

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

**МАТЕМАТИКА.
КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ. РЯДЫ**

Практикум

для студентов второго курса специальностей
1-40 05 01-01 «Информационные системы и технологии (в проектировании
и производстве)», 1-28 01 01 «Экономика электронного бизнеса»,
1-36 01 01 «Технология машиностроения», 1-53 01 01-01 «Автоматизация
технологических процессов и производств (машиностроение и
приборостроение)», 1-43 01 07 «Техническая эксплуатация
энергооборудования организаций»

Витебск
2021

УДК 517 (076.1) (075.8)

Составители:

А. В. Коваленко, А. А. Джежора, А. П. Дмитриев,
Ю. А. Завацкий, Е. Ю. Вардомацкая

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом
УО «ВГТУ», протокол № 3 от 27. 11. 2020.

Математика. Кратные интегралы. Элементы теории поля. Ряды :
практикум / сост. А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2021. –
108 с.

Практикум содержит основные теоретические сведения, задания к практическим занятиям, примеры для самостоятельного выполнения заданий, вопросы к экзамену по трём разделам курса «Математика» для студентов специальностей 1-40 05 01-01, 1-28 01 01, 1-36 01 01, 1-43 01 07 и курса «Высшая математика» для студентов специальности 1-53 01 01-01: кратные интегралы, элементы теории поля и ряды. Данное издание предназначено для проведения практических занятий у студентов второго курса факультетов «Информационные технологии и робототехника» и «Экономика и бизнес-управление», а также может быть использовано в ходе изучения указанных тем студентами заочной и дистанционной форм обучения.

УДК 517 (076.1) (075.8)

© УО «ВГТУ», 2021

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
Перечень вопросов учебной программы по курсу «Математика» и «Высшая математика» для специальностей 1-40 05 01-01, 1-28 01 01, 1-36 01 01, 1 43 01 07, 1 53 01 01-01 (второй курс, третий семестр)	5
Практикум по решению задач	7
1 Двойные интегралы	7
2 Тройные интегралы	18
3 Приложения кратных интегралов	29
4 Криволинейные интегралы первого и второго рода	39
5 Поверхностные интегралы первого и второго рода	51
6 Дифференциальные и интегральные характеристики полей.....	60
7 Числовые ряды. Числовые ряды с положительными членами	73
8 Интегральный признак Коши. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды	84
9 Функциональные и степенные ряды	90
10 Ряды Фурье	100
Литература	106
Приложение А	107

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания составлены на основе практических занятий, которые авторы проводили на протяжении многих лет преподавания дисциплины «Математика» и «Высшая математика» в Витебском государственном технологическом университете. Приведённый материал проверен на нескольких поколениях студентов и содержит необходимые сведения для будущих специалистов механико-информационных и экономико-информационных специальностей. Среди рассмотренных в практикуме типовых примеров есть задачи, имеющие практическую направленность и связанные с дисциплинами, которые будут изучать студенты в следующих семестрах.

Данные учебно-методические материалы предназначены для студентов факультета информационных технологий и робототехники, а также для студентов специальности «Экономика электронного бизнеса». В работе приведены теоретические вопросы для сдачи экзамена, содержание и тематика практических занятий по указанным курсам. Методические указания написаны в соответствии с учебной программой дисциплины «Математика» и «Высшая математика» для студентов механико-технологических и экономических специальностей второго года обучения.

В практикуме рассмотрены три раздела курсов «Математика» и «Высшая математика»: числовые и функциональные ряды, кратные интегралы и их применение, элементы теории поля. Каждая тема практикума представляет собой методический материал для проведения практического занятия, содержит решения типовых примеров и подборку рекомендуемых к решению задач по теме занятия, а также задания для выполнения контролируемой самостоятельной работы. В начале каждого раздела приведён краткий теоретический материал, который необходимо знать студенту при подготовке к аудиторной и самостоятельной работе по заданной теме, однако этих сведений недостаточно для сдачи экзамена по предмету. Прежде чем приступать к решению задач практического занятия или выполнению домашнего задания, студенту необходимо изучить теоретический курс лекционного материала или обратиться к академическим изданиям для более детального изучения разделов курса, которые его интересуют. Наименование тем практикума, а также их структура построены в соответствии с учебными программами дисциплин «Математика» и «Высшая математика» для студентов специальностей: 1-40 05 01-01, 1-28 01 01, 1-36 01 01, 1-43 01 07 и 1-53 01 01-01. Данная работа может применяться на усмотрение преподавателя на практических занятиях студентами других специальностей различных форм обучения. Студенты заочной формы обучения могут применять изложенный в практикуме теоретический и практический материал для самостоятельной работы по предмету и выполнению контрольных заданий.

Предложенная методическая разработка поможет студентам подготовиться к прохождению теста по отдельным темам и разделам курса, так как проведение зачёта или экзамена подразумевают электронный контроль знаний.

**ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ ПО КУРСАМ
«МАТЕМАТИКА» И «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»
ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ
1-40 05 01-01, 1-28 01 01, 1-36 01 01, 1-43 01 07, 1-53 01 01-01
(ВТОРОЙ КУРС, ТРЕТИЙ СЕМЕСТР)**

1. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.
2. Задачи, приводящие к понятию тройного интеграла.
3. Определение двойного интеграла.
4. Определение тройного интеграла.
5. Свойства кратных интегралов.
6. Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат.
7. Вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат.
8. Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат.
9. Вычисление двойного интеграла в обобщённой полярной системе координат.
10. Замена переменных в двойном интеграле. Якобиан.
11. Замена переменных в тройном интеграле. Якобиан.
12. Вычисление тройного интеграла в цилиндрической системе координат.
13. Вычисление тройного интеграла в обобщённой цилиндрической системе координат.
14. Вычисление тройного интеграла в сферической системе координат.
15. Вычисление тройного интеграла в обобщённой сферической системе координат.
16. Геометрические приложения кратных интегралов.
17. Механические приложения кратных интегралов. Вычисление центра масс плоской пластины и пространственного тела.
18. Механические приложения кратных интегралов. Вычисление момента инерции плоской пластины и пространственного тела.
19. Криволинейный интеграл первого рода и его свойства.
20. Методы вычисления криволинейного интеграла первого рода.
21. Поверхностный интеграл первого рода и его свойства.
22. Методы вычисления поверхностного интеграла первого рода.
23. Скалярное поле и его характеристики.
24. Векторное поле и его геометрические характеристики.
25. Криволинейный интеграл второго рода и его свойства.
26. Методы вычисления криволинейного интеграла второго рода.
27. Поверхностный интеграл второго рода и его свойства.
28. Методы вычисления поверхностного интеграла первого рода.
29. Интегральные характеристики векторных полей: поток и циркуляция.
30. Дифференциальные характеристики векторных полей: дивергенция, её физический смысл и метод вычисления.

31. Дифференциальные характеристики векторных полей: ротор, его смысл и метод вычисления в декартовой системе координат.

32. Теорема Остроградского-Гаусса.

33. Теорема Стокса.

34. Потенциальные поля. Потенциал поля. Соленоидальные и гармонические поля.

35. Числовой ряд. Сходимость числового ряда. Примеры сходящихся рядов (геометрический и гармонический ряд).

36. Необходимый признак сходимости и достаточный признак расходимости числового ряда. Свойства сходящихся рядов.

37. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости рядов (признак сравнения).

38. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости рядов (предельный признак сравнения).

39. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости рядов (предельный признак Даламбера).

40. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости рядов (предельный радикальный признак Коши).

41. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости рядов (интегральный признак Коши).

42. Знакопеременные ряды. Условная и абсолютная сходимость знакопеременного ряда.

43. Знакопеременяющиеся ряды. Признак Лейбница и следствие из него.

44. Функциональные ряды. Область сходимости функционального ряда.

45. Степенной ряд. Теорема Абеля и следствие из неё.

46. Степенной ряд. Радиус и область сходимости степенного ряда.

47. Теорема существования и единственности разложения функции в степенной ряд. Необходимое и достаточное условие разложения функции в степенной ряд.

48. Разложение элементарных функций в степенной ряд.

49. Вычисление приближённых значений функции с помощью степенных рядов.

50. Нахождение и вычисление интегралов с помощью степенных рядов.

51. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

52. Периодические функции и их свойства. Понятие числового тригонометрического ряда.

53. Ортогональные системы тригонометрических функций.

54. Тригонометрический ряд Фурье.

55. Разложение четных и нечетных функций в ряд Фурье.

56. Сходимость тригонометрического ряда. Теорема о разложении периодической функции в тригонометрический ряд Фурье.

57. Разложение в ряд Фурье функции, заданной на промежутке $(0;l)$.

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1 ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Содержание: определение двойного интеграла, вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат, замена переменных в двойном интеграле, вычисление двойного интеграла в полярной системе координат.

1.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Пусть функция $f(x; y)$ определена в некоторой замкнутой области G . Разобьем данную область системой пересекающих линий произвольным образом на n элементарных областей с площадями $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_i, \dots, \Delta S_n$. Расстояние между наиболее удаленными точками каждой элементарной области называется *диаметром разбиения*: $d_1, d_2, \dots, d_i, \dots, d_n$. Значение $\lambda_n = \max_i d_i$ называется *мелкостью разбиения*. В каждой элементарной области произвольным образом выбираем точки $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2), \dots, M_i(x_i; y_i), \dots, M_n(x_n; y_n)$. Вычисляем значение функции в этих точках: $f(x_1; y_1), f(x_2; y_2), \dots, f(x_i; y_i), \dots, f(x_n; y_n)$. Составим суммы $\sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i$, которые называются *двухмерными интегральными суммами* функции f в области G .

Определение 1.1.1 Двойным интегралом от функции $f(x; y)$ по области G называется предел двухмерных интегральных сумм данной функции при стремлении мелкости разбиения к нулю и если этот предел существует и конечен.

$$\iint_G f(x; y) dS \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i. \quad (1.1.1)$$

Теорема 1.1.1 Если функция $f(x; y)$ непрерывна в замкнутой области G , то предел двухмерных интегральных сумм от функции существует и функция является интегрируемой в заданной области.

Так как, определение двойного интеграла конструктивно не отличается от определения определённого интеграла, то свойства двойного интеграла будут аналогичны свойствам определённого интеграла.

В декартовой прямоугольной системе координат область G удобно разбивать на элементарные области прямыми линиями, параллельными осям коор-

динат. Полученные при таком разбиении элементарные области, принадлежащие области G , являются прямоугольниками. Следовательно, $dS = dxdy$ и

$$\iint_G f(x; y) dS = \iint_G f(x; y) dxdy. \quad (1.1.2)$$

Определение 1.1.2 Область G называется *стандартной в направлении оси Oy* (оси Ox), если любая прямая, проходящая через данную область параллельно оси Oy (оси Ox), пересекает границу области только в двух точках.

Рассмотрим методы вычисления двойного интеграла по областям, стандартным в направлении координатных осей. Так как практически любую область можно представить в виде объединения стандартных областей, то согласно свойству 3 двойных интегралов, эти методы применимы для вычисления этих интегралов по любым областям.

Предположим, что область G является стандартной относительно оси Oy , то есть $G = \{(x; y) | a \leq x \leq b \wedge y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$. Тогда двойной интеграл вычисляется путём перехода к повторным интегралам (внутреннее интегрирование ведётся по переменной y , а внешнее – по переменной x):

$$\iint_G f(x; y) dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x; y) dy. \quad (1.1.3)$$

Предположим, что область G является стандартной относительно оси Ox , то есть $G = \{(x; y) | c \leq y \leq d \wedge x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$. Тогда двойной интеграл вычисляется путём перехода к повторным интегралам (внутреннее интегрирование ведётся по переменной x , а внешнее – по переменной y):

$$\iint_G f(x; y) dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x; y) dx. \quad (1.1.4)$$

Пусть переменные x и y связаны с переменными u, v соотношениями $x = x(u; v)$, $y = y(u; v)$, где функции $x(u; v)$, $y(u; v)$ являются непрерывными и дифференцируемыми функциями, взаимно однозначно отображающими область G плоскости Oxy на область G' плоскости $O'uv$, при этом *якобиан*

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (1.1.5)$$

сохраняет постоянный знак в области G . Тогда справедлива формула замены переменных в двойном интеграле

$$\iint_G f(x; y) dx dy = \iint_{G_1} f(x(u; v); y(u; v)) |I| du dv. \quad (1.1.6)$$

Расстановка пределов интегрирования при переходе к повторным интегралам осуществляется по рассмотренным выше правилам с учётом области интегрирования G' .

Рассмотрим полярную систему координат. Прямоугольные декартовы координаты (x, y) и полярные координаты (r, φ) связаны соотношениями:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Переход в двойном интеграле от декартовых координат к полярным координатам осуществляется по формуле (якобиан равен $I = r$)

$$\iint_G f(x; y) dx dy = \iint_G f(r \cos \varphi; r \sin \varphi) r dr d\varphi. \quad (1.1.7)$$

В двойном интеграле, в большинстве случаев, удобнее переходить к полярной системе координат, если под знаком интеграла или в области интегрирования присутствует выражение вида: $x^2 + y^2$. В полярной системе координат значение выражения $x^2 + y^2$ равно r^2 , что даёт значительное упрощение при вычислении двойного интеграла.

Рассмотрим двойной интеграл $\iint_G F(r; \varphi) r dr d\varphi$. Предположим, что область G ограничена линиями:

$$G: \begin{cases} \varphi = \alpha, \varphi = \beta, \\ r = r_1(\varphi), r = r_2(\varphi). \end{cases}$$

Таким образом, предположим, что область G такова, что любой луч, исходящий из полюса и имеющий общие точки с областью, пересекает границу области только в двух точках. Тогда вычисление двойного интеграла в полярной системе координат, также как и в декартовой системе координат, сводится к вычислению повторных интегралов

$$\iint_G F(r; \varphi) dr d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r; \varphi) dr. \quad (1.1.8)$$

Рассмотрим обобщённые полярные координаты, которые связаны с прямоугольными декартовыми координатами следующими соотношениями:

$$x = ar \cos \varphi, \quad y = br \sin \varphi, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Переход в двойном интеграле от декартовых координат к обобщённым полярным координатам осуществляется по формуле (якобиан равен $I = abr$)

$$\iint_G f(x; y) dx dy = ab \iint_G f(ar \cos \varphi; br \sin \varphi) r dr d\varphi. \quad (1.1.9)$$

В двойном интеграле, в большинстве случаев, удобнее переходить к обобщённой полярной системе координат, если под знаком интеграла или в области интегрирования присутствует выражение вида: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$. В обобщённой полярной системе координат значение выражения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ равно r^2 , что даёт значительное упрощение при вычислении двойного интеграла.

Вычисление двойного интеграла в обобщённой полярной системе координат, также как и в полярной системе координат, сводится к вычислению повторных интегралов.

1.2 Примеры решения типовых задач

1.2.1 Вычислить двойной интеграл $\iint_G x y dx dy$, изобразив в декартовой си-

стеме координат область интегрирования G , которая ограничена параболой $y^2 = x$ и прямой $y + x = 2$.

