение источников можно

представить в области или на ее границе с правильно задаваемой функцией, которая выражает плотность распределения источников, тогда суперпозиция решений будет интеграл от произвольной функции, умноженной на то или иное фундаментальное решение.

Теория потенциала и ее применение к уравнениям математической физики достаточно полно изложена в работах [1,2]. В них зависимости от условий решения краевой задачи и ее размерности известны:

потенциал простого слоя:

$$q = \int_S \frac{v}{r} dS \quad (1)$$

где v – плотность потенциала на поверхности S , r – расстояние от источника y до любой точки x (параметрической) пространства;
потенциал двойного слоя:

$$h = \int_S \chi \frac{d(r)}{dn} dS = \int_S \chi \frac{\cos\varphi}{r^2} dS \quad (2)$$

где χ – плотность потенциала, φ – угол между вектором \vec{r} и внешней нормалью \vec{n} к поверхности S ;
объемный (Ньютоновский) потенциал

$$G = \int_V \frac{\rho}{r} dV \quad (3)$$

где V – объем занятый телом, ρ – плотность распределения массы;
логарифмический потенциал простого слоя:

$$q = \int_L v \ln \frac{1}{r} dl \quad (4)$$

где L – плоская кривая (контур) ограничивающая плоскую область, v – плотность потенциала;
логарифмический потенциал двойного слоя:

$$t = \int_L \chi \frac{\cos\varphi}{r} dl \quad (5)$$

где χ – плотность потенциала,
фундаментальная формула для потенциалов (формула Грина):

$$V = \frac{h}{4\pi} \int_S \left(\frac{dV}{dn} \frac{1}{r} - V_S \frac{d(r)}{dn} \right) dS \quad (6)$$

где V – гармоническая функция.

Рассмотрим классический (традиционный) подход построения СИУ плоских краевых задач теории упругости и термоупругости, который состоит в представлении перемещений в виде эластопотенциала простого слоя для второй краевой задачи и эластопотенциала двойного слоя для первой краевой задачи.

Математическая модель задачи термоупругости для изотропных однородных тел

Пусть в двумерном евклидовом пространстве E_2 непрерывно распределена однородная изотропная классическая упругая среда с параметрами упругости μ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона и коэффициентом линейного расширения α , которые в процессе деформирования считаются постоянными.

Рассмотрим замкнутую область D в E_2 , которая делит всю плоскость на области: внутреннюю D^+ , не содержащую бесконечно удаленных точек, и внешнюю D^- . Пусть перемещения точек границы L ничем не ограничиваются. Внешние механические нагрузки заданы и равны нулю. При таких условиях изотермическая задача называется второй краевой задачей теории упругости (аналогична краевой задаче Неймана теории гармонических функций [3]). Первая краевая задача аналогична задаче Дирихле.

В результате нагрева в упругом теле происходит неравномерное тепловое расширение, сопровождающееся возникновением температурных напряжений. Задача об определении температурных напряжений сводится к рассмотрению равновесия тела, находящегося под действием массовых сил, имеющих потенциал и системе контурных сил (фиктивная контурная температурная нагрузка), возникающих только вследствие изменения температуры. Постановку задачи осуществляем в перемещениях u_i , это обусловлено использованием теории потенциала в дальнейших выкладках.

В статических и квазистатических задачах, когда инерционными членами можно пренебречь, имеют место уравнения равновесия в ортогональной декартовой системе координат (x_1, x_2) в перемещениях [3]:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = 0 \quad (7)$$

формулы Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (8)$$

закон Дюамеля-Неймана:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \Theta \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha T \right), \quad (9)$$

уравнение теплопроводности при отсутствии внутренних источников тепла:

$$\Delta T - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (10)$$

где $i, j = 1, 2$, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, ρ – плотность, F_i – компоненты вектора массовых сил, ε_{ij} – компоненты тензора деформаций, $\Theta = \varepsilon_{kk}$ – относительное изменение объема, δ_{ij} – символ Кронекера, E – модуль упругости первого рода (Юнга), T – температурное поле, и граничные условия [3]:

$$\sigma_{ij} n_j = q_i \mathbf{e}_s, \quad (11)$$

где n_j – компоненты единичного вектора внешней нормали к L , $q_i \mathbf{e}_s$ – компоненты вектора контурных сил.

Подставив (9) в (7), получим дифференциальное уравнение в перемещениях:

$$\Delta u_i + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} - \frac{2}{1-2\nu} \alpha \frac{\partial T}{\partial x_i} = -\frac{2}{E} \frac{1+\nu}{1-2\nu} \rho F_i, \quad (12)$$

При решении несвязанных краевых задач термоупругости дифференциальное уравнение теплопроводности (10) выделяется из системы уравнений термоупругости (температура не зависит от скорости деформаций) и решается отдельно. Первый этап решения задачи состоит в отыскании температурного поля T , т. е. к решению независимого уравнения (10), которое для стационарного температурного поля переходит в уравнение Лапласа:

$$\Delta T = 0, \quad (13)$$

В качестве начального условия решения (13) задается распределение температуры в фиксированный момент времени.

Граничные условия уравнения теплопроводности связаны со способами теплопередачи на контуре тела. Обычно применяются три основных идеализированных условия [3]: 1) задана температура на границе $T=F(x_i)$ (задача Дирихле); 2) задана плотность теплового потока, выходящего из тела в окружающую среду

$$q_{n_i} = -\lambda_T \frac{\partial T(x_i)}{\partial n_i}, \quad (14)$$

где λ_T – коэффициент теплопроводности (задача Неймана); 3) заданы температура окружающей среды T_0 и закон конвективного теплообмена между контуром тела и окружающей средой:

$$-\lambda_T \frac{\partial T(x_i)}{\partial x_i} = \alpha_T [T(x_i) - T_0], \quad (15)$$

где α_T – коэффициент теплоотдачи.

Рассмотрим температурную задачу Дирихле для уравнения Лапласа. После определения температурного поля $T(x_i)$ определяется соответствующее ему напряженное состояние.

Как отмечалось выше, решение краевой квазистатической задачи термоупругости сводится к решению соответствующей задачи изотермической теории упругости, где в качестве вектора плотности объемной силы рассматривается величина $-\frac{1}{1-2\nu} \alpha_T \text{grad} T$, а к заданным механическим силам на границе области добавляется гидростатическое давление $\frac{E}{1-2\nu} \alpha_T (T - T_0)$ [3].

