

## Глава 20. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ДЕФОРМАЦИОННОМ ПЛАКИРОВАНИИ ГИБКИМ ИНСТРУМЕНТОМ

Леванцевич М.А., Громько Г.Ф.

Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси,  
г. Минск, Беларусь, E-mail: levancev@mail.ru

Институт математики НАН Беларуси, г. Минск, Беларусь  
г. Минск, Беларусь, E-mail: grom@im.bas-net.by

### Введение

Одним из эффективных путей повышения ресурса узлов трения мобильных машин и технологического оборудования является нанесение защитных покрытий на рабочие поверхности трущихся деталей [1-6]. Современное машиностроение располагает достаточно большим разнообразием средств и методов нанесения подобных покрытий. К их числу, например, относятся методы гальванического осаждения, газотермического и ионно-плазменного напыления, лазерного легирования, микродугового оксидирования, ионной имплантации, золь-гель методы и др. Однако их применение, не всегда экономически оправдано. В ряде случаев это связано с необходимостью использования сложного дорогостоящего оборудования, тщательной подготовкой поверхности под покрытие, утилизацией вредных отходов и др. Иногда серьезную проблему может представлять и последующая механическая обработка сформированных покрытий. Все это, в целом, отрицательно влияет на стоимостные показатели покрытий и приводит к неоправданному росту финансовых затрат. Поэтому задача создания экономичных и экологически чистых технологий формирования покрытий, является весьма актуальной.

В последние годы внимание специалистов привлечено достаточно простой в реализации, мало энерго- и металлоемкий, экологически чистый и высоко производительный метод формирования покрытий деформационным плакированием гибким инструментом (ДПГИ), получивший свое бурное развитие в 80-е годы прошлого столетия благодаря работам ученых Магнитогорского государственного технического университета им. Г.И. Носова, Белевского Л.С., Анцупова В.П., Завалищина А.Н., Кадошникова В.И. и др. При реализации процесса ДПГИ в качестве гибкого инструмента используется

вращающаяся металлическая щетка (ВМЩ) 1 (рис.1) с проволочным ворсом, находящаяся во фрикционном контакте одновременно с поверхностями обрабатываемой детали 2 и компактированного бруска 3, используемого в качестве материала покрытия (донора). При этом покрытие 4 на поверхности детали формируется за счет переноса ворсинками щетки микрочастиц материала донора. В данном случае ворсинки не только переносят материал покрытия, но и осуществляют ударное воздействие на поверхность детали, способствуя, таким образом, ее упрочнению. В зависимости

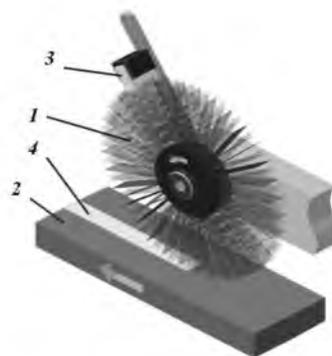


Рисунок 1 – Схема процесса плакирования гибким инструментом

от состава материала-донора или их комбинации представляется возможным формировать покрытия практически любого функционального назначения [7-10].

Необходимо отметить, что к настоящему времени известно большое количество публикаций посвященных исследованию процесса ДПГИ. В частности, наряду с предложением новых конструкций достаточно хорошо изучены вопросы влияния конструктивных и кинематических параметров ВМЩ на геометрические и энергосиловые параметры зоны контакта проволочного ворса с поверхностью детали, а также напряженно-деформированное и температурное состояние поверхностного слоя детали. Что, в определенной степени, способствовало стабилизации процесса плакирования и формированию слоя покрытия, преимущественно из цветных

металлов, толщиной 10...50 мкм. Однако, вопросы фрикционного взаимодействия ворса ВМЩ с поверхностью материала донора до настоящего времени остались вне внимания исследователей. Их изучение, по нашему мнению, не только могло бы расширить область применения технологии ДПГИ как в плане нанесения покрытий из более тугоплавких, чем цветные металлы материалов, так и формирования покрытий с повышенной толщиной слоя.

Анализ известных результатов исследований приводит к утверждению, что описание всех свойств материалов, имеющих влияние на формирование покрытия, требует большого количества параметров, включающих как индивидуальные свойства каждого из контактирующих тел, так и их взаимосвязи. Все это требует разработки единого подхода и учета основных факторов, влияющих на формирование покрытия. Трудности, связанные со сложностью происходящих физико-химических и механических, тепловых процессов в зоне контакта и их взаимовлияния послужили толчком для разработки методов исследований контактируемых материалов, основанных на последовательном упрощении и дающих возможность переносить результаты моделирования на реальные объекты хотя бы приближенным способом.

Основной задачей теории моделирования является определение однозначных соотношений между моделью и реальным процессом и созданию в модели механизма трения и съема материала (изнашивания) идентичного реальному. Реальная сложная система заменяется предположительно эквивалентной моделью, поведение которой должно соответствовать наблюдаемым закономерностям. Однако даже в простейшем случае трение и износ состоят из многих взаимно влияющих друг на друга процессов, не все из которых формально описаны с достаточной точностью, что и определяет некоторые трудности при создании соответствующих методов решения поставленных задач. Степень правдоподобия выбранной модели определяется правильным описанием экспериментально установленных основных закономерностей.

Математическое моделирование и вычислительные технологии находят широкое применение в практике инженерных исследований и промышленном конструировании и являются общепринятым подходом при разработке современных технологий. Широкое распространение получили многочисленные программные продукты, в том числе и коммерческие. Коммерческие пакеты представляют собой сложные многокомпонентные системы, имеющие трехступенчатую структуру: сеточный генератор, расчетный модуль, графический интерпретатор результатов. В пакеты включаются широкие наборы математических моделей основных управляющих физических процессов и методов решения систем разностных уравнений, из элементов которых конструируется решение той или иной задачи. Широкое распространение вычислительных пакетов создает иллюзию того, что они позволяют решить любую задачу. Используемые в них наборы моделей и численных методов далеки от совершенства, поскольку научные исследования по ним не закончены. В создании пакетов наблюдается стремление к охвату всего многообразия моделей, причем иногда математическая сторона вопроса преобладает над здравым физическим смыслом. Вот почему разработка математических моделей, отражающих взаимосвязи различных процессов, для сложных технологий является актуальной. В работе основное внимание уделяется вопросам математического моделирования процессов, сопутствующих технологии ДПГИ.

Обычно под математическим моделированием понимается совокупность математических объектов и связей между ними, чаще всего описываемых системами дифференциальных уравнений с соответствующими граничными и начальными условиями, которые отражают основные свойства контактирующих материалов и процессов, происходящих в них; последующее изучение ее методами вычислительной математики с привлечением средств современной вычислительной техники. Любое применение этой технологии состоит из последовательности этапов:

- формируется область, где рассматривается процесс и формулируются необходимые физические условия, описывающие изучаемый процесс в ней;
- рассматриваются процессы, происходящие в выбранной области, которые описываются системой дифференциальных уравнений;

–выбирается численный метод для решения, который включает построение расчетной системы узлов (сетки) в рассматриваемой области, задание начальных и граничных условий на сетке, построение аппроксимирующих уравнений для нахождения базовых сеточных величин и алгоритм решения, на основании которого пишется программа для компьютера; находит решение и записывается в память;

–решение отображается в виде графиков, таблиц и пр.

Основы технологии плакирования гибким элементом

Технология ПГИ включает сбалансированный подбор многих конструктивных и технологических параметров. В различной степени на стабильность процесса нанесения равномерного сплошного покрытия оказывают влияние следующие параметры:

–*конструктивные* (диаметр и ширина щетки, диаметр, длина и плотность набивки ворса);

–*технологические* (частота вращения щетки, скорость перемещения обрабатываемого изделия, натяг, время обработки);

–*термодинамические* (температура в зоне контакта ворса с поверхностью, температура и свойства материала покрытия и обрабатываемой детали и др.). Основой плакирования гибким инструментом является трение материалов в зоне контакта и последующий съем материала. Процесс плакирования заключается в формировании контакта ворсинок вращающейся металлической щетки с материалом донора (покрытия), съемом частичек материала покрытия и нанесением его на обрабатываемую поверхность. Указанный процесс повторяется циклически. Отличие на каждом цикле взаимодействия будет в изменении свойств и поверхности донора и образца в результате съема и нанесения частичек материала покрытия.

При контактировании различных поверхностей существенным является площадь их фактического касания. Одной из важных составляющих, влияющих на состояние поверхностного слоя материала, является температура. Поэтому при исследовании трения, особенно при высоких нагрузках и скоростях скольжения, кроме деформационной составляющей, необходимо обязательно учитывать фрикционный нагрев поверхности трения, а также рост температуры в объеме материала. Из-за дискретности контакта тепловой режим, реализующийся на поверхности трения и вблизи нее, является нестационарным. Это обусловлено температурными «вспышками», возникающими на пятнах фактического касания. В связи с этим, модификация структуры поверхностных слоев является результатом совместного теплового и механического воздействия. Вопрос взаимного влияния теплового и механического воздействий недостаточно хорошо изучен. Лишь в моделях тепловой динамики трения и изнашивания А.В. Чичинадзе, предназначенных для решения прикладных задач, учитываются изменения упругих и теплофизических свойств от температуры. Большинство же аналитических и расчетных моделей, описывающих поведение материала на контакте в масштабе от макроскопического до атомарного, рассматриваются тепловые и механические процессы при трении независимо.

Сложные явления, наблюдаемые при трении в области контакта, не дают возможности составить полную физическую модель процесса и дать ее полное математическое описание. При математическом моделировании достаточно сложного технического процесса описать его поведение одной математической моделью достаточно сложно. Поэтому, как правило, к таким техническим процессам применяют принцип декомпозиции, который состоит в условном разбиении процесса на отдельные более простые блоки и элементы, допускающие их независимое исследование и с последующим учетом взаимного влияния блоков и элементов друг на друга. При моделировании следует учитывать степень детализации рассматриваемых процессов, которая определяет уровень модели: микро-, макро- и метаяуровень. В данной работе остановимся на основных процессах плакирования, которые опишем с помощью математических моделей макроуровня в рамках представлений механики сплошной среды.

Выберем группу факторов, которые будем рассматривать как входные параметры для сложного трибологического процесса: окружающая среда; конструктивные

параметры щетки (диаметр и ширина щетки, диаметр, длина и плотность набивки ворса); технологические параметры (частота вращения щетки, натяг, время обработки, место закрепления донора, скорость перемещения обрабатываемого изделия) и термодинамические (начальная температура ворса, донора и образца), а также, известные зависимости теплофизических и механических свойств материала ворса, покрытия и образца от температуры.

Проведенный анализ процесса плакирования позволил выделить следующие задачи для моделирования:

- формирование пятна контакта ворса с донором (покрытием) и образцом и описание области для исследования тепловых полей и напряжений;
- исследование температурных полей в доноре (образце) и в контактирующих ворсинках в текущий момент времени;
- нахождение напряженного состояния в доноре и анализ реологического состояния материала донора в процессе обработки;
- снос материала покрытия ворсинкой с поверхности донора;
- исследование температуры в ворсинках с прилипшим материалом покрытия в процессе вращения щетки (обдув воздухом в процессе вращения щетки);
- снятие материала покрытия с ворсинки и формирование слоя покрытия на образце в текущий момент времени и др.

Рассмотрим поэтапно ряд математических моделей, описывающих последовательные стадии процесса плакирования.

### Математическое моделирование основных процессов

Нанесение покрытий осуществляется механическим способом без применения предварительной подготовки поверхности. Рабочим инструментом является вращающаяся с высокой скоростью металлическая щётка (гибкий инструмент), находящаяся в одновременном контакте с обрабатываемой поверхностью и бруском из материала покрытия [8-10]. Покрытие формируется за счет переноса ворсинками щетки материала покрытия (микрочастиц) из контактирующего с ней материала-донора и последующего нанесения его на поверхность обрабатываемой детали. Рассмотрим первый этап этого процесса – контакт ворсинок щетки с материалом покрытия (донором), который сопровождается ударом и скольжением ворсинок по поверхности донора, подготовкой материала в сильно возбужденное аморфизированное состояние, эквивалентное «течению» материала, что способствует адгезии микрообъема материала к концу ворсинки и последующего его съема с поверхности донора.

Пусть донор представляет брусок с размерами  $a \times b \times h$ , нижнее основание которого жестко закреплено.

Введем двумерную декартовую систему координат  $Oxz$ , начало координат которой ( $T.0$ ), поместим в левый верхний угол бруска. Ось  $Ox$  направим от  $T.0$  по верхней поверхности бруска, контактирующей с ворсинками щетки, ось  $Oz$  – перпендикулярно ей по высоте бруска. Будем считать, что ворсинки длиной  $l_v$  консольно закреплены на расстоянии  $r_0$  от оси вращения щетки, т.е. радиус щетки  $R_{щ} = r_0 + l_v$ . Условная схема контакта концов ворсинок щетки с донором приведена на рисунке 2.