Решение. Изобразим область интегрирования G , предварительно найдя точки пересечения параболы и прямой $y + x = 2$. Решим систему

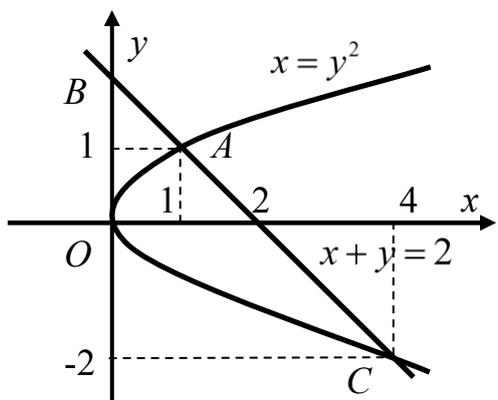


Рисунок 1.1 – Фигура OAC

$$\begin{cases} y^2 = x, \\ x = 2 - y. \end{cases} \quad y^2 = 2 - y \text{ или } y^2 + y - 2 = 0.$$

$$\begin{cases} y_1 = 1, \\ x_1 = 1, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y_2 = -2, \\ x_2 = 4. \end{cases}$$

Таким образом, получили две точки пересечения параболы $y^2 = x$ и прямой $y + x = 2$: $A(1; 1)$ и $C(4; -2)$.

Область интегрирования G на рисунке 1.1 представляет собой фигуру OAC , которая является стандартной вдоль координатной оси Ox . Вычислим двойной интеграл $\iint_G xy dx dy$ путем перехода к повторным интегралам:

$$\begin{aligned} \iint_G xy dx dy &= \int_{-2}^1 y dy \int_{y^2}^{2-y} x dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^1 y x^2 \Big|_{y^2}^{2-y} dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^1 y \left((2-y)^2 - (y^2)^2 \right) dy = \frac{1}{2} \int_{-2}^1 (4y - 4y^2 + y^3 - y^5) dy = \\ &= \frac{1}{2} \left(2y^2 - \frac{4}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{6}y^6 \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{4}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) - \frac{1}{2} \left(8 + \frac{32}{3} + 4 - \frac{32}{3} \right) = -5\frac{5}{8}. \end{aligned}$$

1.2.2 Вычислить двойной интеграл $\iint_G \frac{8xy}{x^2 + y^2} dx dy$, где область G ограни-

чена дугой окружности $x^2 + y^2 = 16$ и координатными осями ($x \geq 0, y \leq 0$).

Решение. Так как область интегрирования представляет собой часть круга, то двойной интеграл проще вычислить в полярных координатах. Согласно формулам (1.1.7) и (1.1.8) имеем:

$$\begin{aligned} \iint_G \frac{8xy}{x^2 + y^2} dx dy &= \iint_G \frac{8r \cos \varphi r \sin \varphi}{r^2} r d\varphi dr = 4 \iint_G r \sin 2\varphi d\varphi dr = 4 \int_{\pi}^{3\pi/2} d\varphi \int_0^4 r \sin 2\varphi dr = \\ &= 2 \int_{\pi}^{3\pi/2} \sin 2\varphi r^2 \Big|_0^4 d\varphi = 32 \int_{\pi}^{3\pi/2} \sin 2\varphi d\varphi = -16 \cos 2\varphi \Big|_{\pi}^{3\pi/2} = -16 \cdot (-1) + 16 \cdot 1 = 32. \end{aligned}$$

1.3 Задания для решения на практическом занятии

1.3.1 Вычислить повторные интегралы, написать уравнения линий, ограничивающие области интегрирования соответствующих двойных интегралов:

а) $\int_2^4 dx \int_1^{x+1} \frac{y}{x} dy$;	б) $\int_1^2 dx \int_2^{x^2+4} \frac{1}{x^2} dy$;	в) $\int_1^2 dx \int_2^{x^2+4} \frac{1}{x^2} dy$;
г) $\int_1^3 dy \int_1^{y^3} \frac{6x}{y^4} dx$;	д) $\int_1^4 dx \int_{4/x}^{5-x} \frac{x}{y} dy$;	е) $\int_2^5 dx \int_1^x 4xy dy$;
ж) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[3]{y^2}} \sqrt[3]{y} dx$;	з) $\int_1^5 dy \int_0^{\sqrt{y}} xy dx$;	и) $\int_1^e dx \int_0^{x^3} (2x + 4yx) dy$.

1.3.2 Расставить пределы интегрирования в повторных интегралах, к которым сводятся двойные интегралы $\iint_G f(x; y) dx dy$ от непрерывной функции

$f(x; y)$ в указанных областях G :

- а) G ограничена линиями $y^2 = x$, $x = 1$;
- б) G ограничена линиями $xy = 6$, $x + y = 7$;
- в) G ограничена линиями $y = x^2 + 1$, $x - y = -3$;
- г) G ограничена линиями $y = x$, $y = \sqrt{3}x$, $x^2 + y^2 = 9$ ($x \leq 0, y \leq 0$);
- д) G ограничена линиями $x^2 + y^2 = 4$, $y = 2x - x^2$, $x = 0$ ($x \geq 0, y \geq 0$).

1.3.3 Изменить порядок интегрирования в заданных повторных интегралах, предварительно изобразив области интегрирования:

- а) $\int_0^2 dy \int_{y/2}^y f(x; y) dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^2 f(x; y) dx$;
- б) $\int_{-2}^2 dx \int_{x^2}^4 f(x; y) dy$;
- в) $\int_1^2 dy \int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} f(x; y) dx + \int_2^5 dy \int_{-\sqrt{y-1}}^{3-y} f(x; y) dx$;
- г) $\int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x; y) dx$;
- д) $\int_{-2}^{-1} dx \int_{\frac{1}{2}x-1}^{4x+6} f(x; y) dy + \int_{-1}^6 dx \int_{\frac{1}{2}x-1}^2 f(x; y) dy$;
- е) $\int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x; y) dy$.

1.3.4 Вычислить двойной интеграл $\iint_G xy dx dy$, если область G ограничена линиями $y = x^2$ и $y^2 = x$.

1.3.5 Вычислить двойной интеграл $\iint_G (2x + 2y) dx dy$, если область G ограничена линиями $xy = 6$ и $y + x = 7$.

1.3.6 Вычислить двойной интеграл $\iint_G (x + y) dx dy$, если область G ограничена линиями $y = 3x/2$ и $y = 4 - (x - 1)^2$.

1.3.7 Вычислить двойной интеграл $\iint_G (1 - 2xy) dx dy$, если область G ограничена линиями $y^2 = x + 2$ и $y - x = 0$.

1.3.8 Вычислить двойной интеграл $\iint_G \frac{y^3}{x^2} dx dy$, если область G ограничена

линиями $y = \frac{x}{3}$, $y = \sqrt{x}$ и $x = 1$. Вычисления произвести с внешним интегрированием по переменной x и внешним интегрированием по переменной y .

1.3.9 Вычислить двойной интеграл $\iint_G x \cos(x+y) dx dy$, если область G ограничена линиями $x = y$, $x = \pi$ и $y = 0$.

1.3.10 Вычислить двойной интеграл $\iint_G (x^2 + y) dx dy$, если область G ограничена линиями $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$ и $xy = 2$ ($x \geq 0$).

1.3.11 Вычислить двойной интеграл $\iint_G (2x - 2y) dx dy$, если область G ограничена прямыми $x - y = 2$, $x - y = -1$, $y + 2x = 3$, $y + 2x = 1$.

1.3.12 Вычислить повторные интегралы $\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{4 \cos \varphi} \sqrt{16 - r^2} r dr d\varphi$.

1.3.13 Вычислить двойной интеграл $\iint_G r \sin \varphi dr d\varphi$, если область G заключена между линиями $r = 2 + \cos \varphi$ и $r = 1$.

1.3.14 Вычислить двойной интеграл $\iint_G r^2 \cos \varphi dr d\varphi$, если область G представляет собой половину круга радиуса R с центром в точке $C\left(R; \frac{\pi}{2}\right)$, расположенного справа от этой точки.

1.3.15 Вычислить двойной интеграл $\iint_G 12r^2 \sin \varphi dr d\varphi$, если область G ограничена полярной осью, линией $r = 3 + \cos \varphi$ и расположена выше этой оси.

1.3.16 Вычислить повторные интегралы $\int_0^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \sin \sqrt{x^2 + y^2} dy$.

1.3.17 Вычислить двойной интеграл $\iint_G \frac{xdxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, если область G ограничена линиями $x^2 + y^2 = 4$ и $x^2 + y^2 = 16$ ($x \leq 0$, $y \geq 0$).

1.3.18 Вычислить двойной интеграл $\iint_G \left(\cos \sqrt{x^2 + y^2} / \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx dy$, если область G определена неравенствами $\pi^2/9 \leq x^2 + y^2 \leq 9\pi^2$.

1.3.19 Вычислить двойной интеграл $\iint_G (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) dx dy$, если область G определена неравенствами $x^2 + y^2 \geq 25$ и $x^2 + y^2 \leq 36$.

1.3.20 Вычислить двойной интеграл $\iint_G xy dx dy$, если область G ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 32x$.

1.3.21 Вычислить двойной интеграл $\iint_G (x^2 - y^2) dx dy$, если область G ограничена линиями $x^2 + y^2 = 81$ и $x^2 + y^2 = 100$ ($x \leq 0, y \geq 0$).

1.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

1.4.1 Вычислить двойной интеграл по области G , ограниченной указанными линиями. Вычисления произвести с внешним интегрированием по переменной x и внешним интегрированием по переменной y . Начертить область интегрирования.

1.4.1.1 $\iint_G (x^2y + y^2x) dx dy, G: y = x, x + y = 1, y = 0, 25.$

1.4.1.2 $\iint_G (x^2 + yx + y^2) dx dy, G: y = x^2, x + y = 2.$

1.4.1.3 $\iint_G (x^2 - y + y^2x) dx dy, G: y = x^2, x = y^3.$

1.4.1.4 $\iint_G (5x^2y - 3y^2x^3) dx dy, G: y = x, x + y = 3, y = 1.$

1.4.1.5 $\iint_G (x^2 - y^2) dx dy, G: y - x^2 = 0, x - y^2 = 0.$

1.4.1.6 $\iint_G (2x^3y + 3y^2x) dx dy, G: y = x^3, y = x^2.$

1.4.1.7 $\iint_G (4x^3 + 3y^2x^2) dx dy, G: y = x^3, y = x, x \geq 0.$

1.4.1.8 $\iint_G (5x^4 + 2y^3x^2) dx dy, G: y = x^3, y = x, x \leq 0.$

1.4.1.9 $\iint_G (x - y) dx dy, G: y = x^2, y = 1, x = 0, 5.$

1.4.1.10 $\iint_G y^2x^2 dx dy, G: y^2 = x, x = 1, y = 0, 5.$

1.4.1.11 $\iint_G (2x^2y - y^2x) dx dy, G: y = 2x, x + y = 3, y = 1.$

$$1.4.1.12 \iint_G (2x^2 - 3yx + 3y^3) dx dy, \quad G: y = x^2, 2x + y = 3.$$

$$1.4.1.13 \iint_G (2x^2 - 3y + 4yx) dx dy, \quad G: y = x^2, y = 8 - x^2.$$

$$1.4.1.14 \iint_G (4xy - 3y^2 x^2) dx dy, \quad G: y = x, x + y = 4, y = 1.$$

$$1.4.1.15 \iint_G (3x^2 + 9y^2) dx dy, \quad G: y = x^2 - 4, y = 4 - x^2.$$

$$1.4.1.16 \iint_G (6x^3 y + 6y^3 x) dx dy, \quad G: y = x^3, y^3 = x, y \leq 0.$$

$$1.4.1.17 \iint_G (5x^4 - 6y^2 x^3) dx dy, \quad G: y = x^5, y = x, x \geq 0.$$

$$1.4.1.18 \iint_G (6x^5 + 16y^4 x^4) dx dy, \quad G: y = x^5, y = x, x \leq 0.$$

$$1.4.1.19 \iint_G 16x^2 y dx dy, \quad G: y = x^3, y = 1, x = 0.$$

$$1.4.1.20 \iint_G 12xy^2 dx dy, \quad G: y^3 = x, x = 1, y = 0, 5.$$

$$1.4.1.21 \iint_G (9x^2 y^2 - 4yx) dx dy, \quad G: y = 3x, x + y = 4, y = 1.$$

$$1.4.1.22 \iint_G (3x^2 + 4yx + 8y^3) dx dy, \quad G: y = x^2, 3x + y = 4.$$

$$1.4.1.23 \iint_G (4x^3 - 3y^2 + 9y^2 x^2) dx dy, \quad G: y = x^2, y = 18 - x^2.$$

$$1.4.1.24 \iint_G (6x^2 y - 12y^3 x^2) dx dy, \quad G: y = x, x + y = 8, y = 2.$$

$$1.4.1.25 \iint_G (4x^3 + 12y^3) dx dy, \quad G: y = -1 + x^2, y = 1 - x^2.$$

$$1.4.1.26 \iint_G (10xy^4 + 10yx^4) dx dy, \quad G: y = x^4, y^4 = x.$$

$$1.4.1.27 \iint_G (6x^5 - 20y^3 x^4) dx dy, \quad G: y = x^6, y = x^2, x \geq 0.$$

$$1.4.1.28 \iint_G (4x + 9yx) dx dy, \quad G: y = x^6, y = x^2, x \leq 0.$$

$$1.4.1.29 \iint_G 36xy dx dy, \quad G: y = 2x, y = x, x = 4.$$

$$1.4.1.30 \iint_G (2x + 2y) dx dy, \quad G: y^4 = x, x = 16, y \leq 1.$$

1.4.2 Вычислить двойные интегралы. Начертить область интегрирования.

$$1.4.2.1 \iint_G \cos \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad G: \frac{\pi^2}{16} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{9}, y \leq x, y \geq 0, x \geq 0.$$