Постановка плоской краевой задачи стационарной термоупругости в перемещениях u_i для изотропного однородного тела (параметры упругости E , ν и коэффициент α постоянны) в декартовой системе координат x_1, x_2 состоит в определении перемещений u_i (в общем случае 8 неизвестных $u_i, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ и температуры T), удовлетворяющих: уравнениям равновесия:

$$\Delta u_i + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} - \frac{2}{1-2\nu} \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \frac{\partial T}{\partial x_i} = 0 \quad (16)$$

и на границе L области D , занимаемой телом, граничным условиям (11), напряжения определяются по гипотезе Дюамеля-Неймана (9), а деформации по формулам Коши (8), ε_{ij} удовлетворяют уравнениям совместности [3]. Температура определяется в результате решения уравнения Лапласа (13).

Приведение краевых задач стационарной термоупругости к соответствующим задачам изотермической теории упругости

Запишем дифференциальное уравнение термоупругости (12) в векторной форме:

$$\Delta \bar{u} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad} \text{div} \bar{u} = \frac{2}{1-2\nu} \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \text{grad} T - \frac{\bar{Q}}{\mu}, \quad (17)$$

где \bar{Q} – вектор объемной силы, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – коэффициент Ляме при изотермической деформации.

Сформулируем граничные условия задачи. Для этого удобно вектор полного напряжения \bar{P} выразить через вектор смещения \bar{u} :

$$\bar{p} = P \bar{u} \quad (18)$$

или

$$\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} + \mu \operatorname{grad} \langle \bar{u}, \bar{n} \rangle + \lambda \bar{n} \operatorname{div} \bar{u} = \bar{F} + \alpha \mu \frac{2(1+\nu)}{1+2\nu} \bar{n} T \quad (19)$$

где \bar{F} – вектор механической нагрузки, $\lambda = \frac{E\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2\nu\mu}{1-2\nu}$ – коэффициент Ляме.

В температурной задаче \bar{Q} в (17) и \bar{F} в (19) равны нулю. Таким образом, легко видеть, что краевая задача термоупругости сводится к изотермической задаче теории упругости с температурной объемной силой:

$$Q_T = -\frac{2\mu}{1-2\nu} \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \cdot \operatorname{grad} T \quad (20)$$

и фиктивной температурной контурной нагрузкой, направленной по внешней нормали к области D :

$$F_T = \alpha \mu \frac{2}{1-2\nu} \frac{1+\nu}{1-2\nu} \bar{n} T_s \quad (21)$$

Дифференциальное уравнение термоэластостатики на основании (17), (20) примет вид:

$$\Delta \bar{u} + \frac{1}{1-2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{u} = \frac{2}{1-2\nu} \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \operatorname{grad} T \quad (22)$$

а граничное условие задачи можно записать в виде:

$$P \bar{u} \rangle = \bar{F}_T \quad (23)$$

Решение уравнения (22) разыскиваем в форме, предложенной Гудьером:

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + \bar{u}_1 \quad (24)$$

Уравнение изотермической упругости для вектора \bar{u}_0 примет вид:

$$\Delta \bar{u}_0 + \frac{1}{1-2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{u}_0 = 0 \quad (25)$$

а для частного решения \bar{u}_1 , которое рассмотрим как градиент некоторой бигармонической функции W [3]:

$$\bar{u}_1 = \operatorname{grad} W \quad (26)$$

уравнение Пуассона:

$$\Delta W = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T \quad (27)$$

Температура T представляет собой решение уравнения Лапласа. Поэтому:

$$\Delta \Delta W = 0 \quad (28)$$

Обратимся теперь к формулировке второй краевой задачи. На границе L области D считается заданным вектор полного напряжения \bar{P}_s , поэтому:

$$\bar{P}_s = \mu \left[\frac{d\bar{u}}{dn} + \operatorname{grad} \langle \bar{u}, \bar{n} \rangle + \frac{\lambda}{\mu} \bar{n} \operatorname{div} \bar{u} \right] = \bar{F} \quad (29)$$

Подставим в (29) решение (24), учитывая, что $\langle \bar{u}_1, \bar{n} \rangle = \frac{dW}{dn}$, имеем:

$$\mu \frac{d\bar{u}_0}{dn} + \mu \cdot \text{grad } \bar{u}_0, \bar{n} + \lambda \bar{n} \cdot \text{div} \bar{u}_0 = \bar{F} -$$

$$-2\mu \left(\text{grad} \frac{dW}{dn} + \frac{\nu}{1-2\nu} \bar{n} \Delta W \right) + 2\mu \alpha \frac{1+\nu}{1-2\nu} n T_s. \quad (30)$$

Полагая, что вектор механических сил $\bar{F} = 0$, с учетом (28) и после приведения подобных членов выражение (30) переписывается в виде:

$$P \bar{u}_0 \stackrel{L}{=} \bar{P}_T, \quad (31)$$

где \bar{P}_T – температурная нагрузка на границе L , которая определяется по формуле:

$$\bar{P}_T = 2\mu \left(\alpha \cdot \frac{1+\nu}{1-\nu} \bar{n}_0 T_L - \text{grad} \frac{dW}{dn} \right), \quad (32)$$

В правой части (32) находится температура T_L на границе L и градиент нормальной производной бигармонической функции W , которая определяется после решения задачи теплопроводности.

В результате решения краевой задачи изотермической теории упругости будет найден вектор \bar{u}_0 , он отвечает не заданной фактической нагрузке \bar{P}_L , а приведенной нагрузке:

$$\bar{P}_{np} = \bar{P}_L + \bar{P}_T, \quad (33)$$

Соответственно этому и полные напряжения, вычисленные после отыскания вектора, будут состоять из двух частей. Они определяются формулой (9) и с учетом (24) и (26) запишутся в скалярной форме:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{0i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{0j}}{\partial x_i} \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial u_{0k}}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] + \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} - \Delta W \delta_{ij} \right] \right\}, \quad (34)$$

или:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^T, \quad (35)$$

где σ_{ij}^0 – напряжения, зависящие от вектора \bar{u}_0 , а σ_{ij}^T – температурные добавки:

$$\sigma_{ij}^T = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} - \Delta W \delta_{ij} \right), \quad (36)$$

Перемещения определяются по формуле (24). Формулы (35) дают решение поставленных краевых задач стационарной термоупругости. В работе [4] доказано условие разрешимости для (32).