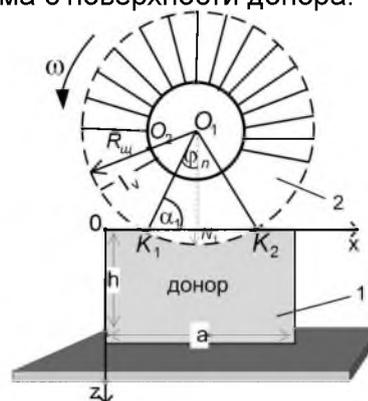


Рисунок 2 – Условная схема процесса:  
1 – брусок из материала покрытия (донор), 2 – металлическая щетка

Обозначим через  $\varphi_n$  – угол входа гибкого элемента ворсинки в зону контакта с донором,  $N_1$  – натяг (значение величины относительного сближения оси вращения щетки с поверхностью донора),  $N_1 \ll R_{щ}$ . Тогда угол входа гибкого элемента в зону контакта с донором можно приблизительно найти по формуле

$$\varphi_n = \arccos \frac{(R_{щ} - N_1)}{R_{щ}}, \quad (1)$$

а угол наклона  $\alpha_1$  ворсинки к поверхности донора в момент касания (точка  $K_1$ ) вычислим по формуле  $\alpha_1 = \pi/2 - \varphi_n$ .

### 1. Формирование области контакта ворсинок с поверхностью

Определим поверхность контакта ворсинок щетки с поверхностью донора, которая необходима для задания граничных условий и условий сопряжения для нахождения напряженно-деформированного и теплового состояния донора и ворсинок в процессе контакта.

Предварительно проверим следующее условие:  $R_{щ} > \sqrt{(R_{щ} - N_1)^2 + a^2}$ , где  $a$  – длина донора,  $N_1$  – натяг. Если это условие не выполняется, то имеем режим, когда ворсинки перестают контактировать своими торцами с верхней кромкой донора. Натяг в этом случае будет максимальным и вычисляется по формуле  $N_{1,max} = R_{щ} - \sqrt{R_{щ}^2 - a^2}$ . При значениях натяга выше максимального, ворсинки контактируют с кромкой боковой поверхности донора. Поэтому, в дальнейшем полагаем, что условие выполняется для заданных значений радиуса щетки и натяга.

Зная угол наклона первой ворсинки, определим координату  $x_1^*$  точки входа 1-ой ворсинки на поверхности донора – точка контакта  $K_1$  (рис.2)

$$x_1^* = 0.5 \cdot a - R_{щ} \sin(\varphi_n) \quad (2)$$

Для остальных ворсинок координаты точек контакта с донором в свободном состоянии, определим с учетом плотности набивки ворса  $n_v$  в щетке. Плотность набивки ворса  $n_v$  определяется соотношением суммарной площади торцевых сечений ворсинок к площади боковой поверхности цилиндра, образованного наружным диаметром щетки  $n_v = S_b / S_{щ}$ , где  $S_b = s_v M_b M_L$  – часть боковой поверхности щетки,

занимаемой торцами ворсинок;  $s_v = \frac{\pi d_v^2}{4}$  – площадь сечения ворсинки,  $d_v$  – диаметр ворсинки;  $M_b = b / d_v$  – число ворсинок по ширине щетки;  $M_L = 2\pi R_{щ} / \Delta_v$  – число ворсинок по длине окружности щетки;  $S_{щ} = 2\pi R_{щ} \cdot b$  – площадь боковой поверхности щетки,  $b$  – ширина щетки,  $R_{щ}$  – радиус щетки.

Подставляя выражения параметров в выражение для плотности набивки, найдем расстояние между концами соседних ворсинок  $\Delta_v$  в свободном состоянии (или окружной шаг гибких элементов по длине окружности щетки в свободном состоянии)  $\Delta_v = \pi \cdot d_v / (4n_v)$ . Угловой шаг положения гибких элементов в щетке определим по формуле  $\Delta_\varphi = \Delta_v / R_{щ} = \pi \cdot d_v / (4n_v R_{щ})$ .

Зная угловой шаг нетрудно определить количество ворсинок, контактирующих с поверхностью донора

$$M_{do} = 2\varphi_n / \Delta_\varphi + 1 \quad (3)$$

Угол наклона  $\alpha_m$   $m$ -ой ворсинки к поверхности донора и координату ее центра найдем по формулам

$$\alpha_m = \frac{\pi}{2} - (2\varphi_n - (m-1)\Delta_\varphi), \quad x_m^* = 0.5 \cdot a - (R_{щ} - N_1) \operatorname{ctg}(\alpha_m), \quad m = 2, 3, \dots, M_{do} \quad (4)$$

Пусть точкой  $K_2$  (рис.2) обозначена координата последней ворсинки, контактирующей с поверхностью донора в текущий момент времени. Тогда часть границы поверхности донора  $[K_1, K_2]$  определяет область поверхности донора, подвергающейся трению с ворсом щетки.

Из анализа экспериментов было установлено, что одиночная ворсинка, взаимодействуя с поверхностью при ударе, может непрерывно скользить по ней, скачкообразно перемещаться или одноразово соударяться с ней. Причина этого явления – упругое деформирование ворсинок под приложенными к нему силами и внедрение их в материал поверхности с последующим колебанием из-за возрастающих сил трения, приводящих к увеличению прогиба ворса. Для исследования прогиба ворсинки необходимо выяснить положение конца ворсинки относительно поверхности донора.

## 2. Модель внедрения свободного конца ворсинки вращающейся щетки в поверхность донора

Рассмотрим одиночную ворсинку массой  $m$ , движущуюся с угловой скоростью  $\omega$  относительно т. вращения  $O_1$  и ударяющуюся в некоторый момент времени о поверхность донора. Представим ворсинку в виде тела с сосредоточенной массой  $m$ , условно связанной с осью вращения ворсинки пружиной жесткостью  $c$ , движущейся с угловой скоростью  $\omega$  и ударяющейся о поверхность донора в точке  $K_1$ .

Обозначим через  $w=(u, w)$  – вектор перемещений в системе координат  $Oxz$  (рис.2). Тогда, если величина  $w>0$ , то ворсинка внедряется в материал донора, при отрицательном значении  $w$  – отскакивает. Положительное перемещение  $u$  указывает на величину продвижения ворсинки в сторону скорости движения щетки.

Уравнение движения свободного конца ворсинки в системе  $Oxz$  имеет

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{w}}{dt}$  – скорость перемещения конца ворсинки,  $\mathbf{F}$  – равнодействующая всех сил, приложенных к концу ворсинки.

Начальным условием для задачи (5) является скорость ворсинки в момент удара о поверхность донора, которая линейной скоростью вращения щетки  $v(t=0) = v(0) = v_0 = \omega R_{щ}$ .

Рассмотрим силы, действующие на конец ворсинки. В точке контакта ворсинки с донором на ворсинку действуют центробежная сила инерции  $\mathbf{F}_{цб}$ , сила упругости со стороны материала ворсинки  $\mathbf{F}_e^v$ , сила тяжести ворсинки  $\mathbf{F}_g$  и сила реакции основания донора  $\mathbf{F}_d$ . Силы вращения ворсинки предполагаем, что отсутствуют. Тогда  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{цб} + \mathbf{F}_e^v + \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_d$ . Центробежную силу инерции, направленную от центра вращения по радиусу вращения в точку касания с донором определим формулой  $F_{цб} = m\omega^2 R_{щ}$ , где  $m$  – масса ворсинки,  $\omega$  – угловая скорость вращения щетки,  $R_{щ}$  – расстояние от центра вращения до точки контакта с поверхностью, т.е. радиус щетки.

Предполагая материал ворсинки упругим, напряжения сжатия (растяжения), вызываемые в ворсинке под действием некоторой силы  $F_e^v$ , определим для упругого тела в соответствии с законом Гука как  $\sigma = \frac{F_e^v}{S_{сеч\,v}} = E_v \varepsilon$ . Здесь  $E_v$  – модуль упругости материала ворса (модуль Юнга),  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_v}$  – абсолютное сжатие (удлинение) ворсинки,  $l_v$  – первоначальная длина ворсинки,  $\Delta l$  – приращение под действием силы,  $S_{сеч\,v}$  – площадь поперечного сечения ворса. Тогда для силы  $F_e^v$  имеем выражение  $F_e^v = S_{сеч\,v} E_v \varepsilon$ . Поскольку жесткостью на растяжение называется величина  $c_v = E_v S_{сеч\,v}$ , а приращение  $\Delta l = w$  в принятой системе координат, то выражение для силы перепишем в следующем виде  $F_e^v = c_{1v} w$ , где  $c_{1v} = c_v / l_v$ ,  $l_v$  – длина ворсинки.

Обозначим силу препятствующую проникновению ворсинки в материал или силу реакции основания донора через  $F^d$ . Она зависит от свойств материала донора и определяется его реологическими соотношениями (упругость, пластичность, вязкость и др.). В одномерном приближении, можно предположить, что это – сила упругости, возникающая в доноре со стороны ворсинки. Тогда  $F_e^d = c_{1d}w$ , где  $c_{1d} = c_d / h$ ,  $c_d = E_d S_{сечv}$ ,  $E_d$  – модуль упругости материала покрытия.

На ворсинку действует сила тяжести  $F_g = mg$ , где вектор  $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$  – вектор свободного падения в выбранной системе координат, зависит от положения донора. Отметим, что поскольку сила тяжести незначительна по сравнению с другими силами, поэтому часто ею пренебрегают. Влияние скопления пучка ворса («подушки») при входе в зону контакта не учитываем.

Поскольку удар ворсинки о поверхность происходит достаточно быстро, то можно считать, что перемещение в сторону  $x$  не происходит. Это предположение позволяет нам сформулировать задачу о проникновении конца ворсинки в материал в одномерном приближении. Рассмотрим условие баланса сил (5) для этого случая.

Уравнение (2) в проекции на ось  $z$  выбранной системы координат имеет вид

$$m \frac{d^2 w(t)}{dt^2} = F_{цб,z} + F_{e,z}^v + F_g - F_{e,z}^d, \quad (6)$$

где  $w$  – перемещение конца ворсинки по направлению  $z$ ,  $F_{цб,z}$  – проекция центробежной силы на направление  $z$ ,  $F_{e,z}^v$  – проекция силы со стороны ворсинки,  $F_g$  – сила тяжести ворсинки,  $F_{e,z}^d$  – реакция материала донора на внедрение ворсинки. Здесь  $F_{цб,z} = F_{цб} \sin \alpha_1$ ,  $\alpha_1$  – угол наклона ворсинки к поверхности донора,  $F_{e,z}^v = F_e^v \sin \alpha_1$ ,  $F_g = mg$ .

Подставив формулы для сил в (6), получим дифференциальное уравнение второго порядка относительно перемещения  $w$  вида

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_1 w = m \omega^2 R_{цб} \sin \alpha_1 + mg_2 \quad (7)$$

$$c_1 = (-c_{1v} \sin \alpha_1 + c_{1d}) = S_{сечv} \left( -\frac{E_v}{l_v} \sin \alpha_1 + \frac{E_d}{h} \right);$$

где

с начальными условиями  $w|_{t=0} = 0$  и  $v = \frac{dw}{dt}|_{t=0} = v_{0,z}$ , где  $v_{0,z} = v_0 \cos \alpha_1$ .

Решая задачу (4), находим, что

$$w(t) = -\frac{(\omega^2 R_{цб} \sin \alpha_1 + g_2)m}{c_1} \cos\left(\sqrt{\frac{c_1}{m}} t\right) + \frac{v_0 \cos \alpha_1}{\sqrt{c_1/m}} \sin\left(\sqrt{\frac{c_1}{m}} t\right) + \frac{(\omega^2 R_{цб} \sin \alpha_1 + g_2)m}{c_1} \quad (8)$$

Решение  $w(t)$  справедливо для времени удара, при котором касательные напряжения либо не успевают возникнуть, либо достаточно малы по сравнению с силами удара. Согласно данным теории удара стержней [11], время удара можно определить как  $t_{impact} = 2l_v / c$ , где  $c = \sqrt{E_v / \rho_v}$  – скорость распространения упругих волн в материале,  $l_v$ ,  $E_v$ ,  $\rho_v$  – длина, модуль упругости и плотность материала ворса. Таким образом, для времени  $t < t_{impact}$  представленная модель справедлива и глубина проникновения в материал для этого времени определяется формулой  $w_v = w(t_{impact})$ .

Более сложная модель проникновения конца ворсинки в материал в двумерной постановке относительно неизвестных компонент перемещений  $u_v, w_v$  конца ворсинки была рассмотрена в работе [12].

В общем случае и в дальнейшем при контакте ворсинки с поверхностью донора силы реакции  $F_d$  со стороны донора будут изменяться, поскольку при воздействии ворса на материал покрытия в нем возникают напряжения, которые находятся из решения системы уравнений для напряженно-деформированного состояния донора.

Построенная модель позволяет прогнозировать значение величины внедрения ворсинки во время взаимодействия с материалом донора в зависимости от конструктивных параметров щетки, скорости вращения, материалов ворса и покрытия и является базовой для других моделей, в частности, для определения прогиба ворса и др.

При дальнейшем вращении щетки ворсинка движется (скользит) по поверхности донора и ее оставшаяся над поверхностью часть  $l=l_v-w_v$  испытывает изгиб.

### 3. Изгиб одиночной ворсинки, касающейся поверхности донора

Представим ворсинку в виде гибкого стержня с распределенной по его длине массой.