- 1.4.2.2 $\iint_G \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad G: \frac{\pi^2}{9} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{4}, y \geq x, y \geq 0, x \geq 0.$
- 1.4.2.3 $\iint_G \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad G: 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2, y \geq -x, y \geq 0, x \leq 0.$
- 1.4.2.4 $\iint_G \arccos(x^2 + y^2) dx dy, \quad G: \frac{3}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1, y \leq -x, y \geq 0, x \leq 0.$
- 1.4.2.5 $\iint_G \arcsin(x^2 + y^2) dx dy, \quad G: \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4}, y \geq x, y \leq 0, x \leq 0.$
- 1.4.2.6 $\iint_G e^{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad G: \ln^2 4 \leq x^2 + y^2 \leq \ln^2 5, y \leq x, y \leq 0, x \leq 0.$
- 1.4.2.7 $\iint_G \frac{\ln \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad G: \ln^2 5 \leq x^2 + y^2 \leq \ln^2 6, y \leq -x, y \leq 0, x \geq 0.$
- 1.4.2.8 $\iint_G \frac{\arccos \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad G: \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}, y \geq -x, y \leq 0, x \geq 0.$
- 1.4.2.9 $\iint_G \frac{\arcsin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad G: \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4}, y \leq x, y \geq -x, x \geq 0.$
- 1.4.2.10 $\iint_G \arcc \operatorname{tg} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad G: \frac{1}{3} \leq x^2 + y^2 \leq 3, y \geq -x, y \geq x, y \geq 0.$
- 1.4.2.11 $\iint_G \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad G: \frac{1}{3} \leq x^2 + y^2 \leq 1, y \leq -x, y \geq x, x \leq 0.$
- 1.4.2.12 $\iint_G \frac{\arcc \operatorname{tg} \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad G: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3, y \leq -x, y \leq x, y \leq 0.$
- 1.4.2.13 $\iint_G \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad G: \frac{1}{3} \leq x^2 + y^2 \leq 3, y \geq -x, y \geq 0.$
- 1.4.2.14 $\iint_G \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\cos^3 \sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad G: \frac{\pi^2}{36} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{16}, y \leq -x, x \leq 0.$
- 1.4.2.15 $\iint_G \frac{\cos \sqrt{x^2 + y^2}}{\sin^3 \sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad G: \frac{\pi^2}{16} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{9}, y \leq x, x \geq 0.$
- 1.4.2.16 $\iint_G \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad G: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \leq \sqrt{3} \cdot x, y \geq 0, x \geq 0.$
- 1.4.2.17 $\iint_G \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad G: 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, y \geq 0, x \geq 0.$

$$1.4.2.18 \quad \iint_G \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \cdot \ln \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dx dy, \quad G: 9 \leq x^2 + y^2 \leq 16, y \geq -\sqrt{3} \cdot x, y \geq 0, x \leq 0.$$

$$1.4.2.19 \quad \iint_G \frac{\arccos \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{y}}{\sqrt[4]{x^2 + y^2}} dx dy, \quad G: 16 \leq x^2 + y^2 \leq 81, y \leq -x, y \geq 0, x \leq 0.$$

$$1.4.2.20 \quad \iint_G \frac{\arcsin \frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{x}{y}}{\sqrt[8]{x^2 + y^2}} dx dy, \quad G: 256 \leq x^2 + y^2 \leq 6561, y \geq x, y \leq 0, x \leq 0.$$

$$1.4.2.21 \quad \iint_G \left((x^2 + y^2) \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \cdot e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}} \right) dx dy, \quad G: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \leq x, y \leq 0, x \leq 0.$$

$$1.4.2.22 \quad \iint_G \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} \cdot \frac{\ln \sqrt{4x^2 + 4y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dx dy, \quad G: e^2 \leq x^2 + y^2 \leq e^4, y \leq x, y \leq 0, x \geq 0.$$

$$1.4.2.23 \quad \iint_G \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} \cdot \frac{\arccos \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dx dy, \quad G: \frac{3}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x, y \leq 0, x \geq 0.$$

$$1.4.2.24 \quad \iint_G \frac{2 \arcsin \sqrt{x^2 + y^2}}{\operatorname{arctg} \frac{y}{x} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad G: \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1, y \leq \sqrt{3} \cdot x, y \geq -x, x \geq 0.$$

$$1.4.2.25 \quad \iint_G \frac{\operatorname{arcc} \operatorname{tg} \sqrt{x^2 + y^2}}{\operatorname{arcc} \operatorname{tg} \frac{x}{y}} dx dy, \quad G: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3, y \geq -\frac{x}{\sqrt{3}}, y \geq \sqrt{3} \cdot x, y \geq 0.$$

$$1.4.2.26 \quad \iint_G \left(\sqrt{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}} \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx dy, \quad G: \frac{1}{3} \leq x^2 + y^2 \leq 3, y \leq -x, y \geq x, x \leq 0.$$

$$1.4.2.27 \quad \iint_G \frac{\operatorname{arcc} \operatorname{tg} \sqrt{x^2 + y^2}}{\operatorname{arctg}^2 \frac{y}{x} \sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad G: \frac{1}{3} \leq x^2 + y^2 \leq 3, y \leq -\sqrt{3} \cdot x, y \leq x, y \leq 0.$$

$$1.4.2.28 \quad \iint_G \left(\operatorname{arctg}^3 \frac{y}{x} \cdot \frac{\operatorname{arctg} (2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dx dy, \quad G: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3, y \geq -\frac{x}{\sqrt{3}}, y \geq 0.$$

$$1.4.2.29 \quad \iint_G \left(\sqrt{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}} \cdot \operatorname{tg} \sqrt{4x^2 + 4y^2} \right) dx dy, \quad G: \frac{\pi^2}{36} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{9}, y \leq -\sqrt{3}x, x \leq 0.$$

$$1.4.2.30 \quad \iint_G \left(\operatorname{arctg}^2 \frac{y}{x} \cdot \frac{\cos \sqrt{x^2 + y^2}}{\sin^3 \sqrt{x^2 + y^2}} \right) dx dy, \quad G: \frac{\pi^2}{36} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{16}, y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}, x \geq 0.$$

2 ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Содержание: определение тройного интеграла, вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат, замена переменных в тройном интеграле, вычисление тройного интеграла в цилиндрической и сферической системах координат.

2.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Пусть функция $f(x; y; z)$ определена в некоторой замкнутой области Ω . Разобьем данную область системой пересекающихся линий произвольным образом на n элементарных областей с объёмами $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$. Расстояние между наиболее удаленными точками каждой элементарной области называется *диаметром разбиения*: d_1, d_2, \dots, d_n . Значение $\lambda_n = \max_i d_i$ называется *мелкостью разбиения*. В каждой элементарной области произвольным образом выбираем точки $M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2), \dots, M_n(x_n; y_n; z_n)$ и вычисляем значение функции в них: $f(x_1; y_1; z_1), f(x_2; y_2; z_2), \dots, f(x_n; y_n; z_n)$. Составим суммы $\sum_{i=1}^n f(x_i; y_i; z_i) \cdot \Delta V_i$, которые называются *трёхмерными интегральными суммами* функции $f(x; y; z)$ в области Ω .

Определение 2.1.1 *Тройным интегралом* от функции $f(x; y; z)$ по области Ω называется предел трёхмерных интегральных сумм данной функции при стремлении мелкости разбиения к нулю и если этот предел существует и конечен.

$$\iiint_{\Omega} f(x; y; z) dV \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i; z_i) \cdot \Delta V_i. \quad (2.1.1)$$

Теорема 2.1.1 Если функция $f(x; y; z)$ непрерывна в замкнутой области Ω , то предел трёхмерных интегральных сумм от функции существует и функция является интегрируемой в заданной области.

Так как определение тройного интеграла конструктивно не отличается от определения определённого интеграла, то свойства тройного интеграла будут аналогичны свойствам определённого интеграла.

В декартовой прямоугольной системе координат область Ω удобно разбивать на элементарные области плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Полученные при таком разбиении элементарные области, принадлежащие области Ω , являются параллелепипедами с объёмами $dV = dxdydz$. Следовательно, тройной интеграл принимает вид

$$\iiint_{\Omega} f(x; y; z) dV = \iiint_{\Omega} f(x; y; z) dxdydz. \quad (2.1.2)$$

Определение 2.1.2 Область Ω называется *стандартной в направлении оси Oz* (оси Ox , оси Oy), если любая прямая, проходящая через данную область параллельно оси Oz (оси Ox , оси Oy), пересекает границу области только в двух точках.

Рассмотрим методы вычисления тройного интеграла по областям, стандартным в направлении координатных осей. Так как практически любую область можно представить в виде объединения стандартных областей, то согласно свойству 3 тройных интегралов, эти методы применимы для вычисления тройных интегралов по любым областям.

Предположим, что область является стандартной относительно оси Oz . Тогда множество точек заданной области Ω можно записать в виде: $\Omega = \{(x; y; z) | (x; y) \in G \wedge z_1(x; y) \leq z \leq z_2(x; y)\}$, с учетом того, что проекция пространственной области Ω на плоскость Oxy представляет собой плоскую область G . Предположим, что область G является стандартной относительно оси Oy , то есть $G = \{(x; y) | a \leq x \leq b \wedge y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$. Тогда тройной интеграл вычисляется путём перехода к повторным интегралам:

$$\iiint_{\Omega} f(x; y; z) dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x; y)}^{z_2(x; y)} f(x; y; z) dz. \quad (2.1.3)$$

Предположим, что область G является стандартной относительно оси Ox , то есть $G = \{(x; y) | c \leq y \leq d \wedge x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$. Тогда тройной интеграл вычисляется путём перехода к повторным интегралам:

$$\iiint_{\Omega} f(x; y; z) dxdydz = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int_{z_1(x; y)}^{z_2(x; y)} f(x; y; z) dz. \quad (2.1.4)$$

Пусть переменные x , y и z связаны с переменными u, v, w соотношениями $x = x(u; v; w)$, $y = y(u; v; w)$, $z = z(u; v; w)$, где функции $x(u; v; w)$, $y(u; v; w)$ и $z(u; v; w)$ являются непрерывными и дифференцируемыми функциями, взаимно однозначно отображающими область Ω пространства $Oxyz$ на область Ω' пространства $O'uvw$, при этом якобиан

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \quad (2.1.5)$$

сохраняет постоянный знак в области Ω . Тогда справедлива формула замены переменных в двойном интеграле

$$\iiint_{\Omega} f(x; y; z) dx dy dz = \iiint_{\Omega_1} f(x(u; v; w); y(u; v; w); z(u; v; w)) |I| du dv dw. \quad (2.1.6)$$

Расстановка пределов интегрирования при переходе к повторным интегралам осуществляется по рассмотренным выше правилам с учётом области интегрирования Ω' .

Рассмотрим цилиндрическую систему координат. Прямоугольные декартовы координаты (x, y, z) и цилиндрические координаты (r, φ, z) связаны соотношениями:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Переход в тройном интеграле от декартовых координат к цилиндрическим координатам осуществляется по формуле (якобиан $I = r$)

$$\iiint_{\Omega} f(x; y; z) dx dy dz = \iiint_{\Omega_1} f(r \cos \varphi; r \sin \varphi; z) r d\varphi dr dz. \quad (2.1.7)$$

В тройном интеграле, в большинстве случаев, удобнее переходить к цилиндрической системе координат, если под знаком интеграла или в области интегрирования присутствует выражение вида: $x^2 + y^2$. В цилиндрической системе координат значение выражения $x^2 + y^2$ равно r^2 , что даёт значительное упрощение при вычислении тройного интеграла.

Рассмотрим тройной интеграл $\iiint_{\Omega} F(r; \varphi; z) d\varphi dr dz$. Предположим, что область Ω ограничена поверхностями:

$$\Omega: \begin{cases} \varphi = \alpha, \varphi = \beta, \\ r = r_1(\varphi), r = r_2(\varphi), \\ z = z_1(\varphi; r), z = z_2(\varphi; r). \end{cases}$$

Тогда вычисление тройного интеграла в цилиндрической системе координат, также как и в декартовой системе координат, сводится к вычислению повторных интегралов

$$\iiint_{\Omega} F(r; \varphi; z) d\varphi dr dz = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} dr \int_{z_1(\varphi; r)}^{z_2(\varphi; r)} F(r; \varphi; z) dz. \quad (2.1.8)$$

Рассмотрим обобщённые цилиндрические координаты, которые связаны с прямоугольными декартовыми координатами следующими соотношениями:

$$x = ar \cos \varphi, \quad y = br \sin \varphi, \quad z = z, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Переход в тройном интеграле от декартовых координат к обобщённым цилиндрическим координатам осуществляется по формуле (якобиан равен $I = abr$)

$$\iiint_{\Omega} f(x; y; z) dx dy dz = ab \iiint_{\Omega_1} f(ar \cos \varphi; br \sin \varphi; z) r d\varphi dr dz. \quad (2.1.9)$$

В тройном интеграле, в большинстве случаев, удобнее переходить к обобщённой цилиндрической системе координат, если под знаком интеграла или в области интегрирования присутствует выражение вида: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$. В обобщённой цилиндрической системе координат значение выражения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ равно r^2 , что даёт значительное упрощение при вычислении тройного интеграла.

Вычисление тройного интеграла в обобщённой цилиндрической системе координат, также как и в цилиндрической системе координат, сводится к вычислению повторных интегралов.

Рассмотрим сферическую систему координат. Прямоугольные декартовы координаты (x, y, z) и сферические координаты (φ, ρ, Θ) связаны соотношениями:

$$x = \rho \cos \varphi \sin \Theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \Theta, \quad z = \rho \cos \Theta,$$

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \Theta \leq \pi.$$

Переход в тройном интеграле от декартовых координат к сферическим координатам осуществляется по формуле (якобиан равен $I = \rho^2 \sin \Theta$)

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x; y; z) \, dx dy dz = \\ & = \iiint_{\Omega_1} f(\rho \cos \varphi \sin \Theta; \rho \sin \varphi \sin \Theta; \rho \cos \Theta) \rho^2 \sin \Theta \, d\varphi d\rho d\Theta. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

В тройном интеграле, в большинстве случаев, удобнее переходить к сферической системе координат, если под знаком интеграла или в области интегрирования присутствует выражение вида: $x^2 + y^2 + z^2$. В сферической системе координат значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$ равно ρ^2 , что даёт значительное упрощение при вычислении тройного интеграла.

Рассмотрим тройной интеграл $\iiint_{\Omega} F(\varphi; \rho; \Theta) \, d\varphi d\rho d\Theta$. Предположим, что область Ω ограничена поверхностями:

$$\Omega: \begin{cases} \varphi = \alpha, \varphi = \beta, \\ \rho = \rho_1(\varphi), \rho = \rho_2(\varphi), \\ \Theta = \Theta_1(\varphi; \rho), \Theta = \Theta_2(\varphi; \rho). \end{cases}$$

Тогда вычисление тройного интеграла в сферической системе координат, также как и в декартовой системе координат, сводится к вычислению повторных интегралов

$$\iiint_{\Omega} F(\varphi; \rho; \Theta) \, d\varphi d\rho d\Theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} d\rho \int_{\Theta_1(\varphi; \rho)}^{\Theta_2(\varphi; \rho)} F(\varphi; \rho; \Theta) \, d\Theta. \quad (2.1.11)$$

Рассмотрим обобщённые сферические координаты, которые связаны с прямоугольными декартовыми координатами следующими соотношениями:

$$x = a\rho \cos \varphi \sin \Theta, \quad y = b\rho \sin \varphi \sin \Theta, \quad z = c\rho \cos \Theta,$$

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \Theta \leq \pi.$$

Переход в тройном интеграле от декартовых к обобщённым сферическим координатам осуществляется по формуле (якобиан $I = abc\rho^2 \sin \Theta$)

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x; y; z) dx dy dz &= \\ &= abc \iiint_{\Omega_1} f(a\rho \cos \varphi \sin \Theta; b\rho \sin \varphi \sin \Theta; \rho \cos \Theta) \rho^2 \sin \Theta d\varphi d\rho d\Theta. \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

В тройном интеграле, в большинстве случаев, удобнее переходить к обобщённой сферической системе координат, если под знаком интеграла или в области интегрирования присутствует выражение вида: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$. В обобщённой сферической системе координат значение выражения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ равно ρ^2 , что даёт значительное упрощение при вычислении тройного интеграла.