Интегральное уравнение краевой задачи Дирихле в плоской области

В двумерном евклидовом пространстве температура T подчиняется уравнению Лапласа (13). На контуре L двумерной области D задано значение температуры $T=F$. Область D считаем ограниченной одним замкнутым контуром L . В такой постановке для T имеем задачу Дирихле [3, 4].

Решение задачи осуществляем классическим способом, т.е. температуру представляем логарифмическим потенциалом двойного слоя:

$$T(x, y) = \int_L \chi(y) \frac{\cos \varphi}{r} dl_y, \quad (37)$$

где $r = |y - x| = \sqrt{y_i - x_i \quad y_i - x_i}$, $i=1, 2$, $y \in L$, φ – угол между направлением \bar{F} и вектором внешней нормали \bar{n} в точке y , $\cos \varphi = n_i \quad \beta_i$, β_i – направляющие косинусы вектора F .

Обозначим случай, когда точка x попадает на границу L , через x_L . В окрестности точки x_L потенциал (37) имеет два предельных значения и одно прямое значение. Все три значения определяются по формуле скачка:

$$T \quad x_L = \pi \chi \quad x_L \quad \eta + V.p. \int_L \chi \quad y \quad \frac{\cos \varphi}{r} dl_y \quad (38)$$

где $V.p.$ – означает главное значение сингулярного интеграла по Коши, $\eta = 1$ для внутреннего предела, $\eta = 0$ для прямого значения, $\eta = -1$ для внешнего предела.

В данном случае рассматривается задача Дирихле в внутренней области (случай J по Н. М. Гюнтеру) [4]. Тогда внутренний предел $T \quad x_L$ из [4] приравняем к заданному значению F и получаем интегральное уравнение теплопроводности относительно плотности потенциала $\chi \quad y$:

$$\pi \chi \quad x_L + V.p. \int_L \chi \quad y \quad \frac{\cos \varphi}{r} dl_y = F \quad x_L \quad (39)$$

Температура T считается найденной после решения (39) и последующей подстановки $\chi \quad y$ в (37).

Термоэластопотенциалы. Построение СИУ плоской краевой задачи стационарной термоупругости

Решение плоской краевой задачи термоупругости разыскиваем в форме предложенной Гудьером (24). Уравнение изотермической упругости для вектора \bar{u}_0 имеет вид (25), а частное решение \bar{u}_1 представим как градиент некоторой бигармонической функции W (26). В результате приходим к уравнению Пуассона (27).

Тогда подставив в (27) соотношение (37) и учитывая что:

$$\Delta \frac{\partial W^*}{\partial n_y} = -\frac{\cos \varphi}{r} \quad (40)$$

где $W^* = \frac{r^2}{4} (1 - \ln r)$ – фундаментальное решение Лауричелла [4], получаем выражение для бигармонической функции:

$$W = -a \int_L \chi \quad y \quad \frac{r}{4} \cos \varphi (1 - 2 \ln r) dl_y \quad (41)$$

$$a = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha$$

Внося (40) в (26), получаем термоэластопотенциал перемещений, который зависит от объемной силы:

$$Q_T = -\frac{2\mu (1 + \nu)}{1 - 2\nu} \alpha \text{grad} T \quad (42)$$

плоской задачи термоупругости:

$$u_i^T \quad x = -\frac{a}{2} \int_L \chi \quad y \quad [n_i \quad y \quad 2 \ln r - 1 + 2\beta_i \cos \varphi] dl_y, \quad i=1, 2 \quad (43)$$

Для получения температурных добавок напряжений и фиктивной температурной нагрузки найдем частные производные:

$$\frac{\partial^3 W^*}{\partial x_i \partial x_j \partial n_y} = \frac{1}{2r} 2\beta_i \beta_j \cos \varphi - [n_i y \beta_j + n_j y \beta_i] - \delta_{ij} \cos \varphi \quad (44)$$

$$\frac{\partial^3 W^*}{\partial x_i \partial n_x \partial n_y} = \frac{1}{2r} [2\beta_i \cos \varphi \cos \psi - n_i x \cos \varphi - n_i y \cos \psi - \beta_i \cos \Theta] \quad (45)$$

где $\cos \psi = n_i x \beta_i$, $\cos \Theta = n_i x n_i y$

С учетом (44), (45) строим термоэластопотенциалы:

$$\Delta W = -a \int_L \frac{\cos \varphi}{r} dl_y$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} = -a \int_L \chi y \frac{1}{2r} 2\beta_i \beta_j \cos \varphi - [n_i y \beta_j + n_j y \beta_i] - \delta_{ij} \cos \varphi dl_y \quad (46)$$

$$\frac{\partial^2 W^*}{\partial x_i \partial n_x} = -a \int_L \chi y \frac{1}{2r} [\beta_i \cos \Theta + n_i x \cos \varphi + n_i y \cos \psi - 2\beta_i \cos \varphi \cos \psi] dl_y$$

При пересечении точкой x границы L выражения (46) имеют предельные значения, которые определяются так:

$$\Delta W_L = -\pi a \chi x_L + V \cdot p \cdot W_L$$

$$\frac{\partial^2 W_L}{\partial x_i \partial x_j} = -\pi a n_i x_L n_j x_L \chi x_L + V \cdot p \cdot \frac{\partial^2 W_L}{\partial x_i \partial x_j} \quad (47)$$

$$\frac{\partial^2 W_L}{\partial x_i \partial n_x} = -\pi a n_i x_L \chi x_L + V \cdot p \cdot \frac{\partial^2 W_L}{\partial x_i \partial n_x}$$

Составляя с учетом (46) и формулы для температурных добавок напряжений (36), получаем выражения температурных добавок напряжений для внутренних точек области D^+ :

$$\sigma_{ij}^T x = 2\mu a \int_L \chi y \frac{1}{2r} [n_i x \beta_j + n_j x \beta_i - 2\beta_i \beta_j + \delta_{ij} \cos \varphi] dl_y \quad (48)$$

Интегральные уравнения температурных добавок напряжения для точек границы L получаются подстановкой (47) в (36):

$$\sigma_{ij}^T x_L = 2\mu a \pi \chi x_L [n_i x_L n_j x_L - \delta_{ij}] + V \cdot p \cdot \sigma_{ij}^T x_L \quad (49)$$