Введем локальную декартовую систему координат  $Oly$ , связанную с ворсинкой. Начало координат  $O$  поместим в точку закрепления ворса в щетке, а ось  $Ox$  – направим от точки закрепления по оси изначально прямой ворсинки, ось  $Oy$  – перпендикулярно оси  $Ox$  (рис.3). Считаем, что ворсинка сжимается некоторой силой. Опишем процесс изгиба жесткой упругой ворсинки под действием приложенных сил. Можно считать, что имеем случай закрепленных концов ворсинки: т.  $O$  – точка закрепления щетки, т.  $K$  – точка на поверхности донора, сжатых некоторой силой (рис.4). Под воздействием силы ворсинка получает малое искривление оси, вследствие чего в нем появляется изгибающий момент  $M$ . Как обычно, условимся считать, что если сила стремится вращать свое плечо вокруг центра против часовой стрелки, то момент силы будет положительный.

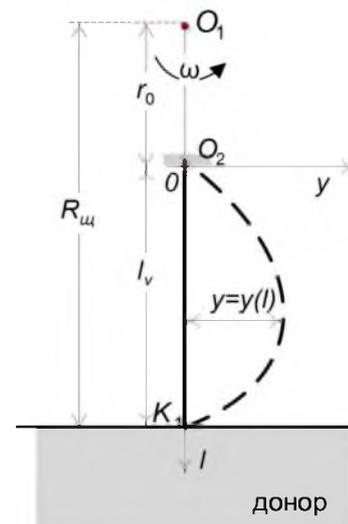


Рисунок 3 – Локальная система координат для нахождения изгиба одиночной ворсинки

Построим дифференциальное уравнение плоского изгиба линии в локальной системе координат, т.е. найдем функцию изгиба ворсинки  $y=y(l)$ . В зависимости от характера действующих нагрузок, приложенных к ворсинке, различают деформации растяжения (сжатия), кручения и изгиба. Будем считать, что перемещения вдоль длины ворсинки не значительны и кручение в ней отсутствует. Тогда, по аналогии с моделью гибкого изгиба тонкого стержня, построим модель изгиба ворсинки. Напишем условия равновесия: сумма действующих сил и действующих моментов относительно оси должны быть равны нулю

$$\frac{dQ_l}{dl} + q = 0 \quad \frac{dM_l}{dl} - Q_l = 0 \quad (9)$$

где  $Q_l$  – поперечная сила, отнесенная к единице длины сечения,  $M_l$  – изгибающий момент,  $q$  – поперечная нагрузка. Изгибающий момент через изгиб  $y$

определяется формулой  $M_l = -D \frac{d^2 y}{dl^2}$ , где  $D = E_v \cdot I$  – жесткость стержня,  $I$  – осевой

момент инерции площади поперечного сечения,  $E_v$  – модуль упругости материала

ворсинки;  $I = \frac{\pi d_v^4}{64}$ , где  $d_v$  – диаметр ворсинки.

Продифференцировав второе уравнение (9), подставив в него выражение для производной из первого и полагая жесткость стержня постоянной, получим следующее уравнение для изгиба  $y$

$$\frac{d^4 y}{dl^4} = q_0(l + r_0), \quad 0 < l < l_v, \quad (10)$$

где  $q_0$  – распределенная сила,  $q_0 = m_{0,v} \omega^2 (l + r_0)$ ,  $m_{0,v} = m_{0,v} / l_v$  – распределенная масса ворсинки.

Для решения (10) сформулируем граничные условия.

В точках задела пучка считаем, что ворсинки жестко закреплены, т.е. неподвижны. Тогда на этом конце рассмотрим условия для заземленного края:

$$y|_{l=0} = 0, \quad \left. \frac{dy}{dl} \right|_{l=0} = 0 \quad (11)$$

Предполагая также, что отскоку ударяющихся ворсинок, препятствуют движущиеся последующие ворсинки (скопления пучка ворса), можно считать удар ворсинок некоторым активным этапом, в конце которого скорость ворсинки становится равной нулю. Тогда на другом конце ворсинки  $l=l_v$  – считаем, что край оперт и задана сила, которую находим из второго уравнения (9):

$$y|_{l=l_v} = 0, \quad \left. \frac{d^3 y}{dl^3} \right|_{l=l_v} = -\frac{q_{gr}}{D} \quad (12)$$

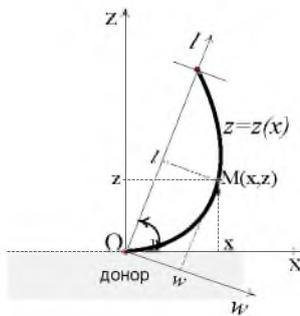
где  $q_{gr} = m_l v^2 (r_0 + l_v)$ ,  $v = \omega (r_0 + l_v)$ ,  $m_l$ ,  $l_v$  – соответственно масса и длина изгибающейся части ворсинки.

Решая задачу (10) с граничными условиями (11), (12) находим функцию

$$y = q_0 \frac{l^5}{120} + q_1 \frac{l^4}{24} + c_1 \frac{l^3}{6} + c_2 \frac{l^2}{2}, \quad 0 < l < l_v, \quad (13)$$

$$\text{где } c_1 = q_2 - 0.5 q_0 l_v^2 - q_1 l_v, \quad c_2 = -q_0 \frac{l_v^3}{24} - q_1 \frac{l_v^2}{6} - 0.5 c_1 l_v.$$

Функция  $y=y(l)$  – функция изгиба одиночной ворсинки в локальной системе координат (рис.3), связанной с осью ворсинки. Поскольку ось ворсинки в точке касания наклонена к поверхности донора под углом  $\alpha_1$  и испытывает изгиб, который описывается функцией (13) в локальной системе координат, то в исходной системе координат, связанной с поверхностью донора (рис.2), эту функцию найдем используя геометрические соображения.



Из геометрических соображений (рис.4), нетрудно найти координаты любой точки  $M(x, z)$  в системе координат  $Ozx$  через ее координаты в локальной системе координат  $O'l'$

$$\begin{cases} x = l \cos \alpha_1 + z \sin \alpha_1 \\ z = l \sin \alpha_1 - w \cos \alpha_1 \end{cases} \quad (14)$$

Рисунок 4 – Схема для расчета функции изгиба ворсинки в системе координат, связанной с донором

Таким образом, используя формулы (13), (14), находим функцию изгиба  $z=z(x)$  одиночной ворсинки относительно поверхности донора (рис.4). Поэтому, если изогнутая часть ворсинки не касается верхней поверхности донора, т.е. величина  $z>0$ , для  $x>0$ , где  $(x,z)$  – точки на линии изгиба  $z=z(x)$ , то это означает, что ворсинка контактирует с донором только своим торцом (диаметр  $d_v$  на поверхности). В противном случае, ворсинка контактирует частью своей длины. Тогда за линию контакта в основной системе координат (совокупность точек на поверхности донора  $(x,0)$ ), принимаем те значения  $x$ , для которых  $z\leq 0$ . Аналогично корректируется линия контакта для остальных ворсинок, касающихся донора.

В пятнах контакта образуются высокие давления, которые в сочетании со скольжением вызывают большие температуры в зонах касания и некоторой окрестности их. Это приводит к существенным изменениям структуры поверхностного слоя материала, к значительным механическим и температурным напряжениям, тем самым способствует протеканию ряда химических процессов, активизирует взаимную диффузию и др.

#### 4. Математическая модель тепловых процессов в доноре с учетом механической энергии деформации

Часть верхней границы донора подвергается контакту со щеткой. Известно, что на границе между телами, находящимися в трибологическом контакте, выделяется тепловая энергия. При трении при относительном движении твердых тел, имеющих контакт, происходит превращение кинетической энергии поступательного движения во внутреннюю тепловую энергию движения атомов поверхностных слоев трущихся пар [13]. Теплота распространяется в поверхностном слое трущейся пары в пятне контакта вглубь контактирующих тел. Причем, чем выше скорость относительного движения, тем на меньшую глубину распространяется температура. В процессе движения ворсинок щетки по донору почти вся механическая энергия, затрачиваемая ими на деформацию и трение, переходит в тепловую энергию, вызывая тем самым нагрев области контакта до температуры, превышающей иногда допустимые значения для материалов. Локальное повышение температуры в отдельных микроконтактах может быть настолько высоким, что может привести к плавлению и к изменению свойств контактирующих материалов; вызвать локальное тепловое расширение материала и тем самым изменить условия контакта. Кроме того, сложность расчета температурных полей контактирующих тел обуславливается теплоотдачей в окружающую среду с боковых стенок и трудностью определения граничных условий. Поэтому, температурное поле в контакте очень неоднородно и изучение его как для донора, так и для ворса составляет одну из основных задач для технологии плакирования.

В качестве двумерной области расчета рассмотрим область донора  $\bar{D} = [0, a] \times [0, h]$ , представленную на рисунке 2 с введенной декартовой системой координат  $Oxz$ . Составим двумерную математическую модель тепловых процессов в доноре на основе макроскопического подхода с учетом границы контакта ворсинок с материалом донора. Уравнение теплового баланса в доноре с учетом энергии деформации имеет вид

$$\rho C_{ef} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q, \quad (x, z) \in D, \quad t > t_0 \quad (15)$$

где  $\rho = \rho(T)$ ,  $\lambda = \lambda(T)$ ,  $C_{ef} = C_{ef}(T)$  – соответственно плотность, теплопроводность и эффективная теплоемкость материала донора, определяемая с учетом скрытой теплоты плавления  $L_m$  по формуле  $C_{ef} = c + L_m \delta(T - T_m)$ ,  $c = c(T)$  – удельная теплоемкость,  $\delta(T)$  – дельта-функция;  $Q$  – количество энергии, выделившееся в процессе механической деформации. Величина  $Q$  зависит от напряжений и скорости деформации и будет определена ниже в разделе 6.

В начальный момент времени  $t_0$  задаем начальную температуру донора:  $T(x, z) = T_0$ . В качестве граничных условий для задачи рассмотрим условия

теплообмена с окружающей средой вида  $-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \alpha_{to}(T - T_g)$  на границах области расчета, где  $n$  – внешняя нормаль к границе области,  $T_g$  – внешняя температура,  $T$  – текущая температура на границе,  $\alpha_{to}$  – коэффициент теплообмена, вид которого зависит от свойств окружающей среды.

Вид области расчета и ее границы, на которых задаются граничные условия, показаны на рисунке 5.

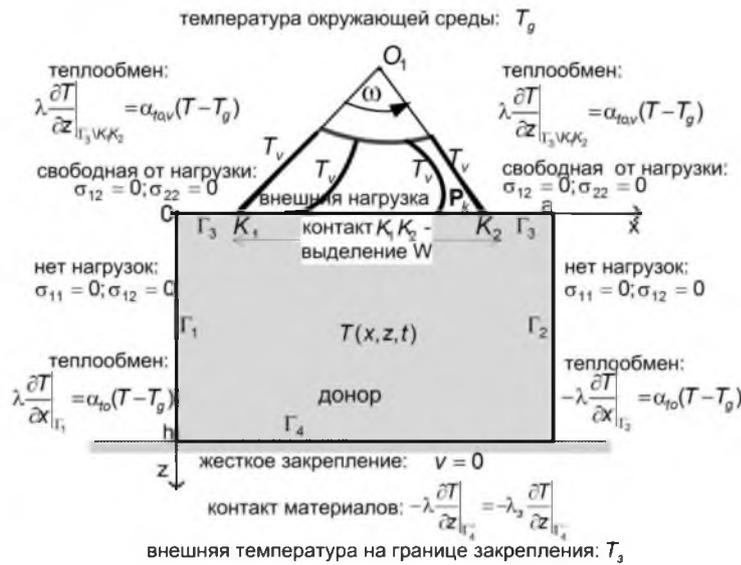


Рисунок 5 – Схематичное изображение области расчета и границ приложения нагрузок

На границах области расчета  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  рассмотрим условия теплообмена

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha_{to}(T - T_g) \quad , \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=a} = \alpha_{to}(T - T_g) \quad (16)$$

В случае охлаждения воздухом при температуре  $T_g=300$  К коэффициент теплоотдачи можно положить равным  $\alpha_{to} = 10.2 (T - T_g)^{0.25}$ .

Обмен тепловой энергией с окружающей средой через свободную от контакта со щеткой границу  $\Gamma_3$  опишем уравнением теплообмена с коэффициентом вынужденной теплоотдачи воздуха за счет вентиляторного эффекта щетки, который является функцией от линейной скорости вращения щетки  $\alpha_{to,v} = \alpha_{to,v}(v_0)$ :

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{\Gamma_3, K_1, K_2} = \alpha_{to,v}(T - T_g) \quad (17)$$

На поверхности трения  $[K_1, K_2]$  – граница контакта ворса с донором, происходит тепловыделение с удельной мощностью  $W$ . По литературным данным до 90-95 % всей мощности трения переходит в тепло. В рамках модельных представлений, будем полагать, что вся подводимая к системе энергия переходит в тепло, которое выделяется на поверхности трения. Таким образом, мощность тепловыделения на поверхности контакта будет равна произведению среднего давления в пятне контакта  $P_k$ , скорости щетки  $v_0$  (совпадающей с относительной скоростью движения щетки и донора), величине коэффициента трения  $k_{mp}$ :  $W = k_{mp} P_k v_0$ .