Вычисление тройного интеграла в обобщённой сферической системе координат, также как и в сферической системе координат, сводится к вычислению повторных интегралов.

2.2 Примеры решения типовых задач

2.2.1 Вычислить тройной интеграл $\iiint_{\Omega} (x - y - z) dx dy dz$, изобразив в декартовой системе координат область интегрирования Ω , которая определяется неравенствами $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1, -2 \leq z \leq 1$.

Решение. Областью интегрирования является прямой параллелепипед, который изображен на рисунке 2.1.

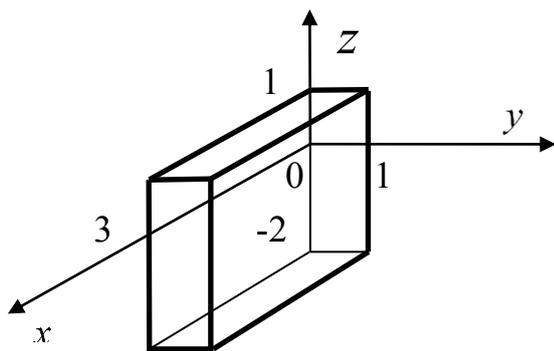


Рисунок 2.1 – Параллелепипед

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x - y - z) dx dy dz &= \int_0^3 dx \int_0^1 dy \int_{-2}^1 (x - y - z) dz = \int_0^3 dx \int_0^1 \left(xz - yz - \frac{1}{2} z^2 \right) \Big|_{-2}^1 dy = \\ &= \int_0^3 dx \int_0^1 \left(x - y - \frac{1}{2} + 2x - 2y + 2 \right) dy = \\ &= \int_0^3 dx \int_0^1 \left(3x - 3y + \frac{3}{2} \right) dy = \\ &= 3 \int_0^3 dx \int_0^1 \left(x - y + \frac{1}{2} \right) dy = \\ &= 3 \int_0^3 \left(xy - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} y \right) \Big|_0^1 dx = \\ &= 3 \int_0^3 \left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 0 \right) dx = 3 \int_0^3 x dx = 3 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 = 3 \cdot \left(\frac{9}{2} - 0 \right) = \frac{27}{2} = 13 \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2.2.2 Вычислить тройной интеграл $\iiint_{\Omega} 3y dx dy dz$, если область Ω ограни-

чена поверхностями $y = 0$, $y = \sqrt{2x - x^2}$, $z = 0$, $z = 4$.

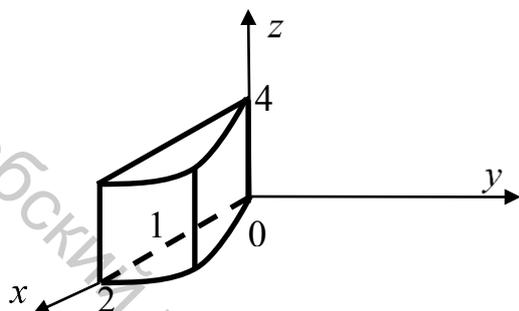


Рисунок 2.2 – Полуцилиндр

Решение. С учётом характера области интегрирования Ω вычисление удобно вести в цилиндрической системе координат. Имеем

$$y = \sqrt{2x - x^2} \rightarrow x^2 + y^2 = 2x \rightarrow r = 2 \cos \varphi.$$

Следовательно, область Ω задана неравенствами: $0 \leq z \leq 4$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, $0 \leq r \leq 2 \cos \varphi$ (рис. 2.2).

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} 3y dx dy dz &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} dr \int_0^4 3r \sin \varphi r dz = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} 3 \sin \varphi r^2 z \Big|_0^4 dr = \\ &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} 12 \sin \varphi r^2 dr = \int_0^{\pi/2} 4 \sin \varphi r^3 \Big|_0^{2 \cos \varphi} d\varphi = \int_0^{\pi/2} 32 \sin \varphi \cos^3 \varphi d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/2} 32 \sin \varphi \cos^3 \varphi d\varphi = -8 \cos^4 \varphi \Big|_0^{\pi/2} = -8 \cdot \left(\cos^4 \frac{\pi}{2} - \cos^4 0 \right) = 8. \end{aligned}$$

2.2.3 Вычислить тройной интеграл $\iiint_{\Omega} 16 \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^5} dx dy dz$, если об-

ласть интегрирования Ω определяется неравенствами: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$.

Решение. С учётом характера области интегрирования Ω вычисление удобно вести в сферической системе координат. Область Ω представляет собой полушар, расположенный выше плоскости Oxy , то есть сферические координаты φ , ρ и Θ изменяются в области Ω следующим образом: $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \Theta \leq \pi/2$.

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} 16 \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^5} dx dy dz &= 16 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 d\rho \int_0^{\pi/2} \rho^5 \rho^2 \sin \Theta d\Theta = \\ &= -16 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^7 \cos \Theta \Big|_0^{\pi/2} d\rho = 16 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^7 d\rho = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \rho^8 \Big|_0^2 d\varphi = 512 \int_0^{2\pi} d\varphi = 512 \varphi \Big|_0^{2\pi} = 1024\pi. \end{aligned}$$

2.3 Задания для решения на практическом занятии

2.3.1 Вычислить повторные интегралы $\int_0^3 dx \int_0^{2x} dy \int_0^{\sqrt{xy}} z dz$.

2.3.2 Вычислить тройной интеграл $\iiint_{\Omega} x^2 y^2 z dx dy dz$, если область Ω определяется неравенствами: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x$, $0 \leq z \leq xy$.

2.3.3 Вычислить тройной интеграл $\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$, если область Ω ограничена поверхностями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

2.3.4 Вычислить тройной интеграл $\iiint_{\Omega} xy dx dy dz$, если область Ω ограничена гиперболическим параболоидом $z=xy$ и плоскостями $x+y=1$, $z=0$ ($z \geq 0$).

2.3.5 Вычислить тройной интеграл $\iiint_{\Omega} y \cos(x+z) dx dy dz$, если область Ω ограничена цилиндром $y=\sqrt{x}$ и плоскостями $y=0$, $z=0$, $x+z=\pi/2$.

2.3.6 Вычислить тройной интеграл $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, если область Ω определяется неравенствами: $0 \leq x \leq 1/2$, $x \leq y \leq 2x$, $0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$.

2.3.7 Вычислить тройной интеграл $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz$, если область Ω ограничена поверхностями $x^2+y^2=z^2$, $z=-1$, $z=0$.

2.3.8 Вычислить тройной интеграл $\iiint_{\Omega} x^2 y^2 dx dy dz$, если область Ω ограничена поверхностями $x^2+y^2=1$, $z=x^2+y^2$, $z=0$.

2.3.9 Вычислить тройной интеграл $\iiint_{\Omega} (x^2-y^2) dx dy dz$, если область Ω ограничена поверхностями $x^2+y^2=1$, $z^2=x^2+y^2$.

2.3.10 Вычислить тройной интеграл $\iiint_{\Omega} (x^2+z^2) dx dy dz$, если область Ω ограничена поверхностями $y=x^2+z^2$, $y=1$.

2.3.11 Вычислить тройной интеграл $\iiint_{\Omega} \sqrt{y^2+z^2} dx dy dz$, если область Ω ограничена поверхностями $x=\sqrt{y^2+z^2}$, $x=1$.

2.3.12 Вычислить тройной интеграл $\iiint_{\Omega} x y \, dx dy dz$, если область Ω ограничена поверхностями $z = x^2/4 + y^2/9$, $z = 2 - x^2/4 - y^2/9$.

2.3.13 Вычислить тройной интеграл $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \, dx dy dz$, если область Ω ограничена поверхностями $6z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 27$.

2.3.14 Вычислить тройной интеграл $\iiint_{\Omega} (2x^2 + 2y^2 + 2z^2) \, dx dy dz$, если область Ω ограничена поверхностью $z = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

2.3.15 Вычислить тройной интеграл $\iiint_{\Omega} xyz \, dx dy dz$, если область Ω ограничена поверхностями $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

2.3.16 Вычислить тройной интеграл $\iiint_{\Omega} (x^2/4 + y^2/9 + z^2/25) \, dx dy dz$, если область Ω ограничена эллипсоидом $x^2/4 + y^2/9 + z^2/25 = 1$.

2.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

2.4.1 Вычислить тройной интеграл.

2.4.1.1 $\iiint_{\Omega} (3x^2 - 5xy + 4yz^2) \, dx dy dz$, $\Omega: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 2$.

2.4.1.2 $\iiint_{\Omega} (4xz - 2xy + 4yz) \, dx dy dz$, $\Omega: 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 3$.

2.4.1.3 $\iiint_{\Omega} (2y^2 - 5xz + z^2) \, dx dy dz$, $\Omega: 1 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 2$.

2.4.1.4 $\iiint_{\Omega} (4x^2 - 6y + 24xyz^2) \, dx dy dz$, $\Omega: -2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3, 1 \leq z \leq 4$.

2.4.1.5 $\iiint_{\Omega} (24x^2y - 36xy^2 + 4yz^2) \, dx dy dz$, $\Omega: 0 \leq x \leq 4, -2 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 3$.

2.4.1.6 $\iiint_{\Omega} (6zx^2 - 4y^3 + 9y^2z^2) \, dx dy dz$, $\Omega: 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 4$.

2.4.1.7 $\iiint_{\Omega} (4y^3 - 24x^2z + 3z^2) \, dx dy dz$, $\Omega: -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 3$.

2.4.1.8 $\iiint_{\Omega} (6z - 4x + 4z) \, dx dy dz$, $\Omega: -3 \leq x \leq 3, x^2 - 1 \leq y \leq 1, -2 \leq z \leq 2$.

2.4.1.9 $\iiint_{\Omega} (9x^2 - 12y^2 + 9z^2) \, dx dy dz$, $\Omega: -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2$.

- 2.4.1.10 $\iiint_{\Omega} (8x - 6xz + 6yz^2) dx dy dz, \quad \Omega: -1 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 4.$
- 2.4.1.11 $\iiint_{\Omega} (3zx^2 - 4xy^2 + 3yz^2) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 5.$
- 2.4.1.12 $\iiint_{\Omega} (18y^2 - 48x + 48yz^2) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 4, 2 \leq y \leq 3, -1 \leq z \leq 4.$
- 2.4.1.13 $\iiint_{\Omega} (3x - 5y + 4z) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2 - x, 0 \leq z \leq 4.$
- 2.4.1.14 $\iiint_{\Omega} (18yx^2 - 2x + 4yz) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, -1 \leq z \leq 5.$
- 2.4.1.15 $\iiint_{\Omega} (6xy^2 - 3x^2 + 36yz^2) dx dy dz, \quad \Omega: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 3.$
- 2.4.1.16 $\iiint_{\Omega} (18x^2 - 4xy^2 + 3yz^2) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3, 1 \leq z \leq 2.$
- 2.4.1.17 $\iiint_{\Omega} (8z - 4xy + 6y^2z) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 2.$
- 2.4.1.18 $\iiint_{\Omega} (6y^2 - 24xzy + z^2) dx dy dz, \quad \Omega: -2 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 2.$
- 2.4.1.19 $\iiint_{\Omega} (6x^2 - 6xy + 48xyz^2) dx dy dz, \quad \Omega: -3 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 4.$
- 2.4.1.20 $\iiint_{\Omega} (9x^2y^2 - 6xy^2 + 3z^2) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3.$
- 2.4.1.21 $\iiint_{\Omega} (6z - 24y^3 + 18y^2z^2) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 5, 0 \leq z \leq 3.$
- 2.4.1.22 $\iiint_{\Omega} (9y^2 - 9x^2 + 6xz^2) dx dy dz, \quad \Omega: -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1, -2 \leq z \leq 2.$
- 2.4.1.23 $\iiint_{\Omega} (zx^2 - xyz) dx dy dz, \quad \Omega: -1 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 1, -2 \leq z \leq 4.$
- 2.4.1.24 $\iiint_{\Omega} (3x^2 - 9y^2 + 6z^2) dx dy dz, \quad \Omega: -2 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2.$
- 2.4.1.25 $\iiint_{\Omega} (6y^2x - 6yz^2) dx dy dz, \quad \Omega: -2 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 0, -2 \leq z \leq 3.$
- 2.4.1.26 $\iiint_{\Omega} (4zx - 4xy + 4z) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 5, -3 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2.$
- 2.4.1.27 $\iiint_{\Omega} (6y^2x - 8xyz + 6yz^2) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2, 2 \leq z \leq 3.$
- 2.4.1.28 $\iiint_{\Omega} (2x - 3y + 4z) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 3.$
- 2.4.1.29 $\iiint_{\Omega} (8yx - 4xz + 24yz) dx dy dz, \quad \Omega: -2 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 1.$
- 2.4.1.30 $\iiint_{\Omega} (6y^2 - 8xyz + 3z^2) dx dy dz, \quad \Omega: -2 \leq x \leq 2, -4 \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 1.$

2.4.2 Вычислить тройной интеграл. Начертить область интегрирования и изобразить проекцию этой области на плоскость Oxy .