Выражение фиктивной температурной контурной нагрузки p_i^T получим, подставив (47) в выражение для температурной нагрузки:

$$\bar{p}_T = 2\mu \left(\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \bar{n}_0 T_s - \text{grad} \frac{dW}{dn} \right) \quad (50)$$

В правой части (32) находится температура T_L на границе и градиент нормальной производной бигармонической функции W , которая определяется после решения задачи теплопроводности, при этом:

$$p_i^T = a\mu \int_L \chi y \frac{1}{r} [\beta_i \cos \Theta + n_i y \cos \psi - n_i x \cos \varphi - 2\beta_i \cos \varphi \cos \psi] dl_y \quad (51)$$

По формуле (24), учитывая эластопотенциал простого слоя $q_i(x, y) = \int_L v_i(x, y) \bar{y}_{ij}(x, y) dl_y$, построенный на матрице фундаментального решения плоской задачи теории упругости $u_{ij}(x, y) = \frac{1}{4\pi\mu(1-\nu)} [\beta_i \beta_j - 3 - 4\nu \ln r]$, где β_i, β_j – направляющие косинусы вектора $\bar{r}(x, y) = |y - x|$, \bar{u} – вектор смещения точки x среды от действия силы $F_j(x)$, помещенной в точке y , $i, j = 1, 2$, и (43) получаем термоупругие потенциалы для перемещений, содержащие одномерные интегралы:

$$u_i(x) = u_i^0(x) + u_i^T(x) = \frac{1}{4\pi\mu(1-\nu)} \int_L v_i(y) [\beta_i \beta_j - 3 - 4\nu \ln r \delta_{ij}] - \chi y [n_i y \ln r - 1 + 2\beta_i \cos \varphi] \frac{a}{2} dl_y. \quad (52)$$

Внося в формулу для определения напряжений (36), где σ_{ij}^0 – напряжения, зависящие от вектора \bar{u}_0 , а σ_{ij}^T – температурные добавки, интегральные представления напряжений в точках x , не принадлежащих L в соответствии с выражением [3]:

$$\sigma_{ij}(x) = - \int_L v_k(y) T_{ij}^k(x, y) dl_y = \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \int_L v_k(y) [1 - 2\nu \delta_{ik} \beta_j + \delta_{jk} \beta_i - \delta_{ij} \beta_k + 2\beta_i \beta_j \beta_k] \frac{dl_y}{r(x, y)}, \quad i, j = 1, 2. \quad (53)$$

и (49), получим формулы термоупругих напряжений плоской задачи во внутренних точках области D^+ :

$$\sigma_{ij}(x) = \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \int_L \frac{1}{r} v_k(y) [1 - 2\nu \delta_{ik} \beta_j + \delta_{jk} \beta_i - \delta_{ij} \beta_k + 2\beta_i \beta_j \beta_k] + \chi y [n_i x \beta_j + n_j x \beta_i - 2\beta_i \beta_j + \delta_{ij} \cos \varphi] \alpha (1 + \nu) dl_y. \quad (54)$$

Напряжения в граничных точках определяются по формулам:

$$\sigma_{ij}(x_L) = v_i(x_L) n_j(x_L) \left[1 + \frac{n_j^2(x_L)}{1-\nu} \right] + v_j(x_L) n_i(x_L) \left[\frac{n_j^2(x_L)}{1-\nu} - 1 \right] + \chi x_L [n_i(x_L) n_j(x_L) - \delta_{ij}] \alpha + V.p. \sigma_{ij}(x_L). \quad (55)$$

Используя для внутренних задач термоупругости СИУ относительно плотности $v_i(x)$ [3]:

$$v_i(x_L) + \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \int_L v_i(y) \cos \psi [1 - 2\nu + 2\beta_i^2] + v_j(y) [1 - 2\nu \times [n_j(x) \beta_i - n_i(x) \beta_j] + 2\beta_i \beta_j \cos \psi] \frac{dl_y}{r(x, y)} = p_i(x_L). \quad (56)$$

где $\cos \psi = n_i(x) \beta_j$, $i, j = 1, 2$; $i \neq j$, и с учетом (51), получим систему СИУ относительно плотности потенциала простого слоя $v_i(y)$:

$$v_i x_L + \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \int_L v_i y \cos\psi [1-2\nu + 2\beta_i^2] + v_j y [1-2\nu [n_j x \beta_i - n_i x \beta_j] + 2\beta_i \beta_j \cos\psi] dl_y = p_i x_L + p_i^T x_L. \quad (57)$$

СИУ (57), (55), (54) и интегральные уравнения (52) дают решение плоской краевой задачи термоупругости во внутренней односвязной области D^+ .

Об алгоритме численного решения плоской краевой задачи термоупругости. Решение контрольных примеров

Численное решение плоской задачи термоупругости разделим на две части. В первой части необходимо численно решить интегральное уравнение (39) относительно неизвестной плотности потенциала χ^y и затем вычислить температурные слагаемые перемещений (43), напряжений (48), (49) и фиктивной нагрузки (50).

Во второй части решается система СИУ изотермической теории упругости (57) относительно неизвестной плотности потенциала $v_i y$ и наконец, вычисляются термические перемещения (52) и напряжения (54), (55) во внутренних и граничных точках области D^+ .

Для решения задач в обеих частях применяется метод механических квадратур, в котором решение задачи распадается на уже известные выше три последовательных этапа: 1) замена СИУ алгебраической системой уравнений; 2) решение алгебраической системы; 3) вычисление напряжений в области и на ее границе.

Интегралы входящие в соотношения плоской задачи, одномерные, поэтому вместо (43) записываем N соотношений для точек P_k , которые являются центрами отрезков разбиения границы L :

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Delta L_i} \chi p D p_{k,p} dl_y = \sum_{i=1}^N \chi_i p_i \sum_{j=0}^m D p_{i,p} A_{ij} + R \quad (58)$$

Погрешность R замены при заданном разбиении границы должна быть наименьшей. При замене интегрального уравнения конечной суммой для плотности потенциала применялся интерполяционный полином Лагранжа, который проводился через три точки вдоль длины дуги контура L .