Тепло, выделяющееся на поверхности при трении, распределяется между трущимися телами в определенном соотношении, зависящем от многих факторов, в частности от теплофизических свойств контактируемых материалов. В работе [14] предполагают, что выделяющееся тепло  $W$  можно условно разделить на два потока,

идущих на нагрев трущихся тел, т.е.  $W=q_1+q_2$ , каждый из которых представляет долю тепла трения с некоторым коэффициентом распределения  $\alpha_{1,2}$  (пропорциональности). Величину  $\alpha_{1,2}$  предлагается находить приближенно из решения контактной задачи о нагреве двух полубесконечных трущихся тел:  $\alpha_{1,2} = \sqrt{\lambda_2 c_2 \rho_2} / (\sqrt{\lambda_1 c_1 \rho_1} + \sqrt{\lambda_2 c_2 \rho_2})$ , где  $\lambda_j, c_j, \rho_j$  – соответствующие коэффициенты теплопроводности, удельной теплоемкости и плотности трущихся тел.

Рассмотрим более общее условие на поверхности трения. Граничное условие на контакте ворса с донором представим в виде условий сопряжения тел из различных материалов и с учетом мощности тепловыделения  $W$  на поверхности трения (раздела материалов):

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{[K_1, K_2]^+} = \lambda_v \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{[K_1, K_2]^-} + W \tag{18}$$

На стыке материалов (граница закрепления донора  $\Gamma_4$ ) имеет место идеальный контакт, т.е. выполняется граничное условие сопряжения материала донора с

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{\Gamma_4^+} = -\lambda_3 \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{\Gamma_4^-}, \quad T \Big|_{\Gamma_4^+} = T_3 \Big|_{\Gamma_4^-}, \quad \text{где } T_3 -$$

материалом его закрепления вида

температура материала стыка, полагаем, что она не изменяется.

Система уравнений (15)–(18), описывающая нагрев донора с учетом выделившегося тепла за счет сил трения и механической энергии деформации, решается относительно температуры  $T(x, z, t)$ . Для ее решения необходимо знание температуры ворсинки в области контакта с донором, которую найдем из решения тепловой задачи в ворсинках, контактирующих с донором.

### 5. Математическая модель тепловых процессов в ворсинках

В сжато-изогнутом состоянии один конец ворсинки скользит вдоль зоны контакта щетки с донором, при этом, как уже отмечали, возникают источники теплоты, мощность которых обусловлена действием силы трения  $W$ . Тогда со стороны источника, происходит нагрев ворсинок. Составим математическую модель тепловых процессов в ворсинке в процессе контакта с донором. Поскольку длина ворсинки значительно превышает ее диаметр, то можно положить, что в поперечном сечении ворсинки температура почти одинакова и изменяется в основном по длине, т.е. температура в ворсинке есть функция от времени и от положения на оси ворсинки:  $T=T(l, t)$ . Тепловые процессы в текущий момент времени  $t$  в ворсинке опишем нестационарным уравнением теплопроводности в одномерной области  $[0, l_v]$  вдоль оси ворсинки. Для определенности, будем считать, что в первоначальный момент ворсинка имеет равномерную по оси температуру  $T_{v,inp}$ . Считаем, что скорость обдува ворсинки – скорость вращения щетки. Потери тепла через боковую поверхность ворсинки, связанные с ее охлаждением при вращении щетки, учтем путем введения в балансовое уравнение тепла внутреннего источникового члена  $q_g$ , который определим

$$q_g = \alpha_{tog} \frac{\Pi_v}{S_{сеч,v}} (T - T_g)$$

следующим соотношением

, где  $\alpha_{tog}$  – коэффициент теплоотдачи на боковой поверхности ворсинки с учетом вентиляторного эффекта обдува,  $\Pi_v$  – периметр ворсинки в сечении,  $S_{сеч,v}$  – сечение ворсинки,  $T_g$  – температура окружающего воздуха.

Уравнение теплового баланса в ворсинке имеет следующий вид

$$\rho_v C_{ef,v} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial l} \left( \lambda_v \frac{\partial T}{\partial l} \right) - q_g, \quad 0 < l < l_v, \quad t_0 < t < t_v \tag{19}$$

где  $\rho_v = \rho_v(T)$ ,  $C_{ef,v} = C_{ef,v}(T)$ ,  $\lambda_v = \lambda_v(T)$  – соответственно плотность, эффективная теплоемкость, теплопроводность материала ворса, зависящие от температуры в текущий момент времени  $t$ ;  $l_v$  – длина изгибающейся части ворсинки; координата  $l=0$  соответствует точке закрепления ворса в щетке;  $t_0$  – время входа ворсинки в контакт с донором;  $t_v$  – время выхода ее из контакта.

Начальные условия

$$T(l, t_0) = T_{v,inp}, \quad 0 \leq l \leq l_v, \quad (20)$$

где  $t_0$  – начальный момент времени,  $T_{v,inp}$  – заданная начальная температура ворса.

Граничные условия на торцах ворсинки:

в точке закрепления ворсинки на щетке  $l=0$  будем рассматривать одно из двух условий: условия теплообмена с окружающим воздухом в случае, если температура окружающей среды не совпадает с начальной температурой ворса

$$\lambda_v \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{l=0} = \alpha_{to,g} (T - T_g) \Big|_{l=0} \quad (21.1)$$

где  $\alpha_{to,g}$  – коэффициент теплообмена,  $T_g$  – температура окружающей среды;

либо, если температура окружающего газа совпадает с начальной температурой ворса, то можно считать, что на этом конце температура не меняется

$$T(l, t) \Big|_{l=0} = T_{v,inp}, \quad (21.2)$$

в точках контакта ворсинки с поверхностью (донора) рассмотрим граничное условие сопряжения (условие вида (18))

$$-\lambda_v \left. \frac{\partial T}{\partial l} \right|_{[K_1, K_2]^+} = -\lambda_d \left. \frac{\partial T}{\partial l} \right|_{[K_1, K_2]^-} + W \quad (22)$$

где  $\lambda_d$  – теплопроводность материала донора,  $W$  – мощность тепловыделения на поверхности трения.

Задача (19)-(22) решается для каждой ворсинки, находящейся в контакте с донором до времени выхода из контакта с поверхностью донора  $t_v$ . Это время определяется по скорости движения щетки длины границы  $K_1 K_2$ . При выходе ворсинок из контакта с донором, в зависимости от состояния материала донора в поверхностной ячейке контакта, возможен его съём.

## 6. Моделирование напряженно-деформированного состояния донора с учетом теплового расширения

В процессе контактного взаимодействия при движении ворсинок по поверхности донора возникают силы трения, которые приводят к возникновению напряжений и деформаций внутри материала. Уравнения движения среды выводятся из принципа сохранения количества движения тела некоторого объема, ограниченного поверхностью [15], и в тензорном виде имеют вид

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \text{div } \sigma \quad (23)$$

где  $\sigma$  – тензор напряжений, определяемый реологией среды и с учетом теплового расширения,  $\vec{u}$  – вектор перемещений (вектор скорости частиц сплошной среды определяется как  $\vec{v} = d\vec{u} / dt$ ),  $\rho$  – плотность среды.

Связь между напряжениями и перемещениями (деформациями) определяется реологией (среды) материала. Будем полагать, что в начальный момент материал представляет линейно-упругую среду [16]. Тогда для однородной изотропной среды в условиях плоской деформации с учетом теплового расширения должны выполняться следующие уравнения [17]:

связь между деформациями и перемещениями в виде:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha(T)(T - T_0), \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial z} - \alpha(T)(T - T_0), \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (24)$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \varepsilon_{33} = 0$$

закон упругости с учетом температурного расширения:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{ij} - \beta(T)(T - T_0) \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (25)$$

где  $\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ ,  $\beta(T) = (3\lambda + 2\mu) \alpha(T)$  – коэффициент объемного расширения;  $\alpha(T)$  – коэффициент линейного расширения;  $\lambda = \lambda(T)$ ,  $\mu = \mu(T)$  – коэффициенты Ламэ, выражающиеся через модуль упругости  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$  следующими формулами

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Компоненты тензора напряжений (25) в декартовой системе координат имеют вид

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial z} - \beta(T - T_0), \quad \sigma_{22} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} - \beta(T - T_0),$$

$$\sigma_{33} = \frac{\lambda(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{\lambda + 2\mu}, \quad \sigma_{12} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \sigma_{21} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad \sigma_{31} = 0, \quad \sigma_{32} = 0.$$

Уравнения равновесия (23)

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial z}, \quad \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial z} \quad (26)$$

могут быть преобразованы в уравнения относительно перемещений

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} - \frac{\partial(\beta(T - T_0))}{\partial x} \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial(\beta(T - T_0))}{\partial z} \end{array} \right. \quad (27)$$

Для однозначного решения системы (26) (или (27)) рассмотрим начальные условия, условия на границах области и условия на контакте разных материалов.

Начальные условия должны быть заданы в начальный момент времени  $t_0$  в виде известных функций для перемещений  $\vec{u} = \vec{u}_0(\mathbf{x}) = \vec{u}(\mathbf{x}, t_0)$ , для скорости перемещения

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{v}_0(\mathbf{x}) = \vec{v}(\mathbf{x}, t_0) \quad \text{и температуры} \quad T_0 = T_0(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}, t_0).$$

На границе  $\Gamma_4$  контакта с твердым основанием считаем, что площадка основания препятствует перемещению тела в направлении нормали, т.е. задаем нулевые перемещения по оси, нормальной к этой границе и отсутствие напряжений на ней

$$v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (28)$$

На границах области, которые не испытывают внешних нагрузок  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \setminus K_1, K_2$  задаем условия отсутствия напряжений  $\vec{n} \cdot \vec{\sigma}|_{\partial D} = 0$ , которое примет вид на границе  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ :

$$\sigma_{11} = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_{12} = 0; \quad (29)$$

на части границы  $\Gamma_3 \setminus K_1, K_2$ , где нет контакта с ворсинками щетки, имеем

$$\sigma_{12} = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_{22} = 0. \quad (30)$$

На границе контакта между ворсинкой и донором со стороны ворсинки приложена внешняя нагрузка  $\mathbf{P}_k = (P_{k,x}, P_{k,z})$ , Здесь будем задавать условия нагружения вида  $\sigma \mathbf{n} = \mathbf{P}_k$ , которые в покомпонентной форме перепишем в виде

$$\sigma_{12} = -P_{k,x}, \quad \sigma_{22} = -P_{k,z}, \quad (31)$$

Согласно [18], удар гибкого элемента по поверхности можно полагать абсолютно неупругим, при котором вся кинетическая энергия ударяющейся массы переходит в потенциальную энергию ее деформации. Тогда сила удара гибкого элемента (ворсинки), возникающая на конце в момент соприкосновения с поверхностью донора направлена перпендикулярно к ее оси и определяется формулой

$$P_k = k^2 \frac{\omega}{I_{v,l}^2} \sqrt{[m(R_{щ}^3 - (R_{щ} - l_{v,l})^3)] E_v l} \quad (32)$$

где  $k$  – коэффициент, учитывающий динамику вращения;  $\omega$  – угловая скорость вращения щетки;  $m$  – масса ворсинки;  $R_{щ}$  – радиус щетки;  $l_{v,l}$  – длина изгибающейся части ворсинки;  $E_v$  – модуль упругости ворса;  $l$  – осевой момент инерции площади поперечного сечения ворсинки.

Система уравнений (26)-(32) – система уравнений относительно перемещений  $u(x, z)$  и  $v(x, z)$  в текущий момент времени  $t$  для материала, находящегося в упругой области. Для ее решения необходимо знание температуры донора.

Упругие деформации обладают свойством полного восстановления недеформированного состояния после снятия приложенных нагрузок. Кроме того, упругие деформации зависят только от величины напряжений и не зависят от истории деформирования или нагружения. Любая деформация, возникающая как ответная реакция материала на приложенные нагрузки или изменения в окружающей среде и не подчиняющаяся определенным законам классической теории упругости, может рассматриваться как неупругая деформация. В частности, необратимые смещения, которые получаются на атомном уровне и как следствие ведут к остаточным изменениям размеров, называются пластическими деформациями. Такие деформации имеют место только при интенсивности напряжения выше некоторого порога, известного как предел упругости  $\sigma_T$  или предел текучести. Максимальная упругая деформация определяется пределом текучести материала.

В общем случае при нагружении тела произвольной формы какими-либо внешними нагрузками в зависимости от материала в нем одновременно могут появиться зоны упругих и пластических деформаций. В дальнейшем будем обозначать, область пластического течения через  $D_p$ , а область упругости –  $D_e$ . Возникает проблема, связанная с определением границы между этими зонами, которая решается с помощью критерия или условия пластичности (текучести). Критерий пластичности дает возможность зафиксировать момент появления первых пластических деформаций. Существует ряд критериев пластичности [15,19], например, критерий Треска – Сен-Венана (теория максимального касательного напряжения), при котором максимальное касательное напряжение достигает некоторого предельного значения для данного материала; критерий Мизеса, когда переход из упругого состояния в пластическое определяется не максимальным, а октаэдрическим касательным напряжением и др.

Как показывает практика, эти условия отличаются незначительно. Для большинства опытов, проведенных для плоского напряженного состояния, лучшее согласование наблюдается с критерием Мизеса

$$\sigma_l \leq \sigma_Y, \quad (33)$$

$$\sigma_l = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)}$$

где – интенсивность

напряжений,  $\sigma_Y$  – предел текучести материала покрытия при простом растяжении.