2.4.2.1 $\iiint_{\Omega} y\sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, \quad \Omega: z = 3\sqrt{x^2 + y^2}, z = 3, y \leq \sqrt{3} \cdot x, y \geq 0, x \geq 0.$

2.4.2.2 $\iiint_{\Omega} \frac{xdxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \Omega: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, y \leq -x, y \leq x, y \leq 0, z \geq 0.$

2.4.2.3 $\iiint_{\Omega} \sqrt{z} dx dy dz, \quad \Omega: z = 1, z = 4, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq x, y \geq 0, x \geq 0.$

2.4.2.4 $\iiint_{\Omega} \frac{ydxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \Omega: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, y \geq -x, y \geq 0, z \geq 0.$

2.4.2.5 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz, \quad \Omega: z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = \sqrt{18 - x^2 - y^2}, y \geq -\frac{x}{\sqrt{3}}, y \geq 0, x \leq 0.$

2.4.2.6 $\iiint_{\Omega} \frac{z dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \Omega: 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, y \leq -x, x \leq 0, z \geq 0.$

2.4.2.7 $\iiint_{\Omega} \frac{yz dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \Omega: z = 4x^2 + 4y^2, z = 16, y \leq -\sqrt{3} \cdot x, y \geq 0, x \leq 0.$

2.4.2.8 $\iiint_{\Omega} x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz, \quad \Omega: 16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, y \leq x, x \geq 0, z \leq 0.$

2.4.2.9 $\iiint_{\Omega} \frac{xy dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \Omega: z = 9x^2 + 9y^2, z = 81, y \geq x, y \leq 0, x \leq 0.$

2.4.2.10 $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz, \Omega: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}, y \geq 0, x \geq 0, z \leq 0.$

2.4.2.11 $\iiint_{\Omega} \frac{xdxdydz}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}}, \quad \Omega: z + x = 6, x^2 + y^2 = 6x, z \geq 0, y \leq 0.$

2.4.2.12 $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz, \Omega: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, y \geq 0, x \geq 0, z \leq 0.$

2.4.2.13 $\iiint_{\Omega} \frac{ydxdydz}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \quad \Omega: z + y = 8, x^2 + y^2 = 8y, z \geq 0, x \leq 0.$

2.4.2.14 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz, \Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 1, z^2 = x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

2.4.2.15 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz, \quad \Omega: z + x = 10, x^2 + y^2 = 10x, z \geq 0, y \leq 0.$

2.4.2.16 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz, \quad \Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 50, z^2 = x^2 + y^2, x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0.$

2.4.2.17 $\iiint_{\Omega} y dx dy dz, \quad \Omega: z = -\sqrt{x^2 + y^2}, z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}, y \leq \sqrt{3} \cdot x, y \leq 0, x \leq 0.$

- 2.4.2.18 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 98, z = -\sqrt{x^2 + y^2}, x \leq 0, y \leq 0$.
- 2.4.2.19 $\iiint_{\Omega} 3xyz^2 dx dy dz$, $\Omega: -2 \leq z \leq 2, 25 \leq x^2 + y^2 \leq 36, y \leq -x, y \leq 0, x \geq 0$.
- 2.4.2.20 $\iiint_{\Omega} \frac{x^2 dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2}$, $\Omega: 49 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64, y \leq -x, y \geq 0, x \leq 0, z \geq 0$.
- 2.4.2.21 $\iiint_{\Omega} \frac{x dx dy dz}{x^2 + y^2}$, $\Omega: z = x^2 + y^2, z = 8 - x^2 - y^2, y \geq -\frac{x}{\sqrt{3}}, y \leq 0, x \geq 0$.
- 2.4.2.22 $\iiint_{\Omega} 4xy dx dy dz$, $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 32, z^2 = x^2 + y^2, x \leq 0, y \geq 0, z \leq 0$.
- 2.4.2.23 $\iiint_{\Omega} \frac{y dx dy dz}{x^2 + y^2}$, $\Omega: z = x^2 + y^2 - 50, z = -x^2 - y^2, y \leq \sqrt{3}x, y \geq -\sqrt{3}x, x \geq 0$.
- 2.4.2.24 $\iiint_{\Omega} \frac{y^2 dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $\Omega: 64 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 81, y \geq x, y \leq 0, x \leq 0, z \geq 0$.
- 2.4.2.25 $\iiint_{\Omega} \frac{xz dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\Omega: z = -x^2 - y^2, z = -1, y \geq -\frac{x}{\sqrt{3}}, y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, y \geq 0$.
- 2.4.2.26 $\iiint_{\Omega} \frac{z^2 dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $\Omega: 81 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 100, y \leq x, y \leq 0, x \leq 0, z \leq 0$.
- 2.4.2.27 $\iiint_{\Omega} 5xyz^4 dx dy dz$, $\Omega: -3 \leq z \leq -1, 36 \leq x^2 + y^2 \leq 49, y \leq -x, y \geq x, x \leq 0$.
- 2.4.2.28 $\iiint_{\Omega} y dx dy dz$, $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 72, z = \sqrt{x^2 + y^2}, x \leq 0, y \leq 0$.
- 2.4.2.29 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$, $\Omega: z = -2\sqrt{x^2 + y^2}, z = -2\sqrt{8 - x^2 - y^2}, y \leq -x, y \leq x, y \leq 0$.
- 2.4.2.30 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 8, z^2 = x^2 + y^2, x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0$.

3 ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Содержание: геометрические и механические приложения двойного интеграла, геометрические и механические приложения тройного интеграла.

3.1 Теоретический материал по теме практического занятия

3.1.1 Механико-геометрические приложения двойного интеграла

Площадь плоской фигуры: $S = \iint_G dx dy$.

Объём цилиндриоида: $V = \iint_G f(x; y) dx dy$.

Площадь поверхности: $S = \iint_G \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} dx dy$.

Масса плоской пластины с плотностью $\mu(x; y)$: $m = \iint_G \mu(x; y) dx dy$.

Статические моменты относительно координатных осей:

$$M_x = \iint_G y \mu(x; y) dx dy, \quad M_y = \iint_G x \mu(x; y) dx dy.$$

Координаты центра масс пластины: $x_c = M_y/m$, $y_c = M_x/m$.

Моменты инерции относительно координатных осей и начала координат:

$$I_x = \iint_G y^2 \mu(x; y) dx dy, \quad I_y = \iint_G x^2 \mu(x; y) dx dy, \quad I_0 = \iint_G (x^2 + y^2) \mu(x; y) dx dy.$$

3.1.2 Механико-геометрические приложения тройного интеграла

Объём тела: $V = \iiint_{\Omega} dx dy dz$.

Масса тела с плотностью $\mu(x; y; z)$: $m = \iiint_{\Omega} \mu(x; y; z) dx dy dz$.

Координаты центра масс тела: $x_c = \frac{1}{m} \iiint_{\Omega} x \mu(x; y; z) dx dy dz$,

$$y_c = \frac{1}{m} \iiint_{\Omega} y \mu(x; y; z) dx dy dz, \quad z_c = \frac{1}{m} \iiint_{\Omega} z \mu(x; y; z) dx dy dz.$$

Моменты инерции относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат:

$$I_{Oxy} = \iiint_{\Omega} z^2 \mu(x; y; z) dx dy dz; \quad I_{Oxz} = \iiint_{\Omega} y^2 \mu(x; y; z) dx dy dz;$$

$$I_{Oyz} = \iiint_{\Omega} x^2 \mu(x; y; z) dx dy dz; \quad I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \mu(x; y; z) dx dy dz;$$

$$I_y = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \mu(x; y; z) dx dy dz; \quad I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \mu(x; y; z) dx dy dz;$$

$$I_0 = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \mu(x; y; z) dx dy dz.$$

3.2 Примеры решения типовых задач

3.2.1 Вычислить с помощью двойного интеграла в полярных координатах площадь фигуры, которая ограничена линиями, заданными в декартовой системе координат: $y^2 - 2y + x^2 = 0$, $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y = \sqrt{3}x$ и $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$. Сделать чертеж области, ограниченной заданными линиями.

Решение. После выделения полного квадрата, относительно переменной y , уравнение $y^2 - 2y + x^2 = 0$ принимает вид $x^2 + (y-1)^2 = 1$, которое задает окружность с центром в точке $C_1(0;1)$ и радиусом $R_1 = 1$. Аналогично уравнение $y^2 - 4y + x^2 = 0$ преобразовывается к виду $x^2 + (y-2)^2 = 4$ – окружность с центром в точке $C_2(0;2)$ и радиусом $R_2 = 2$.

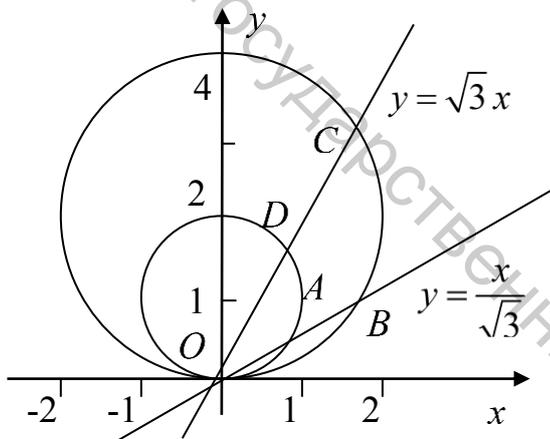


Рисунок 3.1 – Окружности

Уравнения $y = \sqrt{3}x$ и $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ задают

прямые, проходящие через начало координат. Изобразим фигуру G , которая ограничена заданными кривыми, в декартовой системе координат (на рисунке 3.1 область G представляет собой фигуру $ABCD$).

Перейдем от декартовой к полярной системе координат, используя формулы: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Тогда уравнения окружностей принимают вид

$r = 2 \sin \varphi$ и $r = 4 \sin \varphi$, а уравнения прямых $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}$ или $\varphi = \frac{\pi}{6}$ и

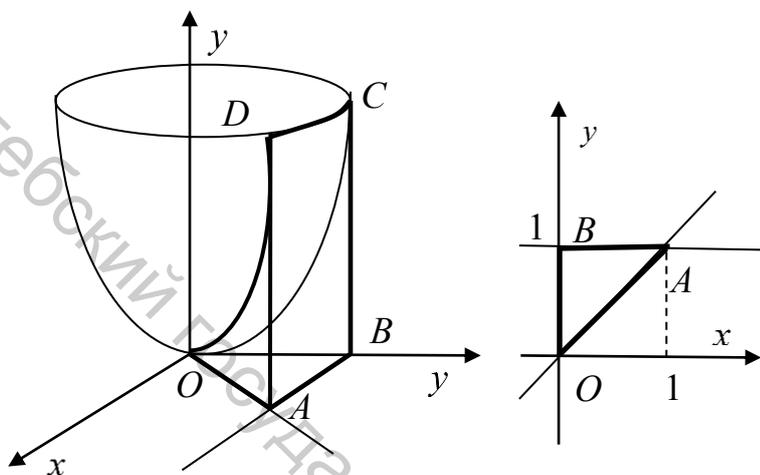
$\varphi = \frac{\pi}{3}$. Вычислим площадь фигуры, заданной в полярной системе координат.

Вычисление двойного интеграла проведем путем перехода к повторному интегрированию.

$$\begin{aligned}
 S &= \iint_G dx dy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_{2 \sin \varphi}^{4 \sin \varphi} r dr = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} r^2 \Big|_{2 \sin \varphi}^{4 \sin \varphi} d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (16 \sin^2 \varphi - 4 \sin^2 \varphi) d\varphi = 6 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 \varphi d\varphi = \\
 &= 3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = 3 \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 3 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} \right) = \\
 &= 3 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 3 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = 3 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

3.2.2 Вычислить с помощью двойного интеграла объем тела T_1 , ограниченного поверхностями $z = x^2 + 3y^2$, $y = x$, $y = 1$, $x \geq 0$, $z \geq 0$. Сделать чертежи данного тела и его проекции на плоскость Oxy .

Решение. Данное тело T_1 ограничено эллиптическим параболоидом



$z = x^2 + 3y^2$ и плоскостями $y = x$, $y = 1$, $x = 0$, $z = 0$. На рисунке 3.2 изображено заданное тело, ограниченное указанными поверхностями (область $OABCD$ пространства $Oxyz$), и его проекция на плоскость Oxy (область OAB плоскости Oxy). Найдём объем заданного тела с помощью двойного интеграла.

Рисунок 3.2 – Тело T_1 и его проекция на плоскость

$$V = \iint_G (x^2 + 3y^2) dx dy = \int_0^1 dx \int_x^1 (x^2 + 3y^2) dy = \int_0^1 (x^2 y + y^3) \Big|_x^1 dx = \int_0^1 (x^2 + 1 - x^3 - x^3) dx = \int_0^1 (x^2 + 1 - 2x^3) dx = \left(\frac{1}{3} x^3 + x - \frac{1}{2} x^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{2} - 0 = \frac{5}{6}.$$

3.2.3 Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела T_2 , ограниченного поверхностями $z = x^2$, $y = x$, $y = 2$, $z \geq 0$. Выполнить чертёж тела T_2 .

Решение. Данное тело T_2 ограничено параболитическим цилиндром $z = x^2$ и плоскостями $y = x$, $y = 2$, $z = 0$. На рисунке 3.3 изображено заданное тело, ограниченное указанными поверхностями (область $OABC$ пространства $Oxyz$), и его проекция на плоскость Oxy (область OAB плоскости Oxy).

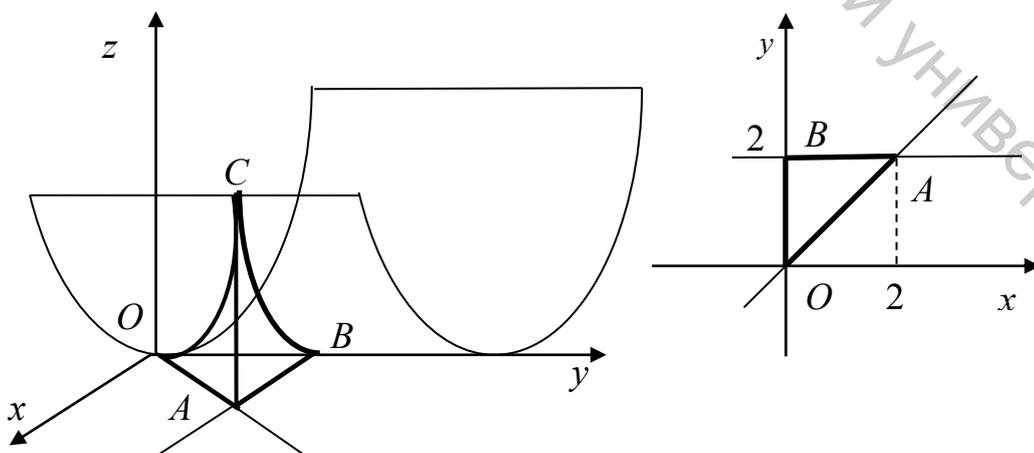


Рисунок 3.3 – Тело T_2 и его проекция на плоскость

Найдём объем заданного тела с помощью тройного интеграла.

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_0^2 dx \int_x^2 dy \int_0^{x^2} dz = \int_0^2 dx \int_x^2 z \Big|_0^{x^2} dy = \int_0^2 dx \int_x^2 x^2 dy = \int_0^2 x^2 y \Big|_x^2 dx = \\
 &= \int_0^2 (2x^2 - x^3) dx = \left(\frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_0^2 = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

3.3 Задания для решения на практическом занятии

3.3.1 Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

3.3.1.1 $y = x, y = x^2.$

3.3.1.2 $y = x^2 + 1, x - y + 3 = 0.$

3.3.1.3 $y = x^2 + 4x, y = x + 4.$

3.3.1.4 $y = \sqrt{2 - x^2}, y = x^2.$

3.3.1.5 $y = e^x, y = e^{2x}, x = 1.$

3.3.1.6 $xy = 1, y = x^2, y = 0, x = 0.$

3.3.1.7 $r = 5 \sin 2\varphi.$

3.3.1.8 $r = 6(1 + \cos \varphi).$

3.3.1.9 $(x^2 + y^2)^2 = 9(4x^2 + y^2).$

3.3.1.10 $(x^2 + y^2)^2 = 4x^4.$

3.3.2 С помощью двойного интеграла вычислить объём тела, ограниченного заданными поверхностями.

3.3.2.1 $z = x, y = 4, x = \sqrt{25 - y^2}, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

3.3.2.2 $z = 2 - y, y = x^2, z = 0.$

3.3.2.3 $z = 1 + x^2 + y^2, x = 4, y = 4, x = 0, y = 0, z = 0.$

3.3.2.4 $z = x^2 + y^2, y = 2x, y = 1, y = 6 - x.$

3.3.2.5 $z = 10 + x + y, x^2 + y^2 = 4, z = 0.$

3.3.2.6 $z = 12 - 3x - 4y, x^2/4 + y^2 = 1, z = 0.$

3.3.3 Вычислить площадь поверхности части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 4x$.