Для вычисления интегралов по особым и неособым отрезкам применялась квадратурная формула:

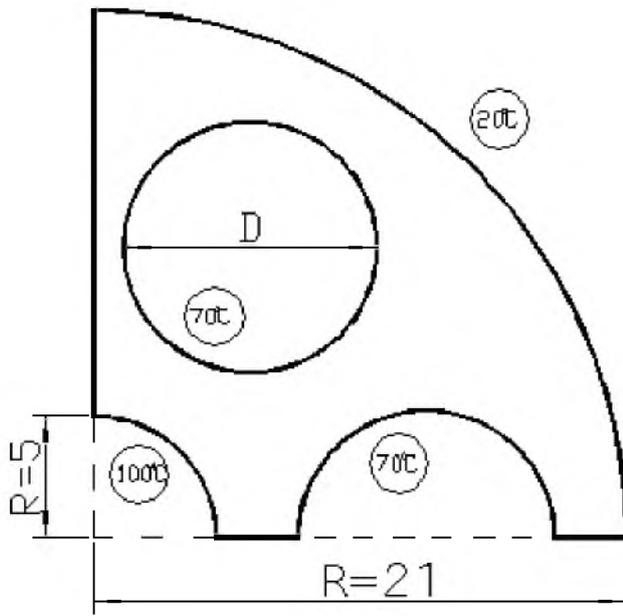
$$I_i \approx h_i \sum_{j=1}^m \chi t_j^i \sum_{k=1}^l \frac{\omega_m t_k D t_{\vartheta}, t_k S t_k \omega_k}{t_k - t_j^i \omega_m' t_j^i R_S t_i, t_k} \quad (59)$$

Система линейных алгебраических уравнений относительно χ^y решается методом Гаусса. На третьем этапе, при вычислении интегралов температурных слагаемых перемещений и напряжений используется квадратурная формула:

$$I_i = h_i \sum_{k=1}^l \omega_k \frac{D t_{\vartheta}, t_k}{R_S t_i, t_k} \sum_{j=1}^m \chi t_j^i \frac{\omega_m t_k}{t_k - t_j^i \omega_m' t_j^i} \quad (60)$$

Решение второй части задачи осуществляется аналогично, по указанным выше этапам. По данному алгоритму составлена компьютерная программа, которая тестирована на различных задачах, имеющих точное решение.

В качестве тестового примера рассмотрим многокамерный цилиндрический сосуд давления, который подвергается воздействию стационарного поля температуры. Ввиду геометрической и физической симметрии сосуда достаточно рассмотреть четвертую часть области его поперечного сечения и поставить плоскую краевую задачу термоупругости (рис.1). Решение проводилось с помощью разработанной FORTRAN-программы, визуализация результатов – с помощью программы Tecplot 360.



$D=10$ м
 $R=21$ м
 $\nu=0,27$
 $E=2,1 \cdot 10^5$ МПа
 $\alpha=0,12 \times 10^{-4}$ 1/град
 $\lambda=0,11$ кал/см·сек·град
 Рисунок 1 – Расчетная схема
 многокамерного сосуда

Корпус сосуда подвергается воздействию стационарной температуры (рис.1). Рассматриваемая граница области разбивалась на 150 граничных элементов. Сначала после реализации уравнения теплопроводности определялось распределение поля температур (рис.2).

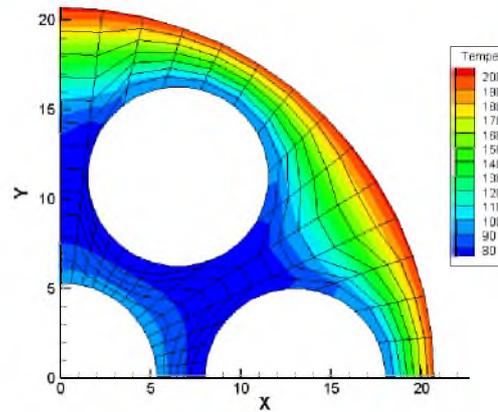
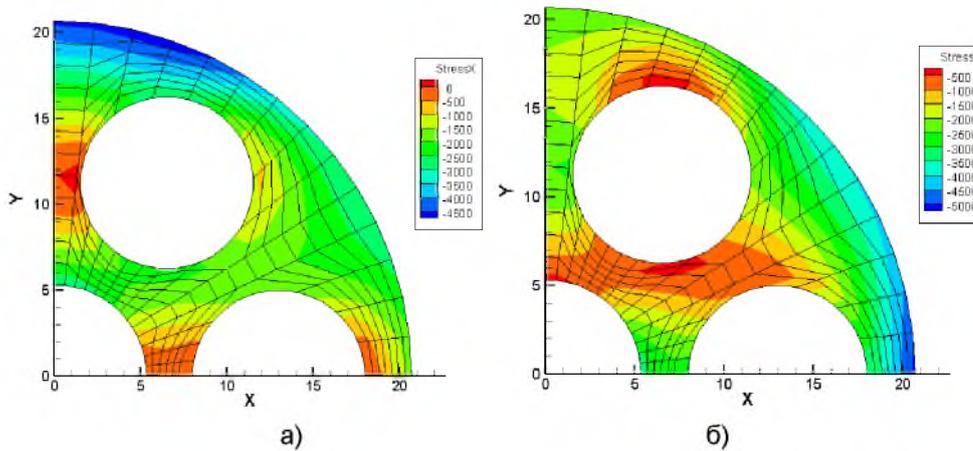


Рисунок 2 – Распределение температурных полей



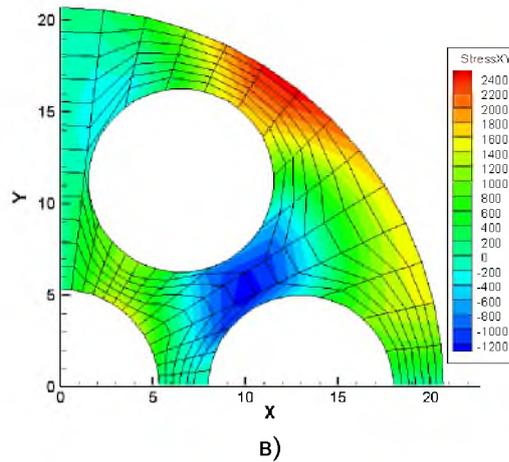


Рисунок 3 – Распределение напряжений σ_x (а), σ_y (б), τ_{xy} (в)

Результаты исследований показали, что максимальные сжимающие напряжения возникают на контуре центральной камеры сосуда. Максимальные растягивающие напряжения получились в точках внешнего контура. Радиальные напряжения имеют максимальные значения во внутренних точках области.