Таким образом, если для напряжений в некотором объеме материала выполняется критерий (33), то материал принадлежит упругой области  $D_e$ , если не выполняется – к пластической области  $D_p$ .

Для пластической области закон упругости не выполняется. Основные проблемы теории пластичности состоят в математической формулировке соотношений между

напряжениями и деформациями. В настоящее время для изотропного материала известны, в основном, два типа теории пластичности: деформационная теория пластичности устанавливающая связь между напряжениями и деформациями, и теория пластического течения, описывающая связь между бесконечно малыми приращениями пластических деформаций и напряжениями. В основе деформационной теории пластичности предполагается, что для упругопластических тел можно установить законы, подобно закону Гука для упругих тел.

В процессе пластической деформации практически вся энергия деформации превращается в тепло и, поэтому эти процессы являются необратимыми. Удельную тепловую энергию за счет деформаций представим в следующем виде

$$Q = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (34)$$

где величины с точками обозначают скорость изменения деформации.

Величина тепловой энергии за счет деформации  $Q$  учитывается при моделировании тепловых процессов в доноре (раздел 4). Отметим, что для пластичных материалов, давление в пятне контакта, по крайней мере, не ниже напряжения текучести. Поэтому, чтобы получить оценку для величины температурной «вспышки» на контакте, можно предположить, что среднее контактное давление равно напряжению текучести материала донора  $\sigma_T$ . Отсюда выражение для мощности тепловыделения в пластической области  $D_p$  имеет вид:  $W = k_{mp} \sigma_T v_0$

### 7. Моделирование процесса съёма (унос) материала покрытия

Основной механизм съема или уноса частички материала покрытия (изнашивание донора) с позиции модели макроуровня определим соотношением между значениями возникающих напряжений в поверхностных слоях донора и критериями текучести и прочности его материала. Будем считать, что съем материала покрытия ворсинкой с поверхности донора происходит в том случае, если интенсивность возникающих напряжений в поверхностной ячейке донора контактируемой с ворсинкой, вызываемых температурой и контактными напряжениями в поверхностных слоях, превышает предел текучести, но не превосходят предел прочности. Тогда, наиболее вероятно, есть пластическое деформирование, при котором происходит срез материала касательной силой. Если же интенсивности напряжений ниже предела текучести, то сноса материала не происходит.

Поэтому, считаем, что съем материала покрытия (донора) ворсинкой происходит при наличии следующих факторов:

- если условие (33) для поверхностной ячейки не выполняется, то материал находится в пластическом состоянии, т.е. интенсивность напряжений в поверхностной ячейке донора контактируемой с ворсинкой превышает предел текучести, но не превосходит предел прочности материала покрытия;
- температура в этой ячейке должна быть меньше температуры плавления  $T_m$  материала покрытия.

Форма прилипшего и переносимого на конце ворсинки материала, находящегося в пластическом состоянии, из-за сил поверхностного натяжения близка к форме шарового сегмента, построенного на основании ворсинки. Учитывая угол смачивания



Рисунок 6 – Условная схема съема материала;  $D_e$  – область упругой деформации;  $D_p$  – пластическая

материала и малость диаметра ворсинки, этот объем приближенно определим по формуле

$$V_c = \frac{1}{6} \pi h_c \left( h_c^2 + \frac{3}{4} d_v^2 \right), \quad (35)$$

где  $h_c = \frac{d_v}{2} \operatorname{tg} \theta_c$  – высота шарового сегмента прилипшего к основанию ворсинки, находящейся в области контакта с материалом донора,  $d_v$  – диаметр ворсинки,  $\theta_c$  – угол смачивания материала покрытия.

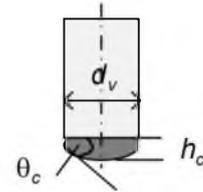


Рисунок 7 – Условная схема объема снятого материала

Если съема материала не произошло, то длина ворсинки остается прежней. Если материал прилип к ворсинке, то ее длина изменится. Представим объем снятого материала  $V_c$  в виде цилиндра с основанием, равным площади сечения ворсинки  $S_{сеч,в}$ . Тогда высоту этого цилиндра  $l_c$  определим по формуле  $l_c = V_c / S_{сеч,в}$ . С учетом сделанного предположения, длина вышедшей из контакта ворсинки составит  $\tilde{l}_v = l_v + l_c$ .

После выхода ворсинки с частицей материала покрытия (или без) из контакта с донором, происходит ее движение в окружающей среде до контакта с обрабатываемой поверхностью. В процессе движения до поверхности детали ворсинка охлаждается за счет вентиляторного эффекта щетки.

Охлаждение ворсинки описывается уравнением теплопроводности (19) в области расчета  $[0, \tilde{l}_v]$ . В качестве начальной температуры принимается температура ворсинки после выхода из контакта и вместо граничного сопряжения (22) – условие теплообмена вида (21.1) с учетом теплового сопротивления налипшего материала покрытия. Полагая, что ворсинка движется с заданной угловой скоростью, и, зная расстояние до обрабатываемой детали, нетрудно определить время охлаждения ворсинки с переносимым материалом. Напряженно-деформированное состояние в ворсинке с переносимым материалом покрытия в силу отсутствия нагрузок и малости времени охлаждения, полагаем неизменным.

На этом заканчивается первый этап в моделировании рассматриваемого процесса. Моделирование процессов съема материала покрытия с ворсинок и нанесения на поверхность образца описывается похожими математическими моделями с разницей в начальных и граничных условиях, приложенных силах и тепловых режимов.

## 8. Численный метод

Рассмотренная выше математическая модель в виде системы нелинейных взаимосвязанных дифференциальных уравнений в частных производных для определения теплового и напряженного деформированного состояния донора достаточно сложная. Поэтому найти ее решение в аналитической форме практически невозможно. Развитие средств вычислительной техники позволяет реализацию численных методов на достаточно мелких сетках. Причем, чем меньше сетка, тем более адекватно находится приближенное решение. Метод дискретизации основных уравнений, используемый для получения вычислительных алгоритмов, во многом предопределяет качество численного решения и показатели эффективности вычислительной процедуры.

Для дискретизации рассматриваемой системы уравнений применим метод конечных объемов, который хорошо зарекомендовал себя при решении большого круга прикладных задач. На основе этого метода дифференциальные уравнения заменяются их сеточными аналогами, в результате чего приходим к нелинейным системам алгебраических уравнений. Построенные из балансовых соотношений с помощью контрольного объема разностные схемы [20] обладают свойством баланса на сеточном уровне, что приводит к адекватному приближенному решению при разумном выборе сетки.

Численный метод решения задачи (19)-(22). Согласно методу контрольного объема в области решения  $[0, l_1]$  введем равномерную сетку (рис.8) по оси ворсинки:  $\bar{\omega}_j = \bar{\omega}_k$ :  $l_0 = 0$ ,  $l_k = l_{k-1} + \Delta l$ ,  $k = \overline{1, N_l}$ ,  $l_{N_l} = l_1$ .

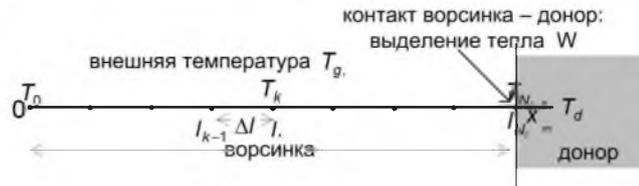


Рисунок 8 – Сетка по оси ворсинки:  $x_m^*$  – координата конца ворсинки на поверхности донора;  $T_d$  – температура донора в ячейке контакта с ворсинкой

Температуру будем находить в точках  $l_k$  и на границах рассматриваемой области  $l=0$  и  $l=l_M$ . Интегрируя уравнение (19) по внутренним элементарным объемам  $[l_{k-0.5}, l_{k+0.5}]$  и применяя некоторые формулы усреднения, получим разностную схему для нахождения неизвестных значений температуры в выбранных узлах  $T_k = T(l_k)$  в текущий момент времени

$$\rho_{v;k} C_{ef,v;k} \frac{T_k - \bar{T}_k}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta l} \left( \lambda_{v;k+0.5} \frac{T_{k+1} - T_k}{\Delta l} - \lambda_{v;k-0.5} \frac{T_k - T_{k-1}}{\Delta l} \right) - \alpha_{to,g} \frac{\Pi_v}{S_{сеч,v}} (T_k - T_g), \quad (36)$$

$$k = \overline{1, N_l - 1},$$

где  $\rho_{v;k} = \rho_v(T_k)$ ,  $C_{ef,v;k} = C_{ef,v}(T_k)$ ,  $\lambda_{v;k+0.5} = \frac{2 \lambda_{v;k+1} \lambda_{v;k}}{(\lambda_{v;k+1} + \lambda_{v;k})}$ ,  $\lambda_{v;k} = \lambda_v(T_k)$ ;

$\bar{T}_k = T(l_k, t - \Delta t)$  – температура ворсинки в точке  $l=l_k$  в предыдущий момент времени  $t - \Delta t$ .

Доопределим систему (36) уравнением, аппроксимирующим со вторым порядком точности (используя основное уравнение (19)) граничное условие теплообмена (22) в точках контакта с донором, и уравнением (21.2) в точке закрепления ворса  $T_0 = T_{v,inp}$

$$-\lambda_{v;N_l-1} \frac{T_{N_l} - T_{N_l-0.5}}{\Delta l} = -\lambda_d \frac{T_d - T_{N_l}}{\Delta l} + W + \frac{\Delta l}{2} \rho_{v;N_l} C_{ef,v;N_l} + \rho_d C_{ef,d} \frac{T_{N_l} - \bar{T}_{N_l}}{\Delta t} - \frac{\Delta l}{2} \alpha_{to,g} \frac{\Pi_v}{S_{сеч,v}} (T_{N_l} - T_g), \quad (37)$$

Система (37),(38) – нелинейная система относительно значений  $T_k$ . Для ее реализации системы построим следующий итерационный процесс

$$\rho_v^{(s)} C_{ef,v}^{(s)} \frac{T_k^{(s+1)} - \bar{T}_k}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta l} \left( \lambda_{v;k+0.5}^{(s)} \frac{T_{k+1}^{(s+1)} - T_k^{(s+1)}}{\Delta l} - \lambda_{v;k-0.5}^{(s)} \frac{T_k^{(s+1)} - T_{k-1}^{(s+1)}}{\Delta l} \right) - \alpha_{to,g} \frac{\Pi_v}{S_{сеч,v}} (T_k^{(s+1)} - T_g), \quad k = \overline{1, N_l - 1}, \quad (38)$$

$$-\lambda_{v;N_l-1} \frac{T_{N_l}^{(s+1)} - T_{N_l-0.5}^{(s+1)}}{\Delta l} = -\lambda_{d,1} \frac{T_d - T_{N_l}^{(s+1)}}{\Delta l} + W - \frac{\Delta l}{2} \alpha_{to,g} \frac{\Pi_v}{S_{сеч,v}} (T_{N_l}^{(s+1)} - T_g) + \frac{\Delta l}{2} \rho_{v;N_l} C_{ef,v;N_l} + \rho_{d;N_l} C_{ef,d;N_l} \frac{T_{N_l}^{(s+1)} - \bar{T}_{N_l}}{\Delta t}$$

$T_0^{(s+1)} = T_{v,inp}$ , где  $T_k^{(s+1)}$  –  $(s+1)$ -ое приближение к решению.

Систему (38) перепишем относительно неизвестных  $T_k^{(s+1)}$  в следующем виде

$$\begin{aligned}
 a_k T_{k-1}^{(s+1)} - c_k T_k^{(s+1)} + b_k T_{k+1}^{(s+1)} &= -f_k, \quad k=1, \dots, N_I - 1, \\
 T_0^{(s+1)} &= T_{v,inp}, \quad -c_{N_I-1} T_{N_I-1}^{(s+1)} + b_{N_I} T_{N_I}^{(s+1)} = -f_{N_I}.
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

Матрица системы (40) – трехдиагональная матрица размерности  $[N_I \times N_I]$ . Выражения для коэффициентов легко выписываются из формул (38). В качестве нулевого приближения для итерационного процесса берем значения с предыдущего временного слоя, то есть  $T_k^{(0)} = \bar{T}_k$ ,  $k = \overline{0, N_I}$ .

На каждом временном слое итерационный процесс прекращается, когда достигнутый уровень невязки между итерационными приближениями достигает требуемой заданной точности, например,  $|T_k^{(s+1)} - T_k^{(s)}| \leq \varepsilon$ ,  $\varepsilon = 0.001$ . Тогда найденные значения  $T_k^{(s+1)}$  принимаем за решение  $T_k$  на этом временном слое.

Численный метод решения задачи (15)-(18). Остановимся на основных моментах построения численного метода.

Предварительно проведем дискретизацию двумерной области  $\bar{D} = [0, a] \times [0, h]$ . Введем прямоугольную двумерную декартову сетку, которую получим пересечением одномерных сеток по направлениям  $x$  и  $z$ . Узлы пересечения сеточных линий координатных  $x_i = const$  и  $z_k = const$  образуют прямоугольную сетку  $\bar{\Omega} = \bar{\omega}_x \times \bar{\omega}_z$ .