3.3.4 Вычислить массу неоднородной пластины G , ограниченной заданными линиями, если поверхностная плотность в каждой её точке $\mu = \mu(x, y)$.

3.3.4.1 $y^2 = x, y = x^2, \mu = 3 - x - y.$ **3.3.4.2** $y = \sqrt{x}, y = x, \mu = 2x + 2y.$

3.3.5 Вычислить статический момент однородной пластины, ограниченной линиями $x^2 + y^2 + 4y = 0, y \leq x, y \leq -x$, относительно координатных осей.

3.3.6 Вычислить координаты центра масс фигуры, ограниченной линиями $y = x^2, x = y^2$, если поверхностная плотность в каждой её точке $\mu = xy$.

3.3.7 Вычислить моменты инерции относительно начала координат и осей координат фигуры, ограниченной линиями $y = x^2, y = 1$, если поверхностная плотность в каждой её точке $\mu = x^2 y$.

3.3.8 С помощью тройного интеграла вычислить объём тела, ограниченного заданными поверхностями.

3.3.8.1 $x = y^2, x + z = 1, z = 0.$

3.3.8.2 $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 2 - x^2 - y^2.$

3.3.8.3 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 4, z^2 = x^2 + y^2.$

3.3.8.4 $z = x^2, 2y + 3x = 12, y = 0, z = 0.$

3.3.8.5 $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 = 4x, x^2 + y^2 = 6x, z = 0, y \geq 0.$

3.3.8.6 $z = 16 - x - y, x^2 + y^2 = 9, z = 1.$

3.3.9 Вычислить массу тела, ограниченного плоскостями $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$, если поверхностная плотность тела $\mu = 1/(1 + x + y + z)^4$.

3.3.10 Вычислить координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями $x = y^2 + z^2, y^2 + z^2 = 9, x = 0$.

3.3.11 Вычислить момент инерции относительно координатных осей, координатных плоскостей и начала координат однородного тела, ограниченного плоскостями $2x + 3y + 4z = 12, x = 0, y = 0, z = 0$, если его поверхностная плотность $\mu = x$.

3.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

3.4.1 С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры G , ограниченной указанными линиями. Изобразить в системе координат Oxy область интегрирования G .

3.4.1.1 $G: y = x^2, y = 2 - x^2.$

3.4.1.2 $G: y = x^2 - 1, y = 1 - x^2.$

3.4.1.3 $G: y = x^2 + 8x, y = -x^2.$

3.4.1.4 $G: y = \frac{3}{4 - x^2}, y = x^2.$

3.4.1.5 $G: y = 5/(x^2 - 9), y = x^2 - 5.$

3.4.1.6 $G: y = \frac{3}{x^2 - 4}, y = x^2 - 2.$

3.4.1.7 $G: y = \sqrt{x^3}, y = 3x.$

3.4.1.8 $G: y = -\sqrt{x^3}, y = -x^3.$

3.4.1.9 $G: y = \sqrt{x^3}, y = x^3.$

3.4.1.10 $G: y = \frac{10}{x^2}, y = 8 - x^2.$

3.4.1.11 $G: y = \frac{8}{x^3}, y = 9 - x^3.$

3.4.1.12 $G: y = \frac{4}{x^2}, y = 5 - x^2.$

3.4.1.13 $G: y = x^2 - 6, y = -x.$

3.4.1.14 $G: y = x^2 - x, y = 4x.$

3.4.1.15 $G: y = x^2 - x, y = 2x + 2.$

3.4.1.16 $G: y = x^2, y = 8 - x^2.$

3.4.1.17 $G: y = x^2 - 1, y = x - x^2.$

3.4.1.18 $G: y = x^2 - 4x, y = -x^2.$

3.4.1.19 $G: y = 90/(x^2 + 1), y = x^2.$

3.4.1.20 $G: y = \frac{32}{x^2 + 4}, y = x^2.$

3.4.1.21 $G: y = 2/(x^2 + 1), y = x^2.$

3.4.1.22 $G: y = \sqrt{x}, y = x - 2.$

3.4.1.23 $G: y = -\sqrt{x}, y = -x^2.$

3.4.1.24 $G: y = \sqrt{x}, y = x.$

3.4.1.25 $G: y = -\frac{2}{x}, y = 3 + x.$

3.4.1.26 $G: y = \frac{6}{x}, y + x = -5.$

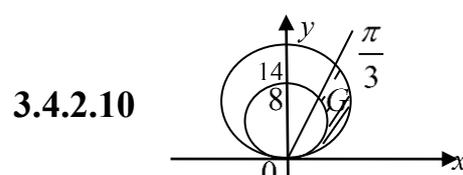
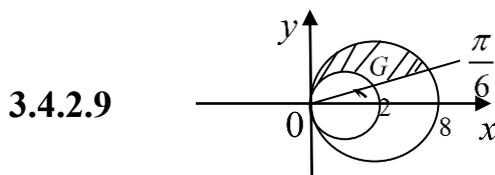
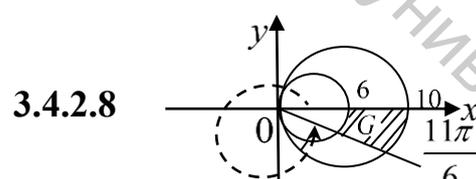
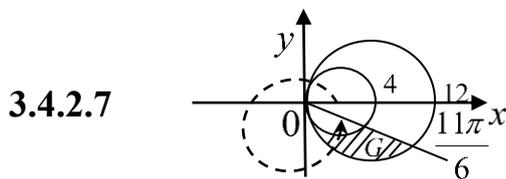
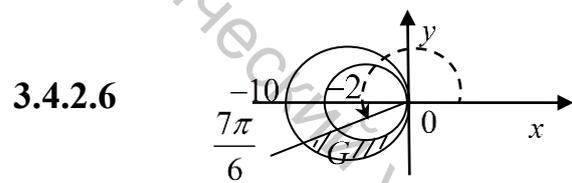
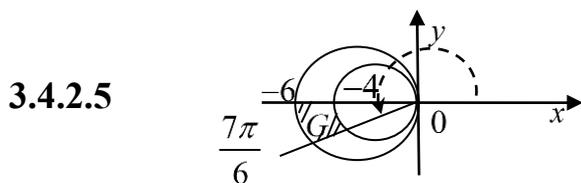
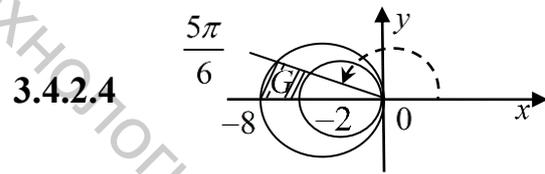
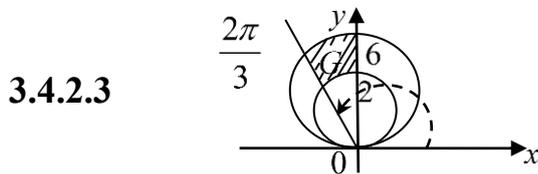
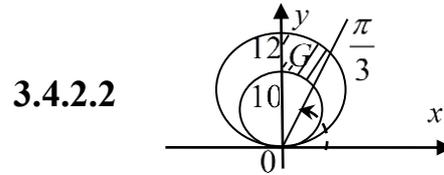
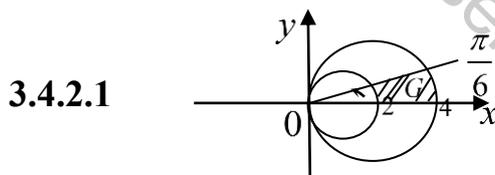
3.4.1.27 $G: y = \frac{2}{x}, y = 3 - x.$

3.4.1.28 $G: y = x^2, y = 2 - x.$

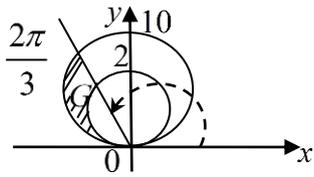
3.4.1.29 $G: y = x^2 + 4x, y = x.$

3.4.1.30 $G: y = x^2 + 4x, y = x.$

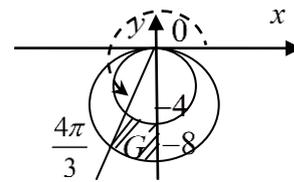
3.4.2 Вычислить площадь заштрихованной плоской фигуры G , ограниченной дугами окружностей со смещёнными центрами относительно начала координат и двумя лучами, выходящими из начала системы координат Oxy . Записать уравнения линий, которые ограничивают область G , в декартовой и полярной системе координат, если полюс лежит в начале координат Oxy , а полярная ось совпадает с положительным направлением оси абсцисс.



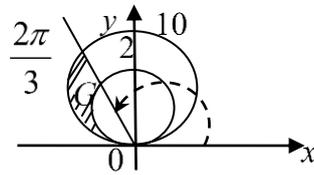
3.4.2.11



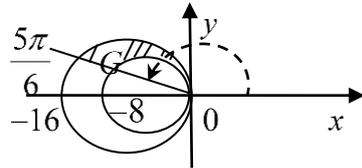
3.4.2.12



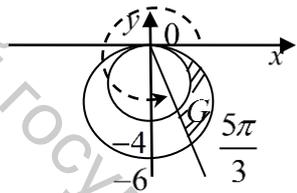
3.4.2.13



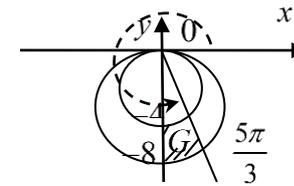
3.4.2.14



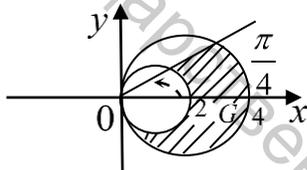
3.4.2.15



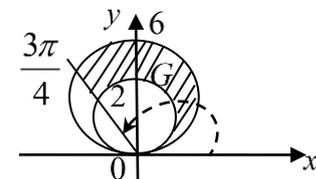
3.4.2.16



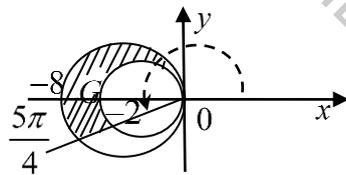
3.4.2.17



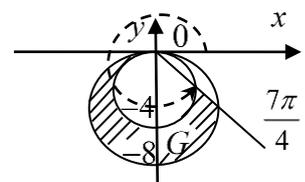
3.4.2.18



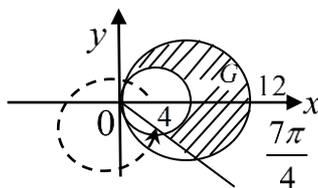
3.4.2.19



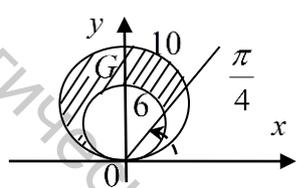
3.4.2.20



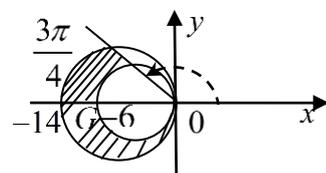
3.4.2.21



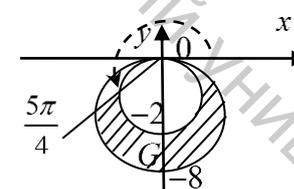
3.4.2.22



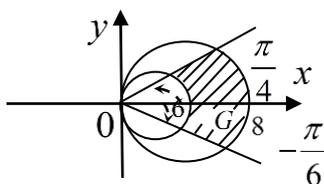
3.4.2.23



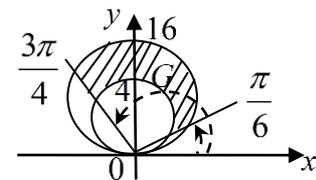
3.4.2.24



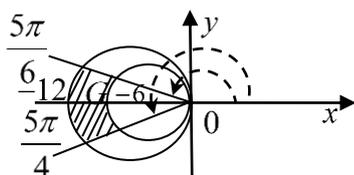
3.4.2.25



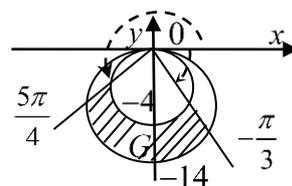
3.4.2.26



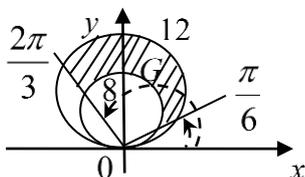
3.4.2.27



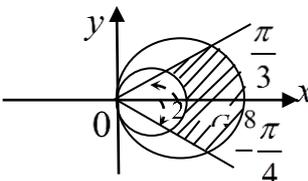
3.4.2.28



3.4.2.29



3.4.2.30



3.4.3 С помощью двойного интеграла вычислить объём тела Ω . Построить область Ω и изобразить проекцию этой области на плоскость Oxy .

3.4.3.1 $\Omega: z = x^2, x + y \leq 1, y \leq x, y \geq 0, z \geq 0.$

3.4.3.2 $\Omega: z = y^2, x + 2y \leq 4, y \geq x, x \geq 0, z \geq 0.$

3.4.3.3 $\Omega: z = x^2 + y^2, x + 4y \leq 8, y \leq x, y \geq 0, z \geq 0.$

3.4.3.4 $\Omega: z = \sqrt{y}, x + 6y \leq 12, x \geq 0, z \geq 0.$

3.4.3.5 $\Omega: z = \sqrt{x}, x + 7y \leq 14, y \geq 0, z \geq 0.$

3.4.3.6 $\Omega: z = 4 - x^2 - y^2, x + y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

3.4.2.7 $\Omega: z = 2 + x^2 + y^2, x \leq 2, y \leq x, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

3.4.3.8 $\Omega: z = 5 + x^2 + y^2, x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

3.4.3.9 $\Omega: z = 8 - x^2 - y^2, x \geq y, x \leq 2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

3.4.3.10 $\Omega: x = y^2, x = 4, x + z = 4, y \geq 0, z \geq 0.$

3.4.3.11 $\Omega: y = x^2, y = 16, y + z = 16, x \geq 0, z \geq 0.$

3.4.3.12 $\Omega: x + y + z = 2, y = x^2, z \geq 0.$

3.4.3.13 $\Omega: x + 3y + z = 6, x = 3y^2, z \geq 0.$

3.4.3.14 $\Omega: z = x, y = x^3, y = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

3.4.3.15 $\Omega: x + y + z = 2, y \geq x^2, y \leq x^3, z \geq 0.$

3.4.3.16 $\Omega: z = x^2, x + y \leq 2, y \geq x, x \geq 0, z \geq 0.$

3.4.3.17 $\Omega: z = y^2, x + 3y \leq 6, y \leq x, y \geq 0, z \geq 0.$

3.4.3.18 $\Omega: z = x^2 + y^2, x + 5y \leq 10, y \geq x, x \geq 0, z \geq 0.$

3.4.3.19 $\Omega: z = \sqrt{y}, x + 2y \leq 4, x \geq 0, z \geq 0.$

3.4.3.20 $\Omega: z = \sqrt{x}, x + 4y \leq 8, y \geq 0, z \geq 0. \Omega: z = \sqrt{x}, x + 4y \leq 8, y \geq 0, z \geq 0.$

3.4.3.21 $\Omega: z = 9 - x^2 - y^2, x + y \leq 3, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

3.4.3.22 $\Omega: z = 16 - x^2 - y^2, y \geq x, y \leq 4, x \geq 0, y \leq 0, z \geq 0.$

3.4.3.23 $\Omega: z = 25 - x^2 - y^2, y \geq x, y \leq 5, x \leq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

3.4.3.24 $\Omega: z = 36 - x^2 - y^2, y \geq x, y \leq 6, x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0.$

3.4.3.25 $\Omega: x = y^2, x = 9, x + z = 9, y \leq 0, z \geq 0.$

3.4.3.26 $\Omega: y = x^2, y = 25, y + z = 25, x \leq 0, z \geq 0.$

3.4.3.27 $\Omega: 4x + y + z = 6, y = 2x^2, z \geq 0.$

3.4.3.28 $\Omega: x + 8y + z = 12, x = 4y^2, z \geq 0.$

3.4.3.29 $\Omega: z = y, x = y^3, x = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

3.4.3.30 $\Omega: x + y + z = 3, 4y \geq x^2, 8y \leq x^3, z \geq 0.$

3.4.4 С помощью тройного интеграла вычислить объём тела Ω . Построить область интегрирования и изобразить проекцию этой области на соответствующую координатную плоскость.