Таким образом, реализация данной плоской краевой задачи термоупругости методом потенциала позволяет осуществить оптимизацию конструкции многокамерного сосуда.

Отметим, что разработанная FORTRAN-программа реализации СИУ дает возможность исследовать также напряженно-деформированное состояние конструктивных элементов и при воздействии механических усилий.

Особенности решения задачи термоупругости при нестационарном температурном поле

Как известно [3], у нестационарных тепловых процессов температура является функцией и координат, и времени:

$$T = f(x, y, t). \quad (61)$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение теплопроводности при отсутствии внутренних источников тепла в виде (10) с граничными условиями [5].

Согласно [2], для решения задач нестационарной теплопроводности методом потенциала используются 2 основных подхода: применение пошаговых схем, зависящих от времени, что приводит к сложности интегрирования по временной переменной, или исключение временной зависимости в СИУ. В этом случае исходное уравнение параболического типа заменяется более удобным для численной реализации уравнением в частных производных эллиптического типа. Недостаток: сложность обратного преобразования, особенно при зависящих от времени граничных условиях.

Решение ДУ (10) разыскивается в виде двумерных потенциалов простого (62) или двойного (63) слоев [5], которые вне точек поверхности, по которой проводится интегрирование, являются решениями уравнения теплопроводности:

$$V(x, t) = \int_0^t ad\tau \left[\int_L T(x, t, y, \tau) v(y, \tau) \right] dl_y, \quad (62)$$

$$W(x, t) = \int_0^t ad\tau \left[\int_L \frac{\partial T}{\partial n} \mu(y, \tau) \right] dl_y, \quad (63)$$

где x – параметрическая точка, y – переменная точка интегрирования (текущая точка), τ – текущее время на интервале интегрирования, n – внутренняя нормаль к границе, μ, ν – плотности тепловых потенциалов (рисунок 4).

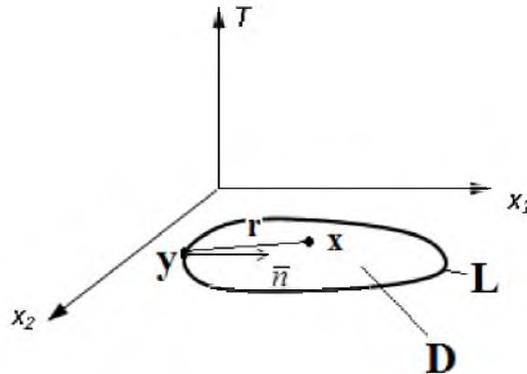


Рисунок 4 – Расположение параметрической и текущей точек

В выражениях (62) и (63) функция T является фундаментальным решением уравнения теплопроводности [5]:

$$T(x, t, y, \tau) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a(t-\tau)}} \right)^d e^{-\frac{r^2}{4a(t-\tau)}}, \quad (65)$$

где $r = \sqrt{x_1 - x_0^2 + y_1 - y_0^2}$ – расстояние между фиксированной и параметрической точками, d – число, характеризующее размерность пространства, L – граница области (при $d=2$: – замкнутая кривая). Для двумерных задач:

$$T(x, t, y, \tau) = \frac{1}{4\pi a(t-\tau)} e^{-\frac{r^2}{4a(t-\tau)}} \quad (66)$$

Выражение (63) используется в случае решения задачи теплопроводности с граничными условиями первого рода [5], (64) – в случае решения краевых задач с граничными условиями второго и третьего рода. При задании смешанных граничных условий решение определяется в виде суммы тепловых потенциалов простого слоя по той части поверхности, где заданы граничные условия 2-го и 3-го рода, и потенциала двойного слоя по той части поверхности, где заданы граничные условия 1-го рода. При ненулевых начальных условиях задачи можно использовать также интеграл Пуассона.

Рассмотрим решение задачи с граничными условиями первого рода, т.е. когда на границе задано распределение температуры $F(y, \tau)$. Эту задачу иногда обозначают как задачу типа Дирихле [4]. Продифференцируем сначала выражение для T^* по направлению нормали:

$$\frac{dT^*}{dn_y} = -\frac{1}{4\pi a(t-\tau)} e^{-\left(\frac{r^2}{4a(t-\tau)}\right)} \frac{r \cos \varphi}{2a(t-\tau)}, \quad (67)$$

где $\frac{dr}{dn_y} = \cos(r, n_y) = \cos \varphi$, φ – угол между r и нормалью n к контуру L в точке y .
Значит,

$$\frac{dT^*}{dn_y} = -\frac{\pi}{4\pi a(t-\tau)} \frac{2r}{4\pi a(t-\tau)} \cos \varphi e^{-\left(\frac{r^2}{4a(t-\tau)}\right)} = -\frac{2\pi r \cos \varphi}{4\pi a(t-\tau)^2} e^{-\left(\frac{r^2}{4a(t-\tau)}\right)} \quad (68)$$

Подставляя полученное выражение в выражение для потенциала двойного слоя, получаем:

$$W(x,t) = 2\pi \int_0^t \frac{d\tau}{4\pi a(t-\tau)^{3/2}} \int_L r \cos \varphi e^{\left(\frac{r^2}{4a(t-\tau)}\right)} \mu(y,\tau) dl_y. \quad (69)$$

Учтем, что при подходе к точкам границы области S тепловой потенциал двойного слоя $W(x,t)$ имеет разрыв [5]:

$$W^+_{x,t} = +\frac{\mu(x,t)}{2} + W(x,t) \quad (70)$$

$$W^-_{x,t} = -\frac{\mu(x,t)}{2} + W(x,t) \quad (71)$$

где W^+, W^- – предельные значения тепловых потенциалов при подходе вдоль нормали к границе соответственно изнутри и извне. Учитывая формулы скачка (70), (71), можно получить интегральное уравнение для определения плотности потенциала μ , подставляя (69) в граничное условие первого рода:

$$\pm \frac{1}{2} \mu(x,t) + 2\pi \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{4\pi a(t-\tau)^{3/2}}} \int_L r \cos \varphi e^{\left(\frac{r^2}{4a(t-\tau)}\right)} \mu(y,\tau) dl_y = F(y,\tau) \quad (72)$$

где $F(y,\tau)$ – значение температуры на границе области в точке y в момент времени τ .