Неравномерную сетку по  $x$ :  $\bar{\omega}_x = \{x_i\}$ :  $x_0 = 0$ ,  $x_i = x_{i-1} + \Delta x_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $x_N = a$  строим с учетом контакта ворсинок с поверхностью донора. Совокупность точек  $\{x_m^*\}$  входа гибких ворсинок в контакт с донором, определяемая формулой (4), примем за основу для построения сетки по  $x$ . Сетку строим по следующему правилу (рис.9). Поскольку узлы  $x_m^*$  – точки контакта центра ворсинок с поверхностью донора, определяемые формулой (4), а диаметр ворсинки –  $d_v$  то полагаем, что отрезки  $[x_m^* - 0.5d_v, x_m^* + 0.5d_v]$  полностью контактируют с поверхностью. Тогда в качестве узлов сетки выберем координаты  $(x_m^* - 0.5d_v)$  и  $(x_m^* + 0.5d_v)$ . Для построения квазиравномерной, особенно, если расстояние между ворсинками  $\Delta_x^*$  значительно меньше их диаметра  $\Delta_x^* < d_v$ , отрезок  $d_v$  разобьем дополнительно на четное количество интервалов  $k_{v,i}$  (рис. 9), с тем, чтобы соотношение ближайших интервалов по  $x$  было почти одинаковым, что обеспечит квазиравномерную сетку по  $x$ . В результате деления получим интервалы  $d_{v,i} = d_v / k_{v,i}$  внутри ворсинки и  $\Delta_x^*$  – между ворсинками. Эти интервалы – шаги сетки основной сетки в области  $[K_1, K_2]$ . На рисунке 9 приведен фрагмент сетки для случая  $k_{v,i}=4$ .

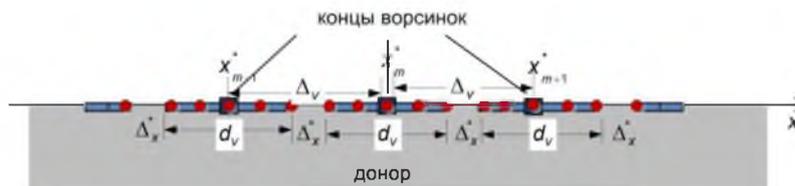


Рисунок 9 – Фрагмент области с сеткой по  $x$ :

■ – центры ворсинок на поверхности донора; ● – узлы сетки

Очевидно, что чем плотнее набивка ворса, тем количество интервалов  $k_{v,i}$  больше. Вне области контакта (в областях  $[0, K_1]$  и  $[K_2, a]$ ) расстояние между сеточными узлами выберем постоянным, и таким, чтобы оно мало отличалось от  $\Delta_x^*$ .

Неравномерную сетку по  $z$   $\bar{\omega}_z = (\bar{\omega}_k)$ :  $z_0 = 0$ ,  $z_k = z_{k-1} + \Delta z_k$ ,  $k = \overline{1, N_z}$ ,  $z_{N_z} = h$ . Введем со сгущением к верхней границе донора, полагая, что первый шаг будет такой же, как и минимальный по  $x$ ,  $\Delta z_1 = \Delta x_{\min}$ . Последующие шаги определим по правилу  $\Delta z_{k+1} = \Delta z_k \cdot q$  для  $k = \overline{1, \dots, N_z - 1}$ ,  $\Delta z_{N_z} = z_{N_z} - z_{N_z - 1}$ ,  $q$  – параметр увеличения пространственного шага по высоте донора  $z$ , в частности, можно положить  $q = 1.05$ .

В результате, исходная область разбивается на множество непересекающихся конечных прямоугольных объемов (ячеек) вида  $\bar{\omega}_{i,k} = [x_{i-1}, x_i] \times [z_{k-1}, z_k]$  (рис.10), таких

$$\bar{D} = \bigcup_{i=1}^N \bigcup_{k=1}^M \bar{\omega}_{i,k}$$

что, На рисунке 10 представлен фрагмент области верхней части донора с разбивкой на сеточные ячейки.

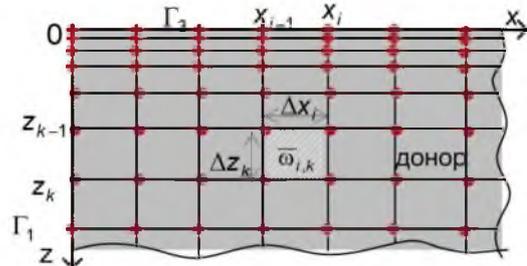


Рисунок 10 – Фрагмент сетки в верхней части донора:  $\bar{\omega}_{i,k}$  – ячейка области,  $\bullet$  – узлы сетки

Рассматриваемая модельная система сеточных ячеек  $\bar{\omega}_{i,k}$  (объемов) представляет собой двумерную структуру взаимодействующих частиц, расположенных в ячейках сеточной области. Каждая ячейка характеризуется усредненной по ее объему температурой, тензором напряжений и определенными теплофизическими свойствами, такими как теплопроводность, теплоемкость, плотность, соответствующими свойствам материала этой ячейки. Перемещение ячеек характеризуется ее вектором перемещений.

Пусть пара целочисленных индексов  $(i, k)$  обозначает индекс переменной и указывает на координаты точек, в которой она вычисляется. При программировании свяжем полный набор значений сеточной функции с индексами массивов, в которых они хранятся. Неизвестные значения температуры  $T = T(x, z, t)$  в каждый момент времени  $t$  находим в центрах построенных ячеек  $\bar{\omega}_{i,k}$  (объемов), т.е. в узлах  $(x_{i-0.5}, z_{k-0.5})$ ,  $i = \overline{1, N_x}$ ,  $k = \overline{1, N_z}$  и обозначать  $T_{i,k} = T(x_{i-0.5}, z_{k-0.5})$  и на границах области расчета. Сеточные значения компоненты перемещения  $v$  находим на серединах верхней и нижней гранях ячеек  $\bar{\omega}_{i,k}$  т.е. в узлах  $(x_{i-0.5}, z_k)$  и обозначаем  $v_{i,k} = v(x_{i-0.5}, z_k)$ . Сеточные значения компоненты перемещения  $u$  – на серединах боковых граней сеточных ячеек  $\bar{\omega}_{i,k}$ , т.е. в узлах  $(x_i, z_{k-0.5})$  и обозначаем  $u_{i,k} = u(x_i, z_{k-0.5})$ .

На рисунке 11 изображены узлы

- ячейки  $\bar{\omega}_{i,k}$ , в которых находим решение:
- маркером '★' отмечена точка, в которой вычисляется температура ячейки  $T_{i,k}$ ;
  - маркером '■' – перемещения  $U_{i-1,k}$  и  $U_{i,k}$ ;
  - маркером '■' – перемещения  $V_{i,k-1}$  и  $V_{i,k}$ .

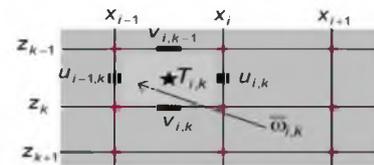


Рисунок 11 – Узлы для неизвестных в ячейке  $\bar{\omega}_{i,k}$

Приведем основные моменты построения численного метода. Отметим, что приведенный способ построения разностной схемы с помощью контрольного объема позволяет на численном уровне сохранять баланс в ячейках и при правильном выборе граничных условий и хорошей их аппроксимации, приводит к адекватным результатам.

На сеточной области дифференциальную задачу (15) аппроксимируем с помощью метода конечного объема. Для этого проинтегрируем уравнение (15) по контрольному объему  $[x_{i-1}, x_i] \times [z_{k-1}, z_k]$ , окружающему внутренний узел  $(x_{i-0.5}, z_{k-0.5})$ .

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{z_{k-1}}^{z_k} c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dz = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dz + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dz + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{z_{k-1}}^{z_k} Q dx dz$$

Используя теорему о среднем и некоторые усреднения для приближенного вычисления интегралов, построим неявную разностную схему вида

$$c_{i,k} \rho_{i,k} \frac{T_{i,k} - \bar{T}_{i,k}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x_i} \left( \lambda_{i+1,k} \frac{T_{i+1,k} - T_{i,k}}{\Delta x_{i+1}} - \lambda_{i,k} \frac{T_{i,k} - T_{i-1,k}}{\Delta x_i} \right) + \frac{1}{\Delta z_k} \left( \lambda_{i,k+1} \frac{T_{i,k+1} - T_{i,k}}{\Delta z_{k+1}} - \lambda_{i,k} \frac{T_{i,k} - T_{i,k-1}}{\Delta z_k} \right) + Q_{i,k} \quad (40)$$

для  $i = \overline{1, N_x - 1}$ ,  $k = \overline{1, N_z - 1}$ ,

$$T_{i,k} = T(x_{i-0.5}, z_k) \approx \frac{1}{V_{i,k}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{z_{k-1}}^{z_k} T dx dz$$

где  $V_{i,k}$  – усредненная по объему ячейки

температура;  $\bar{T}_{i,k}$  – температура на предыдущем временном слое; объем ячейки

$V_{i,k} = \Delta x_i \times \Delta z_k$ ;  $\Delta x_i$ ,  $\Delta z_k$  – размер ячейки по координатным направлениям  $x$  и  $z$ ;

$\overline{\Delta x_i} = 0.5(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})$ ;  $\overline{\Delta z_k} = 0.5(\Delta z_k + \Delta z_{k+1})$ ;  $\Delta t$  – шаг по времени величины;

$c_{i,k} = c(T_{i,k})$  и  $\rho_{i,k} = \rho(T_{i,k})$  приближенные значения коэффициентов удельной

теплоемкости и плотности, соотнесенные к центру ячейки;  $Q_{i,k}$  – энергия пластической деформации в ячейке.

Поскольку под обозначениями с нижним индексом  $\lambda_{i\pm 1,k}$  и  $\lambda_{i,k\pm 1}$  понимаем значение коэффициента теплопроводности  $\lambda_{i\pm 1,k} = \lambda(x_{i\pm 1}, z_k)$  и  $\lambda_{i,k\pm 1} = \lambda(x_i, z_{k\pm 1})$  на боковых, нижней и верхней границах контрольного объема, а функция  $\lambda = \lambda(T)$  –

функция от температуры, где температура  $T_{i,k} = T(x_{i-0.5}, z_k)$ , то для аппроксимации теплового потока через соответствующую границу выбранного контрольного объема,

$$\lambda_{i\pm 1,k} = \frac{2 \lambda(T_{i,k}) \lambda(T_{i\pm 1,k})}{\lambda(T_{i,k}) + \lambda(T_{i\pm 1,k})} \quad \lambda_{i,k\pm 1} = \frac{2 \lambda(T_{i,k}) \lambda(T_{i,k\pm 1})}{\lambda(T_{i,k}) + \lambda(T_{i,k\pm 1})}$$

рассмотрим следующие выражения

Энергия пластической деформации в ячейке  $Q_{i,k}$  зависит от её напряженного состояния и определяется по формуле (34) через найденные сеточные значения тензора напряжений и скорости деформаций, которые вычисляются по формулам через искомые неизвестные вектора перемещений.

Неявная разностная схема более сложная в решении по сравнению с явными алгоритмами, но ее выбор оправдан, поскольку она устойчива и не требует дополнительных соотношений на сеточные шаги в отличие от явной схемы. Для рассматриваемой задачи сеточные шаги достаточно малы из-за учета структуры контакта ворса с донором при построении сетки.

Для граничных ячеек и сеточных узлов на границе области соответствующие аппроксимационные неявные уравнения строили с учетом основного уравнения на границе области и граничных условий. Для граничных угловых ячеек, аппроксимация проводилась с учетом соответствующих смежных граничных условий. Количество неизвестных  $T_{i,k}$  составит  $(N_x + 1) \times (N_z + 1)$ .

В результате получим нелинейную систему относительно температур  $T_{i,k}$  вида

$$a_{i,k} T_{i-1,k} - c_{i,k} T_{i,k} + b_{i,k} T_{i+1,k} + d_{i,k} T_{i,k-1} + e_{i,k} T_{i,k+1} = -f(\bar{T}_{i,k}, Q_{i,k}), \quad i = \overline{0, N_x}, \quad k = \overline{0, N_z} \quad (41)$$

Нелинейная система решалась экономичным итерационным методом [21,22] относительно температуры, неизвестные перемещения предполагались найденными. В качестве нулевого приближения для температуры брали значения с предыдущего временного слоя.

Значения перемещения  $v_{0,k}$  и  $v_{N_x,k}$  на границах области  $\Gamma_1, \Gamma_2$  не находятся. Тогда количество неизвестных сеточных значений  $v_{i,k}$  ( $i = \overline{1, N_x}, k = \overline{0, N_z}$ ), которые надо определить, составит  $N_x \times (N_z + 1)$ .