3.4.4.1 $\Omega: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z^2 \geq 3x^2 + 3y^2, y \leq x, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

3.4.4.2 $\Omega: x = 12\sqrt{y^2 + z^2}, x = 26 - \sqrt{y^2 + z^2}, y^2 + z^2 \leq -4y, z \geq 0.$

3.4.4.3 $\Omega: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, y^2 \geq 3x^2 + 3z^2, x \leq z, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

3.4.4.4 $\Omega: y = -3x^2 - 3z^2, z = 3x^2 + 3z^2 - 54, x^2 + z^2 \leq 6x, z \leq 0.$

3.4.4.5 $\Omega: 25 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 49, x^2 \geq 3y^2 + 3z^2, z \geq y, x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0.$

3.4.4.6 $\Omega: z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, z = 6 - \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq -4x, y \geq 0.$

3.4.4.7 $\Omega: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z^2 \leq 3x^2 + 3y^2, y \geq x, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

3.4.4.8 $\Omega: z = -x^2 - y^2, z = x^2 + y^2 - 18, x^2 + y^2 \leq 6y, x \leq 0.$

3.4.4.9 $\Omega: 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, z^2 \leq 3x^2 + 3y^2, y \geq -x, x \leq 0, y \geq 0, z \leq 0.$

3.4.4.10 $\Omega: x = -6\sqrt{y^2 + z^2}, x = 6\sqrt{y^2 + z^2} - 72, y^2 + z^2 \leq 12z, y \geq 0.$

3.4.4.11 $\Omega: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, y^2 \leq 3x^2 + 3z^2, x \geq z, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

3.4.4.12 $\Omega: y = -5x^2 - 5z^2, z = 5x^2 + 5z^2 - 250, x^2 + z^2 \leq -10x, z \geq 0.$

3.4.4.13 $\Omega: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64, x^2 \leq 3y^2 + 3z^2, z \leq y, x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0.$

3.4.4.14 $\Omega: z = -3\sqrt{x^2 + y^2}, z = \sqrt{x^2 + y^2} - 12, x^2 + y^2 \leq -6y, x \geq 0.$

3.4.4.15 $\Omega: 16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, z^2 \geq 3x^2 + 3y^2, y \leq -x, x \leq 0, y \geq 0, z \leq 0.$

3.4.4.16 $\Omega: z = x^2 + y^2, z = 32 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq -8x, y \leq 0.$

3.4.4.17 $\Omega: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, y^2 \leq 3x^2 + 3z^2, x \geq -z, x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0.$

3.4.4.18 $\Omega: x = 2\sqrt{y^2 + z^2}, x = 4 - 2\sqrt{y^2 + z^2}, y^2 + z^2 \leq 2y, z \leq 0.$

3.4.4.19 $\Omega: 25 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 81, x^2 \leq 3y^2 + 3z^2, z \leq -y, x \leq 0, y \geq 0, z \leq 0.$

3.4.4.20 $\Omega: y = 4x^2 + 4z^2, z = 128 - 4x^2 - 4z^2, x^2 + z^2 \leq -8z, x \leq 0.$

3.4.4.21 $\Omega: 25 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36, z^2 \geq 3x^2 + 3y^2, y \geq x, x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0.$

- 3.4.4.22 $\Omega: z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq 2x, y \leq 0.$
- 3.4.4.23 $\Omega: 36 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 49, z^2 \leq 3x^2 + 3y^2, y \leq x, x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0.$
- 3.4.4.24 $\Omega: z = x^2 + y^2, z = 8 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 4x, y \geq 0.$
- 3.4.4.25 $\Omega: 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36, y^2 \geq 3x^2 + 3z^2, x \leq -z, x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0.$
- 3.4.4.26 $\Omega: y = 2x^2 + 2z^2, z = 16 - 2x^2 - 2z^2, x^2 + z^2 \leq 4z, x \geq 0.$
- 3.4.4.27 $\Omega: 49 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64, z^2 \leq 3x^2 + 3y^2, y \leq -x, x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0.$
- 3.4.4.28 $\Omega: z = -4\sqrt{x^2 + y^2}, z = 8\sqrt{x^2 + y^2} - 72, x^2 + y^2 \leq 12y, x \geq 0.$
- 3.4.4.29 $\Omega: 64 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 81, z^2 \geq 3x^2 + 3y^2, y \geq -x, x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0.$
- 3.4.4.30 $\Omega: z = -x^2 - y^2, z = x^2 + y^2 - 50, x^2 + y^2 \leq -10y, x \geq 0.$

4 КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА

Содержание: криволинейные интегралы первого рода и их приложения, криволинейные интегралы второго рода и их приложения.

4.1 Теоретический материал по теме практического занятия

4.1.1 Криволинейные интегралы первого рода

Пусть в пространстве задана дуга γ кривой L , в каждой точке которой определена непрерывная функция $u = f(x; y; z)$. Разобьем дугу γ на n элементарных с длинами $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$. Значение $\lambda_n = \max_i \Delta l_i$ называется *мелкостью разбиения*. В каждой элементарной части произвольным образом выбираем точки $M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2), \dots, M_n(x_n; y_n; z_n)$. Вычисляем значение функции в этих точках: $f(x_1; y_1; z_1), f(x_2; y_2; z_2), \dots, f(x_n; y_n; z_n)$. Составим суммы $\sum_{i=1}^n f(x_i; y_i; z_i) \cdot \Delta l_i$, которые называются *интегральными суммами* функции f .

Определение 4.1.1.1 *Криволинейным интегралом первого рода (КИ-1) от функции $f(x; y; z)$ по дуге γ называется предел интегральных сумм данной функции при стремлении мелкости разбиения к нулю и если этот предел существует и конечен.*

$$\int_{\gamma} f(x; y; z) dl \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i; z_i) \cdot \Delta l_i. \quad (4.1.1.1)$$

Теорема 4.1.1.1 Если функция $f(x; y; z)$ непрерывна в замкнутой области G , то предел интегральных сумм от функции существует по любой дуге области G и функция является интегрируемой в заданной области.

Пусть задана гладкая пространственная кривая γ параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ и параметр t монотонно изменяется на отрезке $[\alpha; \beta]$. Вычисление КИ-1 сводится к вычислению определённого интеграла

$$\int_{\gamma} f(x; y; z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t); y(t); z(t)) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt. \quad (4.1.1.2)$$

В случае плоской кривой формула (4.1.1.2) упрощается.

$$\int_{\gamma} f(x; y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t); y(t)) \sqrt{x'^2 + y'^2} dt. \quad (4.1.1.3)$$

Если плоская кривая задана непрерывной и непрерывно дифференцируемой функцией на отрезке $[a; b]$ функцией $y = y(x)$, то

$$\int_{\gamma} f(x; y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x; y(x)) \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (4.1.1.4)$$

Если уравнение плоской кривой $r = r(\varphi)$ задано в полярной системе координат, то имеет частный случай формулы (4.1.1.3), где в качестве параметра t взят полярный угол φ :

$$\int_{\gamma} f(x; y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(r \cos \varphi; r \sin \varphi) \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi. \quad (4.1.1.5)$$

С помощью КИ-1 можно вычислить: длину дуги кривой – $l = \int_{\gamma} dl$; массу материальной дуги с линейной плотностью $\mu(x; y; z)$ – $m = \int_{\gamma} \mu(x; y; z) dl$; координаты центра масс плоской дуги – $x_c = \int_{\gamma} x \mu(x; y; z) dl$, $y_c = \int_{\gamma} y \mu(x; y; z) dl$, $z_c = \int_{\gamma} z \mu(x; y; z) dl$; моменты инерции относительно начала координат, координаты

$$\begin{aligned} \text{натных осей и плоскостей} \quad - \quad I_0 &= \int_{\gamma} (x^2 + y^2 + z^2) \mu dl, \quad I_x = \int_{\gamma} (y^2 + z^2) \mu dl, \\ I_y &= \int_{\gamma} (x^2 + z^2) \mu dl, \quad I_z = \int_{\gamma} (x^2 + y^2) \mu dl, \quad I_{xy} = \int_{\gamma} z^2 \mu dl, \quad I_{xz} = \int_{\gamma} y^2 \mu dl, \quad I_{yz} = \int_{\gamma} x^2 \mu dl. \end{aligned}$$

4.1.2 Криволинейные интегралы второго рода

Пусть в пространстве задана некоторая кривая γ , которая определяется параметрическими уравнениями: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ и $\alpha \leq t \leq \beta$.

Если указывается направление прохождения по данной кривой γ , то говорят, что кривая является ориентируемой. Чаще всего направление на кривой задается с помощью касательного вектора $\vec{\tau}$. Обычно в качестве вектора $\vec{\tau}$ выбирают единичный вектор.

За положительное направление прохождения кривой γ принимают такое направление, при котором параметр t возрастает. Если кривая является замкнутой, то за положительное направление принимают такое направление кривой, при котором при прохождении по кривой, если смотреть с конца нормального области, ограниченная данной кривой, данная область остается слева. Если указано направление прохождения по кривой, то кривая называется ориентируемой.

Предположим, что кривая γ является ориентируемой, и в каждой ее точке определена вектор-функция $\vec{a} = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k}$.

Определение 4.1.2.1 Криволинейным интегралом второго рода (КИ-2) от вектор-функции $\vec{a}(x; y; z)$ вдоль ориентируемой кривой γ называется криволинейный интеграл первого рода от скалярной функции $\vec{a} \cdot \vec{\tau} = a_{\tau}(x; y; z)$ по указанной дуге γ .

$$\int_{\gamma} \vec{a} \cdot \vec{\tau} dl \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\gamma} a_{\tau} dl. \quad (4.1.2.1)$$

В координатной форме КИ-2 имеет вид

$$\int_{\gamma} \vec{a} \cdot \vec{\tau} dl = \int_{\gamma} P(x; y; z) dx + Q(x; y; z) dy + R(x; y; z) dz. \quad (4.1.2.2)$$

Непосредственно из определения КИ-2 следует, что он зависит от направления интегрирования вдоль кривой, то есть меняет знак при изменении ориентации кривой: $\int_{\gamma^+} a_{\tau} dl = - \int_{\gamma^-} a_{\tau} dl$.

Вычисление КИ-2 сводится к вычислению определённого интеграла.

$$\int_{\gamma} P(x; y; z)dx + Q(x; y; z)dy + R(x; y; z)dz =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t); y(t); z(t))x'(t) + Q(x(t); y(t); z(t))y'(t) + R(x(t); y(t); z(t))z'(t)) dt. \quad (4.1.2.3)$$

В случае плоского поля формула (4.1.1.3) упрощается.

$$\int_{\gamma} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t); y(t))x'(t) + Q(x(t); y(t))y'(t)) dt. \quad (4.1.2.4)$$

Рассмотрим плоское векторное поле $\vec{a}(P(x; y); Q(x; y))$. Пусть на плоскости Oxy задана некоторая кривая $\gamma: y = f(x), x \in [a; b]$. Тогда криволинейный интеграл второго рода вдоль кривой γ вычисляется путем перехода к определенному интегралу по формуле

$$\int_{\gamma} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \int_a^b (P(x; f(x)) + Q(x; f(x)) \cdot f'(x)) dx. \quad (4.1.2.5)$$

Криволинейный интеграл второго рода (4.1.2.2) в случае, когда $\vec{a} = \vec{F}$ – сила, под действием которой перемещается тело, определяет работу силы \vec{F} на пути γ . В этом заключается физический смысл криволинейного интеграла второго рода.

$$A = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{\tau} dl = \int_{\gamma} P(x; y; z)dx + Q(x; y; z)dy + R(x; y; z)dz. \quad (4.1.2.6)$$

4.2 Примеры решения типовых задач

4.2.1 Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int_{\gamma} (2x + y)dl$, где γ – контур треугольника ABO с вершинами в точках $A(1;0)$, $B(0;2)$, $O(0;0)$.

Решение. Для вычисления криволинейного интеграла первого рода воспользуемся свойством аддитивности области интегрирования и формулой (4.1.1.4):

$$\int_{OAB} (2x + y)dl = \int_{AB} (2x + y)dl + \int_{BO} (2x + y)dl + \int_{OA} (2x + y)dl.$$

На отрезке AB : $y = -2x + 2$, $y' = -2$, $dl = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{5} dx$.

На отрезке BO : $x = 0$, $x' = 0$, $dl = \sqrt{1 + x'^2} dy = dy$.

На отрезке OA : $y = 0$, $y' = 0$, $dl = \sqrt{1 + y'^2} dx = dx$.

Учитывая, что криволинейный интеграл первого рода не зависит от пути интегрирования и, используя формулу перехода к определенному интегралу, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (2x + y) dl &= \int_0^1 (2x - 2x + 2) \sqrt{5} dx + \int_0^2 (2 \cdot 0 + y) dy + \int_0^1 (2x + 0) dx = \\ &= \int_0^1 2\sqrt{5} dx + \int_0^2 y dy + \int_0^1 2x dx = 2\sqrt{5} x \Big|_0^1 + \frac{y^2}{2} \Big|_0^2 + x^2 \Big|_0^1 = 2\sqrt{5} + 2 + 1 = 2\sqrt{5} + 3 \end{aligned}$$

4.2.2 Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\gamma} (x + y) dl$, где γ – лепесток

лемнискаты $\rho = 4\sqrt{\sin 2\varphi}$, расположенной в первой координатной четверти.

Решение. По условию $\sin 2\varphi \geq 0$ или $\pi n \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. С учетом

того, что лемниската расположена в первой четверти, получаем, что $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Линия задана уравнением в полярной системе координат, поэтому необходимо воспользоваться формулой (4.1.1.5).