Полученное интегральное уравнение второго рода в двумерном пространстве t, L носит Фредгольмов характер по переменной L и имеет признаки уравнения Вольтера по переменной t . Ядро полученного уравнения имеет сингулярную особенность в точке $x=y$ в момент времени $t=\tau$. Знак "-" в (72) применяется при решении внешней задачи, т.е. когда распределение температуры ищется вне области, знак "+" – для внутренней задачи.

В результате решения уравнения (72) будет найдена плотность $\mu(y,\tau)$ потенциала двойного слоя, что даст возможность найти распределение температуры в любой внутренней точке x рассматриваемой области D в момент времени t .

Рассмотрим численное решение нестационарной задачи термоупругости при поверхностной плазменной закалке верхнего торцевого сечения цилиндрического пуансона для пробивки отверстий в листовом металле. Такого рода температурное воздействие моделирует реальный процесс поверхностной плазменной закалки, необходимый для повышения износостойкости и срока службы инструмента.

Граничные условия в случае нестационарного теплового анализа соответствовали случаю приложения температурной нагрузки по внешним поверхностям модели (коэффициент конвекции $1000 \text{ Вт}/(\text{К}\cdot\text{м}^2)$). К верхней грани пуансона прикладывалась температура 650°C в течении 10 с. Материал – сталь X12M,

теплоемкость $c = 750 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot^\circ\text{C}}$, коэффициент теплопроводности $\lambda = 45 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot^\circ\text{C}}$,

коэффициент температурного расширения $\alpha = 15 \frac{\text{Вм}}{\text{м}^2\cdot^\circ\text{C}}$. При статическом анализе нижняя грань пуансона считалась неподвижной. Исследование НДС проводилось с использованием разработанной на языке FORTRAN-программы решения методом граничных интегральных уравнений (ГИУ), а для верификации результатов использовался конечно-элементный вычислительный комплекс ANSYS.

На рисунках 5–8 приведены типичные поля температур, напряжений и перемещений для моментов времени 1 с и 10 с.

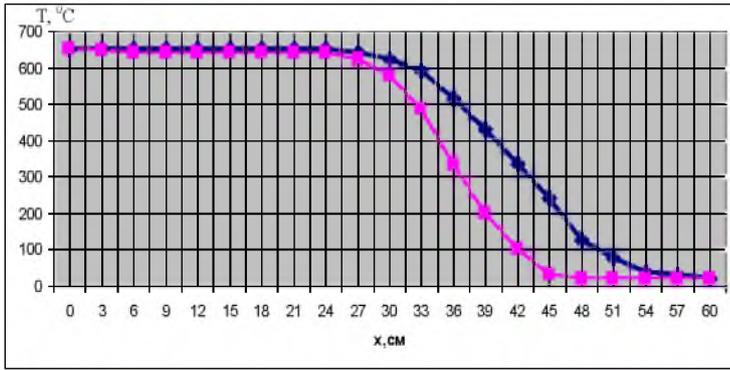


Рисунок 5 – Зависимость температуры от координаты в вдоль оси вращения в различные моменты времени

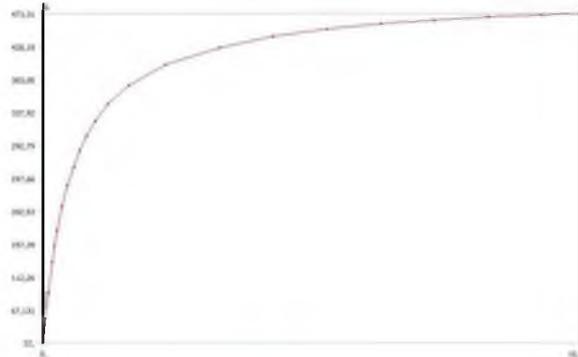
Таблица 1 – Результаты расчета температур вдоль оси вращения в зависимости от координаты

| x, cm | $T, ^\circ\text{C}$ ($t=1\text{c}$) | $T, ^\circ\text{C}$ ($t=10\text{c}$) |
|----------------|--|---|
| 0 | 650 | 650 |
| 3 | 647 | 650 |
| 6-24 | 642 | 650 |
| 27 | 623 | 642 |
| 30 | 578 | 623 |
| 33 | 485 | 591 |
| 36 | 333 | 516 |
| 39 | 200 | 431 |
| 42 | 100 | 336 |
| 45 | 30 | 240 |
| 48 | 22 | 126 |
| 51 | 22 | 78 |
| 54 | 22 | 40 |
| 57 | 22 | 33 |
| 60 | 22 | 22 |



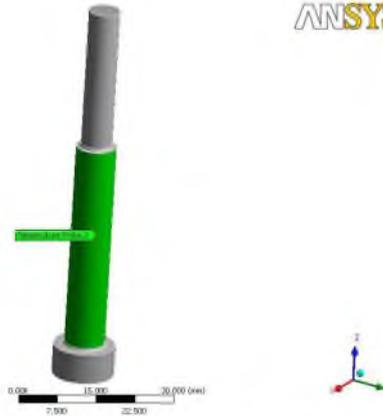
а)

Temperature Probe 2
04.06.2009 12:36



б)

ANSYS



а – решение методом потенциала

б – конечно-элементное решение (результат ANSYS)