Построим систему уравнений для нахождения сеточных значений  $v_{i,k}$  для внутренних ячеек области методом контрольного объема. Для этого, проинтегрируем второе уравнение баланса (26) по контрольному объему  $\tilde{\omega}_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [z_{k-0.5}, z_{k+0.5}]$ , окружающему точку  $(x_{i-0.5}, z_k)$ , в которой ищем неизвестное значение перемещения  $v$

$$\iint_{\tilde{\omega}_{jk}} \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} d\omega = \iint_{\tilde{\omega}_{jk}} \left[ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial z} \right] d\omega, \quad i = \overline{2, N_x - 1}, \quad k = \overline{1, N_z - 1},$$

или

$$\rho_{i-0.5,k} \frac{v_{ik} - 2\tilde{v}_{ik} + \check{v}_{ik}}{(\Delta t)^2} \Delta x_i \Delta z_k = \int_{z_{k-0.5}}^{z_{k+0.5}} \sigma_{21}|_{x_i} - \sigma_{21}|_{x_{i-1}} dz + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sigma_{22}|_{z_{k+0.5}} - \sigma_{22}|_{z_{k-0.5}} dx$$

где  $\Delta z_k = 0.5(\Delta z_k + \Delta z_{k+1})$ ,  $\rho_{i-0.5,k} = 0.5(\rho_{i-1,k} + \rho_{i,k})$ ,  $\check{v}_{ik}, \tilde{v}_{ik}$  – значения перемещения в предыдущие моменты времени, т.е. при времени  $t - \Delta t$  и  $t - 2\Delta t$  соответственно.

Подставив выражения напряжений  $\sigma_{21}$  и  $\sigma_{22}$  по формуле (25) через перемещения в интегралы и преобразовывая их, получим

$$\begin{aligned} \rho_{i-0.5,k} \frac{v_{ik} - 2\tilde{v}_{ik} + \check{v}_{ik}}{(\Delta t)^2} &= -\frac{1}{\Delta z_k} \left[ \beta_{i,k+1} (T_{i,k+1} - \tilde{T}_{i,k+1}) - \beta_{i,k} (T_{i,k} - \tilde{T}_{i,k}) \right] \\ &+ \frac{1}{\Delta x_i} \left\{ \mu_{i,k} \left( \frac{v_{i+1,k} - v_{i+1,k}}{\Delta x_i} + \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\Delta z_k} \right) - \mu_{i-1,k} \left( \frac{v_{i,k} - v_{i-1,k}}{\Delta x_{i-1}} + \frac{u_{i-1,k+1} - u_{i-1,k}}{\Delta z_k} \right) \right\} + \\ &+ \frac{1}{\Delta z_k} \left\{ \left[ (2\mu + \lambda)_{(i-0.5,k+0.5)} \frac{v_{i,k+1} - v_{i,k}}{\Delta z_{k+1}} + \lambda_{(i-0.5,k+0.5)} \frac{u_{i,k+1} - u_{i-1,k+1}}{\Delta x_i} \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[ (2\mu + \lambda)_{(i-0.5,k-0.5)} \frac{v_{i,k} - v_{i,k-1}}{\Delta z_k} + \lambda_{(i-0.5,k-0.5)} \frac{u_{i,k} - u_{i-1,k}}{\Delta x_i} \right] \right\} \end{aligned}$$

Переписывая уравнение относительно неизвестных  $v_{i,k}$  получим

$$a_{i,k}^v v_{i-1,k} - c_{i,k}^v v_{i,k} + b_{i,k}^v v_{i+1,k} + d_{i,k}^v v_{i,k-1} + e_{i,k}^v v_{i,k+1} = -f_1(\tilde{v}_{i,k}, \check{v}_{i,k}, u, T_{i,k}) \quad (42)$$

для  $i = \overline{2, N_x - 1}, k = \overline{1, N_z - 1}$ .

Остальные сеточные уравнения построим аналогично, интегрируя уравнение баланса (26) по контрольным объемам вдоль границ области с учетом соответствующих граничных условий вида (28)-(31). В результате получим замкнутую систему относительно неизвестных  $v_{i,k}$ .

Система уравнений для нахождения сеточных значений  $u_{i,k}$  строим аналогично.

Перемещения  $u_{i,0}$  и  $u_{i,N_z}$  на границах области  $\Gamma_3, \Gamma_4$  – не находятся. Тогда количество неизвестных сеточных значений  $u_{i,k}$  ( $i = \overline{0, N_x}, k = \overline{1, N_z}$ ), которые надо определить, составит  $(N_x + 1) \times N_z$ .

Интегрируя первое уравнение баланса (26) по контрольному объему  $\tilde{\omega}_{ijk} = [x_{i-0.5}, x_{i+0.5}] \times [z_{k-1}, z_k]$ , окружающему узел  $(x_i, z_{k+0.5})$ , в котором ищем неизвестное значение перемещения  $u_{i,k}$ , получим

$$\iint_{\tilde{\omega}_{jk}} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} d\omega = \iint_{\tilde{\omega}_{jk}} \left[ \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial z} \right] d\omega, \quad i = \overline{1, N_x - 1}, \quad k = \overline{2, N_z - 1}.$$

$$\rho_{i,k-0.5} \frac{u_{ik} - 2\tilde{u}_{ik} + \tilde{\tilde{u}}_{ik}}{(\Delta t)^2} \Delta z_k \overline{\Delta x}_i = \int_{z_{k-1}}^{z_k} \epsilon_{11}|_{Side2} - \sigma_{11}|_{Side1} \tilde{dz} + \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \epsilon_{12}|_{Side4} - \sigma_{12}|_{Side3} \tilde{dx}$$

или

где  $\overline{\Delta x}_i = 0.5(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})$ ,  $Side2$ ,  $Side1$ ,  $Side4$ ,  $Side3$  – соответствующие грани (правая, левая, верхняя, нижняя) контрольного объема  $\tilde{\omega}_{ik}$ .

Переписывая уравнение относительно неизвестных  $u_{i,k}$  получим

$$a_{i,k}^u u_{i-1,k} - c_{i,k}^u u_{i,k} + b_{i,k}^u u_{i+1,k} + d_{i,k}^u u_{i,k-1} + e_{i,k}^u u_{i,k+1} = -f_1(\tilde{u}_{i,k}, \tilde{\tilde{u}}_{i,k}, \mathbf{v}, T_{i,k}) \quad (43)$$

$$i = \overline{1, N_x - 1}, \quad k = \overline{2, N_z - 1}$$

Остальные сеточные уравнения построим интегрируя уравнение первое уравнение баланса (26) по соответствующим контрольным объемам вдоль границ области и с учетом условий вида (28)-(31). В результате получим замкнутую систему относительно неизвестных  $u_{i,k}$ .

Отметим, что системы нелинейных уравнений (40)-(43) решается совместно итерационным методом. В качестве нулевого приближения для неизвестных температуры и перемещений брали значения с предыдущего временного слоя. Затем решали систему (41) при известной правой части (значения с предыдущей итерации для перемещений), находили  $T_{i,k}^{(1)}$ ; решали систему (42) при известной правой части (значения с предыдущей итерации для компоненты перемещений  $u$  и температуры), находили  $v_{i,k}^{(1)}$ ; решали систему (43) при известной правой части (значения с предыдущей для компоненты перемещений  $v$  и температуры), находили  $v_{i,k}^{(1)}$ . Затем переходили к следующей итерации и т.д.

Расчет напряжений.

Решая систему указанным способом, находим перемещения  $u_{i,k}$ ,  $v_{i,k}$  и температуру  $T_{i,k}$  в выбранных узлах сеточной области.

Сеточные значения напряжений  $\sigma_{11,ik}$ ,  $\sigma_{22,ik}$  и  $\sigma_{12,ik}$  получим из разностного аналога закона для среды (это закон Гука для упругой среды). Нормальные напряжения  $\sigma_{11,ik}$  и  $\sigma_{22,ik}$  будем находить в центрах ячеек, а касательные напряжения  $\sigma_{12,ik}$  – в узлах для перемещения  $u_{i,k}$ ,  $\sigma_{21,ik}$  – в узлах для перемещения  $v_{i,k}$  по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{11,ik} &= (2\mu + \lambda) \frac{u_{i+1,k} - u_{i,k}}{\Delta x_i} + \lambda \frac{v_{i,k+1} - v_{i,k}}{\Delta z_k} - \beta (T_{i,k} - \tilde{T}_{i,k}) \\ \sigma_{22,ik} &= (2\mu + \lambda) \frac{v_{i,k+1} - v_{i,k}}{\Delta z_k} + \lambda \frac{u_{i+1,k} - u_{i,k}}{\Delta x_i} - \beta (T_{i,k} - \tilde{T}_{i,k}) \\ \sigma_{33,ik} &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_{11,ik} + \sigma_{22,ik}) \quad \beta = (3\lambda + 2\mu) \alpha, \\ \sigma_{12,ik} &= \mu \left( \frac{0.5(u_{i,k+1} - u_{i,k-1})}{\Delta z_k} + \frac{0.5(v_{i,k+1} + v_{i,k}) - 0.5(v_{i-1,k+1} + v_{i-1,k})}{0.5(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} \right), \\ \sigma_{21,ik} &= \mu \left( \frac{0.5(u_{i+1,k} + u_{i,k}) - 0.5(u_{i+1,k-1} + u_{i,k-1})}{0.5(\Delta z_k + \Delta z_{k-1})} + \frac{0.5(v_{i+1,k} - v_{i-1,k})}{\Delta x_i} \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Сеточные значения интенсивности напряжений находим по формуле, учитывая найденные значения компонент тензора напряжений.

Сеточные значения деформации найдем из аппроксимации формул (24) на сетке

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11,ik} &= \frac{u_{i+1,k} - u_{i,k}}{\Delta x_i} - \alpha(T_{ik} - \bar{T}_{ik}), & \varepsilon_{22} &= \frac{v_{i,k+1} - v_{i,k}}{\Delta z_k} - \alpha(T_{ik} - \bar{T}_{ik}), \\ \varepsilon_{12,ik} &= \frac{1}{2} \left( \frac{0.5(u_{i,k+1} - u_{i,k-1})}{\Delta z_k} + \frac{0.5(v_{i,k+1} + v_{i,k}) - 0.5(v_{i-1,k+1} + v_{i-1,k})}{0.5(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} \right) \\ \varepsilon_{21,ik} &= \frac{1}{2} \left( \frac{0.5(u_{i+1,k} + u_{i,k}) - 0.5(u_{i+1,k-1} + u_{i,k-1})}{0.5(\Delta z_k + \Delta z_{k-1})} + \frac{0.5(v_{i+1,k} - v_{i-1,k})}{\Delta x_i} \right), \\ \dot{\varepsilon}_{m,ik} &= \frac{\varepsilon_{m,ik} - \bar{\varepsilon}_{m,ik}}{\Delta t}, \quad m, l = 1, 2. \end{aligned} \tag{45}$$

скорость деформации определим как

Подставляя найденные значения напряжений (44) и скорости деформаций в выражение (34), найдем значение для удельной тепловой энергии  $Q_{ik}$  в ячейке  $\bar{\omega}_{i,k}$ .

Отметим, что поскольку ячейки области могут отличаться теплофизическими свойствами (например, материал покрытия-материал ворса, материал покрытия-материал обрабатываемой поверхности), то для программной реализации численного метода проведена маркировка ячеек по типу материала, содержащегося в них.

### Вычислительные эксперименты

Приведем некоторые результаты численных расчетов для следующих входных параметров: радиус щетки  $R_{щ}=75$  мм, угловая скорость щетки  $\omega = 280$  рад/с, натяг щетки (относительно донора)  $N_1=2$  мм, ширина щетки  $b=15$  мм, плотность набивки ворса  $n_v=0.6$ , длина ворса  $l_v=30$  мм, диаметр ворса  $d_v=0.3$  мм, материал ворса – СТ 70, размеры бруска донора 15 мм x 15 мм x 30 мм, материал покрытия (донора) – медь. Термические константы веществ будем брать из справочника [23].

На рисунке 12 показан график изменения координаты конца ворсинки со временем при ударе о поверхность донора, построенный по формуле (7). Как видно из графика, движение конца ворсинки носит колебательный характер. Положительные значения  $z$  соответствуют проникновению конца ворсинки на величину  $z$  в материал донора, отрицательные – выход из материала. Исходя из данных, время удара приблизительно составляет  $t_{impact} \approx 12 \cdot 10^{-6}$  с. Время удара на рисунке отмечено маркером '■'.

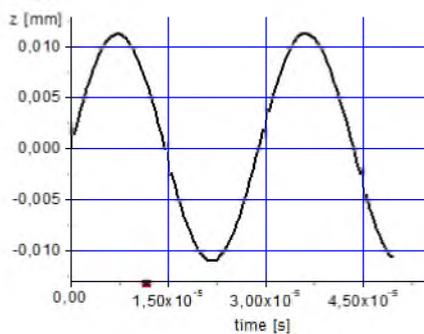


Рисунок 12 – Динамика проникновения конца ворсинки в материал донора при ударе

В качестве глубины проникновения ворсинки в материал для предложенной модели, выберем максимальную глубину, на которую проникает конец ворсинки за время удара. Из графика видно, что максимальная глубина, на которую проникает конец ворсинки за время удара составляет  $z^* = 0.0112$  мм при  $t=7.0e-0.6$  с.

Поэтому эту величину приближенно примем за глубину проникновения конца ворсинки в материал при ударе ее о поверхность донора, т.е.  $z_{1,k}=1.12e-02$  мм.

Свободная длина ворсинки, которая подвергалась дальнейшему изгибу в процессе контакта с донором, вычислялась как  $l_l=l_v-z_{1,k}$  мм.

Рисунок 13 иллюстрирует графики функции изгиба  $w(l)$  одиночной ворсинки относительно начального положения ее оси (в локальной системе координат), полученные формулам (13) при различных угловых скоростях.

Видно, что изгиб ворсинок наблюдается сильнее ближе к поверхности донора. Причем, при вращении щетки с большей скоростью ворсинки испытывают больший изгиб, тем самым создавая скопление пучка ворсинок – «подушки» при входе в зону контакта.

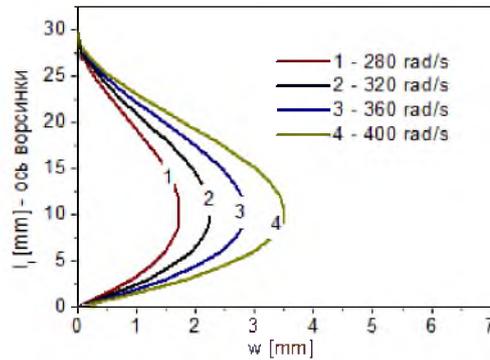


Рисунок 13 – Изгиб одиночной ворсинки в локальной системе координат при различных угловых скоростях

Рисунок 14 иллюстрирует графики изгиба некоторых ворсинок щетки, контактирующих с поверхностью донора, в основной системе координат, связанной с донором.

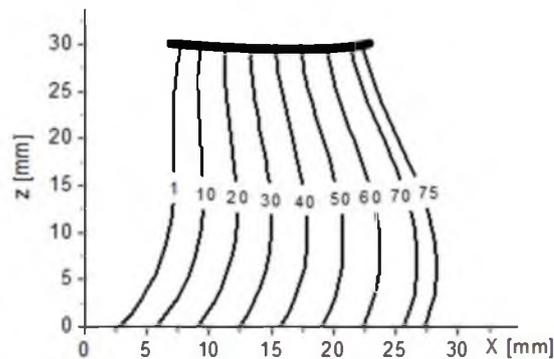


Рисунок 14 – Изгиб ворсинок, касающихся поверхности донора

Видно, что в области контакта ворсинки имеют разный изгиб, тем самым формируют область контакта щетки с поверхностью донора и различные контактные напряжения со стороны ворса на поверхность донора. Контактные напряжения использовали в качестве граничных условий для вычисления перемещений и мощности тепловыделения на границе трения для тепловой задачи.

Поскольку на участке трения происходит сильное выделение тепловой энергии, то теплота распространяется вовнутрь тела от поверхности контакта. Начальная температура донора и ворсинок щетки 293 К.

Точки контакта на поверхности донора прогреваются по-разному. На рисунке 15 показано изменение температуры со временем в точках на поверхности донора: 1 –  $x=2.16$  мм от края (1-ая точка контакта ворса с донором), 2 –  $x=10.1$  мм, 3 –  $x=17.6$  мм (центральная точка контакта). Из рисунка видно, что температура в первой точке растет медленнее, чем в точках ближе к центру пучка ворсинок, контактирующих с донором.

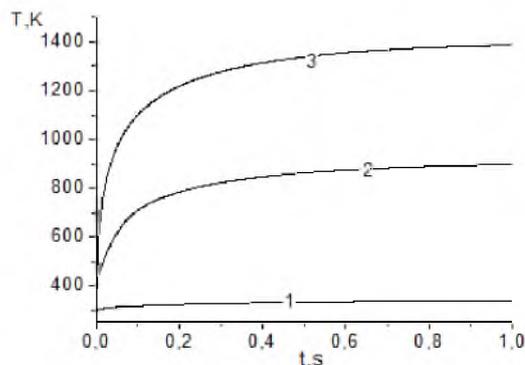


Рисунок 15 – Динамика нагрева точек на поверхности донора:  
1 –  $x=2.16$ , 2 –  $x=10.1$  мм, 3 –  $x=17.6$  мм

На рисунках 16-18 представлено температурное поле 15.1 в различные моменты времени и соответствующие области упругости  $D_e$  и пластичности  $D_p$  в рассматриваемом образце донора размера  $\bar{D} = [0,35\text{мм}] \times [0,15\text{мм}]$ .

Рисунок 16 иллюстрирует температурное поле через 0.05 с во время контакта щетки с поверхностью. Видно, что возникает локальный источник в области наибольшей нагрузки со стороны щетки, т.е. в центре верхней границы, где появляется небольшая локальная область пластической деформации. До этого времени материал донора находился в упругом состоянии.



Рисунок 16 – Распределение температуры в доноре и участки упругой и пластической области в момент времени  $t=0.05\text{с}$

Через последующие 0.05 с температура в центре контакта достигает до 1000 К и область пластического течения расширяется, хотя температура здесь не достигает температуры плавления материала покрытия.

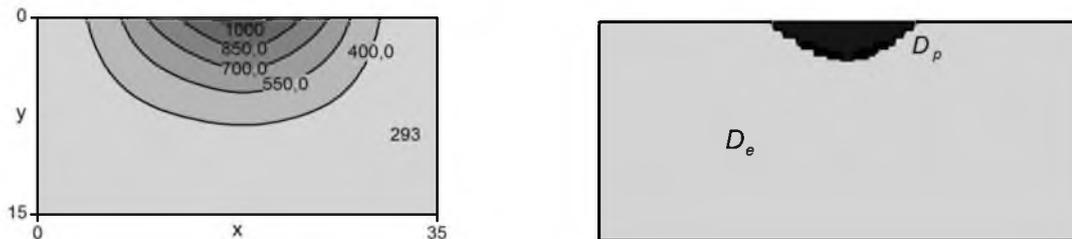


Рисунок 17– Распределение температуры в доноре и участки упругой и пластической области в момент времени  $t=0.1\text{ с}$

Из рисунка 18 видно, что в этот момент времени температура в центральных точка контакта приближается к температуре плавления материала донора, и область пластического состояния материала расширяется.

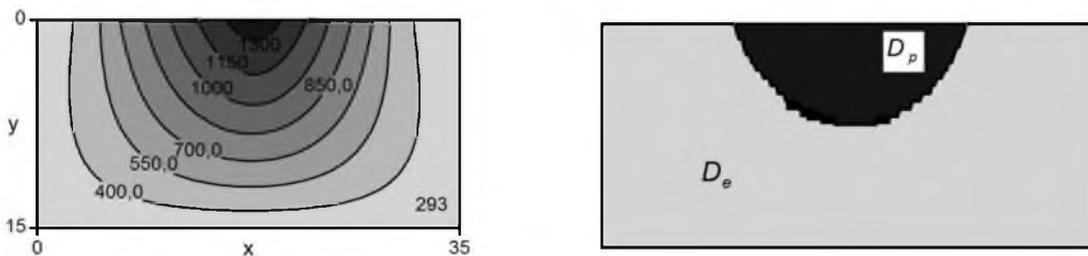


Рисунок 18 – Распределение температуры в доноре и участки упругой и пластической области в момент времени  $t=0.5\text{с}$

Рисунок 19 иллюстрирует температуру ворсинок, контактирующих в точках  $x$  на момент времени  $t=0.5\text{с}$ .

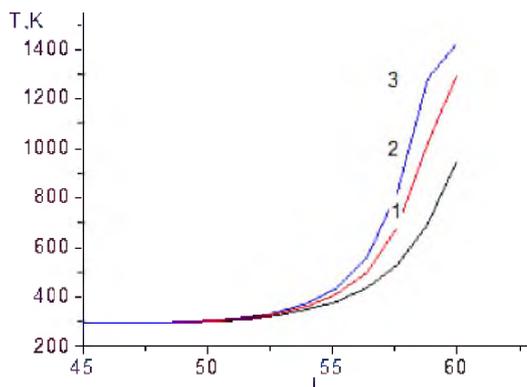


Рисунок 19 – Динамика прогрева ворсинок щетки, контактирующих с поверхностью донора:  
1 –  $x=2.16$ , 2 –  $x=10.1$  мм, 3 –  $x=17.6$  мм

Из графика видно, что концы ворсинок прогреваются, а основная часть длиной порядка 50 мм остается холодной.

Как видно из графиков 15-18 для данных времен происходит частичный съем материала покрытия торцами ворсинок.

### Заключение

Предложенная математическая модель, учитывающая характер фрикционного взаимодействия ворса вращающейся металлической щетки с поверхностью материала донора, позволяет определить тепловое и напряженно-деформированное состояние донора в зоне контакта, а также области пластических и упругих деформаций, распределение температуры по сечению в очаге деформации и в гибких элементах. Посредством моделирования представляется возможным выполнять количественные расчеты съема и переноса микрочастиц материала донора на поверхность обрабатываемой детали, а, следовательно, прогнозировать качество и толщину слоя формируемого покрытия.

Моделирование осуществляется с помощью вычислительных технологий, которые особенно эффективны для взаимосвязанных и сильно нелинейных процессов.

Полученные на основе моделирования закономерности можно использовать для проектирования технологий формирования покрытий из различных материалов методом деформационного плакирования гибким инструментом. Пример анализа максимальных напряжений, возникающих в материале покрытия (доноре) при фрикционном взаимодействии с ворсом щетки, дает представление о кинетике протекания тепловых процессов, что создает предпосылки для обоснованного выбора рациональных режимов деформационного плакирования, обеспечивающих стабильность съема и переноса частиц материала покрытия на поверхность обрабатываемой детали.

Применение нерациональных режимов влияет как на ресурс гибкого инструмента, при которых есть опасность преждевременного износа ворса; так и на достижение параметров качества сформированного слоя покрытия (величина остаточных напряжений, пористость, сплошность, толщина и др.).

Описанная выше математическая модель является базовой и предназначена для анализа тепловых процессов и прогнозирования толщины слоя покрытия, формируемого деформационным плакированием, в зависимости от условий и характера фрикционного взаимодействия ворса щетки с поверхностью материала покрытия (донора).

### Список литературы:

1. Кутьков, А.А. Износостойкие и антифрикционные покрытия / А.А. Кутьков – М.: Машиностроение, 1976. – 152 с.
2. Алексеев, Н.М. Металлические покрытия опор скольжения / Н.М. Алексеев – М.: Наука, 1978. – 76 с.

3. Сайфулин, Р.С. Комбинированные электрохимические покрытия и материалы / Р.С. Сайфулин – М.: «Химия», 1972. – 167 с.
4. Гринберг, А.И. Износостойкие антифрикционные покрытия / А.И. Гринберг, А.Ф. Иванов – М.: Машиностроение, 1982. – 42 с.
5. Брейтгуэйт, Е.Р. Твердые смазочные материалы и антифрикционные покрытия / Е.Р. Брейтгуэйт – Перевод с английского. М.: «Химия», 1967. – 320 с.
6. Буше, Н.А. Совместимость трущихся поверхностей / Н.А. Буше, В.В. Копытько – М.: Наука, 1981. – 127 с.
7. Белевский, Л.С. Пластическое деформирование поверхностного слоя и формирование покрытия при нанесении гибким инструментом / Л.С. Белевский – Магнитогорск: Изд-во Магнитогор. лица РАН, 1996. – 230 с.
8. Анцупов, В.П. Теория и практика плакирования изделий гибким инструментом / В.П. Анцупов – Магнитогорск: МГТУ им. Г.И. Носова, 1999. – 241 с.
9. Белевский, Л.С. Фрикционное плакирование металлом по металлу. Часть 2. Механизм фрикционного плакирования / Л.С. Белевский [и др.] – *Металлург*. 2006. – № 11. – с. 36–38.
10. Завалищин, А.Н. Модификация поверхности металлических изделий с использованием покрытия / А.Н. Завалищин, О.М. Смирнов, С.А. Тулупов – М.: Орбита-М, 2012. – 336 с.
11. Бессонов А.А. Механика: конспект лекций / А.А. Бессонов. Челябинск: Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2013. 158с.
12. Леванцевич, М.А. Модель контактного взаимодействия вращающейся металлической щетки с поверхностью при деформационном плакировании / М.А. Леванцевич – *Механика машин, механизмов и материалов*. 2014. – № 2 (27). – с. 74–80.
13. Белевский, Л.С. Фрикционное плакирование металлом по металлу. Часть 2. Механизм фрикционного плакирования / Л.С. Белевский [и др.] – *Металлург*. 2006. – № 11. – с. 36–38.
14. Амосов, А.П. Элементарные теплофизические модели трения / А.П. Амосов – *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*. 2011. – Т. 13, № 4(3). – с. 656–662.
15. Мейз, Дж. Теория и задачи механики сплошных сред / Дж. Мейз – Изд-во Мир, М., 1974., 319 с.
16. Лурье Ф. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970, 940 с.
17. Коваленко А.Д. Введение в термоупругость. Киев: Наукова думка, 1965, 204 с.
18. Кургузов, Ю.И. Упрочнение кромок лопаток рабочих колес газотурбинных двигателей / Ю.И. Кургузов, М.Ю. Кургузов – *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: технические науки*. 2010. – № 4. – с. 120–127.
19. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. М.: Высш.шк., 1990.-400 с.
20. Самарский, А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 635 с.
21. Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы. М.: Мир, 1986, 446 с.
22. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука,
23. Глушко В.П. Термические константы веществ. Справочник. Под ред. В.П. Глушко. // Вып. IV, М.: Изд-во АН СССР, 1970; вып. V, 1971; вып. VII, 1974.