Рисунок 6 – Зависимость температуры от времени на средней грани пуансона

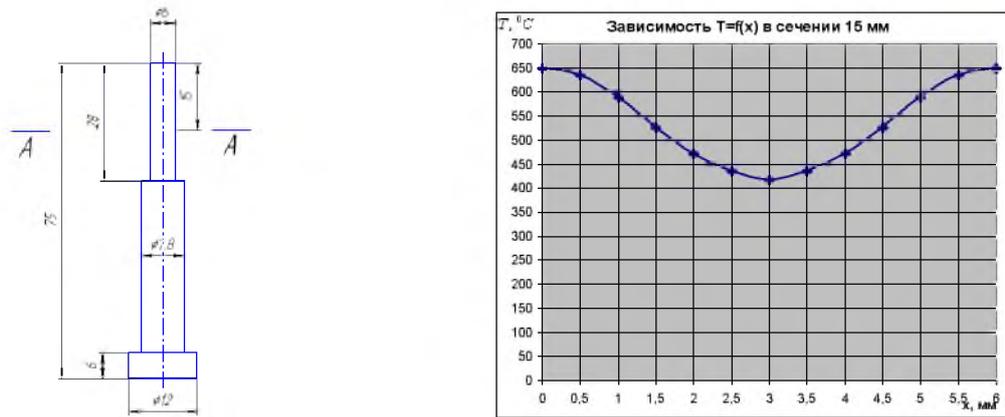
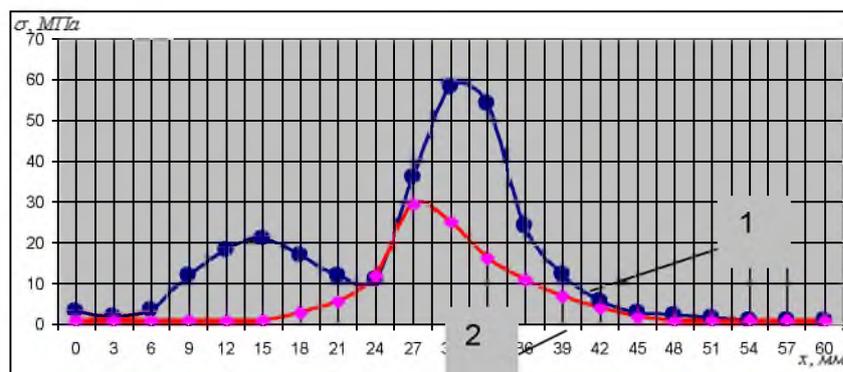


Рисунок 7 – Зависимость температуры от радиуса в сечении $x=15$ мм в момент времени $t=0,5$ с (сечение А–А) – решение методом граничных интегральных уравнений

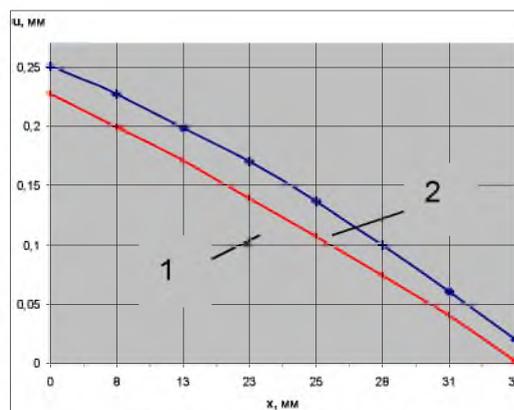


1 – $t = 1$ с, 2 – $t = 10$ с

Рисунок 8 – Зависимость суммарных напряжений от координаты вдоль оси симметрии (результат решения методом ГИУ)

На оси симметрии вблизи изменения диаметра пуансона происходит резкий рост эквивалентных напряжений по Мизесу. В момент времени $t=1$ с опасными являются точки на оси посередине рабочей части длиной 28 мм и в непосредственной близости от перепада диаметра при расстоянии от свободного торца 30 мм на утолщенной части пуансона диаметром 7,8 мм, где температурные напряжения достигают 59 МПа. При $t=10$ с опасными являются точки на части с диаметром 6 мм при расстоянии 26...27 мм. Это объясняется геометрией пуансона.

Кроме того, проведены исследования термонапряжений и перемещений в различных моменты времени в точках на наружном контуре. Результаты показывают, что опасными являются точки в местах изменения диаметра с 6 до 7,8 мм.



1 – $t = 1$ с, 2 – $t = 10$ с

Рисунок 9 – Суммарные перемещения в сечении в различные моменты времени (ГИУ – решение)

Типичные результаты конечно-элементного решения с помощью ANSYS приведены на рисунках 10, 11.

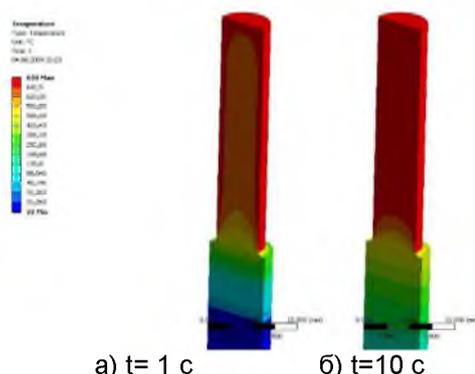


Рисунок 10 – Поле температур в сечении плоскостью в различные моменты времени

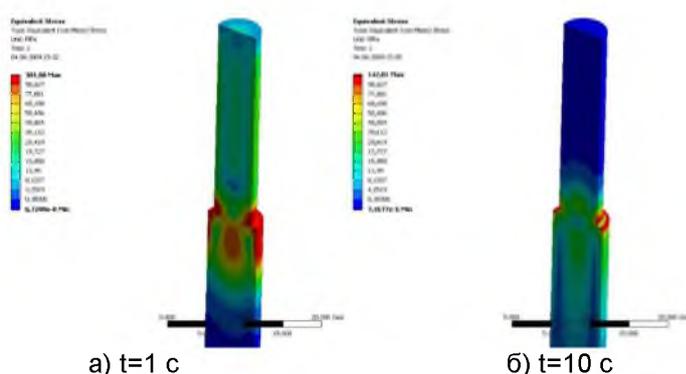


Рисунок 11 – Поле эквивалентных напряжений по Мизесу в сечении плоскостью в различные моменты времени

Рассмотренные программы представляют возможность пользователю вести анализ полей температур и термонапряжений для плоских тел с произвольной геометрией границы области и различными краевыми условиями, в т.ч. и многосвязных областей. Имеется возможность редактирования исходных данных и варьирования параметров нагрева и свойств материала.

Список литературы:

1. Бурчуладзе, Т. В. Развитие метода потенциала в теории упругости / Т.В.Бурчуладзе, Т. Г. Гегелиа. – Тбилиси : Мацниереба, 1986. – 226 с.
2. Бреббия, К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Врорубел. – М. : Мир, 1987. – 524 с.
3. Коваленко, А. Д. Основы термоупругости / А.Д. Коваленко. – Киев : Наукова думка, 1970. – 239 с.
4. Хвисевич, В. М. Прямое решение трехмерных краевых задач несвязанной стационарной термоупругости методом интегральных уравнений теории потенциала: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.04 / В. М. Хвисевич. – М. : МИСИ, 1980. – 230 с.
5. Беляев, Н. М. Методы нестационарной теплопроводности / Н. М. Беляев, А. А. Рядно. – М.: Высшая школа, 1978. – 328 с.