Так как $\rho' = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin 2\varphi}} \cdot \cos 2\varphi \cdot 2 = \frac{4 \cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}$, то дифференциал равен:

$$dl = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi = \sqrt{16 \sin 2\varphi + \frac{16 \cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}} d\varphi = \frac{4d\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}} = \frac{16d\varphi}{4\sqrt{\sin 2\varphi}} = \frac{16d\varphi}{\rho}.$$

Вычисляем заданный криволинейный интеграл первого рода:

$$\int_{\gamma} \frac{x + y}{4} dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \cos \varphi + \rho \sin \varphi}{4} \cdot \frac{16d\varphi}{\rho} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi = 4(\sin \varphi - \cos \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 8.$$

4.2.3 Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int_{\gamma} y dl$, где γ –

первая арка циклоиды $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $t \in [0; 2\pi]$.

Решение. Линия задана параметрическим образом, поэтому необходимо воспользоваться формулой (4.1.1.3).

Так как $x' = 2(1 - \cos t)$ и $y' = 2 \sin t$, то дифференциал равен:

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \sqrt{4(1 - \cos t)^2 + 4 \sin^2 t} dt = 2\sqrt{2 - 2 \cos t} dt = 4 \sin \frac{t}{2} dt.$$

Вычисляем заданный криволинейный интеграл первого рода:

$$\int_{\gamma} y dl = \int_0^{2\pi} 2 \cdot (1 - \cos t) \cdot 4 \cdot \sin \frac{t}{2} dt = 8 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt - 8 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} \cdot \cos t dt = -16 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} -$$

$$-4 \int_0^{2\pi} \left(-\sin \frac{t}{2} + \sin \frac{3 \cdot t}{2} \right) dt = -16(-1-1) - 8 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} + \frac{8}{3} \cos \frac{3 \cdot t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 32 - 8(-1-1) + \frac{8}{3}(-1-1) = 32 + 16 - \frac{16}{3} = \frac{128}{3} = 42 \frac{2}{3}.$$

4.2.4 Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int_L xy dl$, где L – дуга винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, ограниченная точками, для которых $t = 0$, $t = \frac{5\pi}{2}$.

Решение. Линия задана параметрическим образом, поэтому необходимо воспользоваться формулой (4.1.1.2). Так как $x' = -a \sin t$, $y' = a \cos t$, $z' = b$, то $dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} dt$.

Вычисляем заданный криволинейный интеграл первого рода:

$$\begin{aligned} \int_L x \cdot y dl &= \int_0^{\frac{5\pi}{2}} a \cos t a \sin t \sqrt{a^2 + b^2} dt = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{\frac{5\pi}{2}} \sin 2t dt = \\ &= -\frac{1}{4} a^2 \sqrt{a^2 + b^2} \cos 2t \Big|_0^{\frac{5\pi}{2}} = -\frac{1}{4} a^2 \sqrt{a^2 + b^2} \cdot (-1-1) = \frac{1}{2} a^2 \cdot \sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

4.2.5 Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int_{\gamma} 4x^3 dx + 3x^2 y dy$,

где γ – дуга кривой $y = x^2$ от точки $A(1;1)$ до точки $B(3;9)$.

Решение. Для вычисления криволинейного интеграла второго рода воспользуемся формулой (4.1.2.5):

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} 4x^3 dx + 3x^2 y dy &= \int_1^3 \left(4x^3 + 3x^2 \cdot x^2 \cdot (x^2)' \right) dx = \int_1^3 (4x^3 + 3x^4 \cdot 2x) dx = \\ &= \int_1^3 (4x^3 + 6x^5) dx = (x^4 + x^6) \Big|_1^3 = 81 + 729 - 1 - 1 = 808. \end{aligned}$$

4.2.6 Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int_{\gamma} \frac{(y^3 - x^2) dx + (x^3 + y^2) dy}{x^2 + y^2}$, где γ – дуга окружности $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, расположенная в первой четверти, в направлении возрастания параметра t .

Решение. Для вычисления криволинейного интеграла второго рода воспользуемся формулой (4.1.2.4):

$$\int_{\gamma} \frac{(y^3 - x^2) dx + (x^3 + y^2) dy}{x^2 + y^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(R^3 \sin^3 t - R^2 \cos^2 t) \cdot (-R \sin t) + (R^3 \cos^3 t + R^2 \sin^2 t) \cdot R \cos t}{R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t} dt = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^4 \cos^4 t - R^4 \sin^4 t + R^3 \cos^2 t \sin t + R^3 \sin^2 t \cos t}{R^2} dt = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 (\cos^4 t - \sin^4 t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cos^2 t \sin t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \sin^2 t \cos t dt = \\
&= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t - \sin^2 t) \cdot (\cos^2 t + \sin^2 t) dt - R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t d \cos t + R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t d \sin t = \\
&= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t \cdot 1 dt - \frac{R}{3} \cos^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{R}{3} \sin^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= \frac{R^2}{2} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{R}{3} (0 - 1) + \frac{R}{3} (1 - 0) = \frac{R^2}{2} (0 - 0) + \frac{R}{3} + \frac{R}{3} = \frac{2R}{3}.
\end{aligned}$$

4.2.7 Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int_{\gamma} (y^2 + z^2) dx - yz dy + x dz$, где γ — дуга винтовой линии $x = b \cdot t$, $y = a \cos t$, $z = a \sin t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$).

Решение. Для вычисления криволинейного интеграла второго рода воспользуемся формулой (4.1.2.3).

$$\begin{aligned}
&\int_L (y^2 + z^2) dx - y \cdot z dy + x dz = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t) \cdot b - a \cdot \cos t \cdot a \cdot \sin t \cdot (-a \cdot \sin t) + b \cdot t \cdot a \cdot \cos t] dt = \\
&= a^2 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t dt + ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt = \\
&= \left[\begin{array}{l} u = t \quad du = dt \\ dv = \cos t dt \quad v = \sin t \end{array} \right] = a^2 b t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t d \sin t + ab t \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = \\
&= \frac{a^2 b \pi}{2} + \frac{a^3 \sin^3 t}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{a b \pi}{2} + ab \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2 b \pi}{2} + \frac{a^3}{3} + \frac{a b \pi}{2} - ab.
\end{aligned}$$

4.3 Задания для решения на практическом занятии

4.3.1 Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\gamma} (x^5 + 8xy) dl$, где γ – дуга кривой $4y = x^4$ между точками, для которых $x = 0$ и $x = 1$.

4.3.2 Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\gamma} y\sqrt{1+y^2} dl$, где γ – дуга кривой $x = \ln y$ между точками, для которых $y = 1$ и $y = 4$.

4.3.3 Вычислить криволинейный интеграл $\oint_{\gamma} (2x + 2y) dl$, где γ – контур прямоугольника с вершинами в точках $A(1;1)$, $B(5;1)$, $C(5;6)$, $D(1;6)$.

4.3.4 Вычислить криволинейный интеграл $\oint_{\gamma} xy dl$, где γ – контур треугольника с вершинами в точках $A(2;-6)$, $B(2;5)$, $C(-4;-1)$.

4.3.5 Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dl$, где γ – дуга лемнискаты $r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$ $\left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\right)$.

4.3.6 Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\gamma} (x^2 + y^2) dl$, где γ – дуга кривой $x = 2(\cos t + t \sin t)$, $y = 2(\sin t - t \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

4.3.7 Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\gamma} \sqrt{1+x} dl$, где γ – дуга кривой $x = \sin^2 t$, $y = \sin t \cos t$, $z = \cos t$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

4.3.8 Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\gamma} \sqrt{1+4y+9xz} dl$, где γ – дуга кривой $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \leq t \leq 1$.

4.3.9 Найти длину винтовой линии $x = 4\cos t$, $y = 4\sin t$, $z = 3t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) с плотностью $\mu = xyz$.

4.3.10 Найти массу дуги кривой $y = \ln x$ с плотностью $\mu = x^2$, если концы дуги определяются следующими значениями x : $x_1 = \sqrt{8}$, $x_2 = 4\sqrt{5}$.

4.3.11 Найти массу дуги кривой $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ с плотностью $\mu = 1$, если $0 \leq t \leq 1$.

4.3.12 Найти центр тяжести дуги винтовой линии $x = 4\cos t$, $y = 4\sin t$, $z = 3t$ ($0 \leq t \leq \pi/2$), если её линейная плотность в каждой точке пропорциональна произведению первых двух координат.

4.3.13 Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\gamma} x^2 dx + xy^2 dy$, где γ – отрезок прямой от точки $A(0;1)$ до точки $B(1;2)$.

4.3.14 Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\gamma} (x^3 + y)dx + (x + y^3)dy$, где γ – ломанная $ABCA$, причём $A(1;1)$, $B(1;2)$, $C(3;5)$.

4.3.15 Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\gamma} x^2 dx + \frac{dy}{y^2}$, где γ – дуга кривой $y = \frac{1}{x}$ от точки $A(1;1)$ до точки $B(4;1/4)$.

4.3.16 Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\gamma} ydx + xdy$, где γ – дуга астроида $x = 2 \cos^3 t$, $y = 2 \sin^3 t$ от точки $A(t_1)$ до точки $B(t_2)$, для которых $t_1 = 0$, $t_2 = \pi/4$.

4.3.17 Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\gamma} y^2 dx + (x^2 + z)dy + (y + z^2)dz$, где γ – отрезок прямой от точки $A(1;0;2)$ до точки $B(3;1;4)$.

4.3.18 Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\gamma} yzdx + xzdy + xydz$, где γ – дуга кривой $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ ($0 \leq t \leq 1$).

4.3.19 Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\gamma} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, где γ – линия пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$ ($z \geq 0$), обходимая при интегрировании против часовой стрелки, если смотреть из начала координат.

4.3.20 Найти работу, производимую силой $\vec{F} = 4x^6 \vec{i} + xy \vec{j}$ вдоль дуги кривой $y = x^3$ от точки $O(1;1)$ до точки $B(2;4)$.

4.3.21 Найти работу, производимую силой $\vec{F} = (y^2 - z^2) \vec{i} + x \vec{j} + yz \vec{k}$ вдоль дуги гиперболической винтовой линии $x = 5t$, $y = 8 \operatorname{ch} t$, $z = 8 \operatorname{sh} t$ ($0 \leq t \leq 1$).

4.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

4.4.1 Вычислить криволинейный интеграл первого рода.

4.4.1.1 $\int_{\gamma} \sqrt{x^2} dl$, где γ – дуга линии $y = \ln x$, $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.

$$4.4.1.2 \quad \int_{\gamma} (x+y)dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } x=2\cos^3 t, y=2\sin^3 t, \frac{3\pi}{2} \leq t \leq \frac{7\pi}{4}.$$

$$4.4.1.3 \quad \int_{\gamma} (x^2+y^2)dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } r=1-\cos\varphi, -\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq 0.$$

$$4.4.1.4 \quad \int_{\gamma} (x^2+y^2-z)dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } x=\cos t, y=\sin t, z=t, 0 \leq t \leq 1.$$

$$4.4.1.5 \quad \int_{\gamma} \sqrt{y^2} dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } y=e^{2x}, 0 \leq x \leq 1.$$

$$4.4.1.6 \quad \int_{\gamma} x^2 dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } x=6(t-\sin t), y=6(1-\cos t), \frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$4.4.1.7 \quad \int_{\gamma} (x^2+y^2)dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } r=7e^{\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \ln 7.$$

$$4.4.1.8 \quad \int_{\gamma} \frac{dl}{\sqrt{x^2+z^2}}, \text{ где } \gamma - \text{ отрезок прямой, соединяющий точки } O(0;0;0) \text{ и } A(1;2;3).$$

$$4.4.1.9 \quad \int_{\gamma} \cos x dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } y=\ln \sin x, \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$4.4.1.10 \quad \int_{\gamma} (2x+y)dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } x=\sqrt{2}\cos^2 t, y=\sqrt{2}\sin^2 t, \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}.$$

$$4.4.1.11 \quad \int_{\gamma} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } r=2e^{\frac{4\varphi}{3}}, 0 \leq \varphi \leq 1.$$

$$4.4.1.12 \quad \int_{\gamma} (xy+z)dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } x=\cos 2t, y=\sin 2t, z=8t, \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$4.4.1.13 \quad \int_{\gamma} \frac{\ln x dl}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } y=\ln \frac{1}{x}, \frac{1}{e} \leq x \leq e.$$

$$4.4.1.14 \quad \int_{\gamma} xdl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } x=t-\sin t, y=1-\cos t, \frac{4\pi}{3} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}.$$

$$4.4.1.15 \quad \int_{\gamma} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } r=\varphi, 0 \leq \varphi \leq \sqrt{3}.$$

$$4.4.1.16 \quad \oint_{\gamma} (y^2+z^2)dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга окружности } y^2+z^2=9.$$

$$4.4.1.17 \quad \int_{\gamma} ydl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } y=\operatorname{ch} x, 0 \leq x \leq 1.$$

$$4.4.1.18 \quad \int_{\gamma} xydl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } x=\sin t, y=\cos t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$4.4.1.19 \quad \int_{\gamma} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } r = 1 + \sin \varphi, 2\pi \leq \varphi \leq 3\pi.$$

$$4.4.1.20 \quad \oint_{\gamma} (x^2 + y^2) dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга окружности } x^2 + y^2 = \frac{1}{16}.$$

$$4.4.1.21 \quad \int_{\gamma} \frac{y dl}{1 + \operatorname{ch}^2 x}, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } y = \operatorname{sh} x, 0 \leq x \leq 1.$$

$$4.4.1.22 \quad \int_{\gamma} \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } x = \cos t, y = \sin t, \frac{2\pi}{3} \leq t \leq \frac{5\pi}{6}.$$

$$4.4.1.23 \quad \int_{\gamma} \sqrt{x^2 y^2} dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } r = \sin \varphi, \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6}.$$

$$4.4.1.24 \quad \int_{\gamma} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \text{ где } \gamma - \text{ отрезок прямой, соединяющий точки } A(2; 1; 3) \text{ и } B(5; -1; 9).$$

$$4.4.1.25 \quad \int_{\gamma} y^2 dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } y = e^x, 0 \leq x \leq \ln 2.$$

$$4.4.1.26 \quad \int_{\gamma} (x + y) dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } x = 4 \cos^3 2t, y = 4 \sin^3 2t, \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{3\pi}{8}.$$

$$4.4.1.27 \quad \int_{\gamma} \operatorname{arccotg} \frac{x}{y} dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } r = 1 - \sin \varphi, \frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{3}.$$

$$4.4.1.28 \quad \oint_{\gamma} (x^2 + z^2) dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга окружности } x^2 + z^2 = 16.$$

$$4.4.1.29 \quad \int_{\gamma} \sqrt{x^2} dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } r = \cos \varphi, \frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi.$$

$$4.4.1.30 \quad \int_{\gamma} \frac{\sqrt{y^2} dl}{1 + \sin^2 x}, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } y = \cos x, \frac{5\pi}{6} \leq x \leq \pi.$$

4.4.2 Вычислить работу A силы \vec{F} вдоль дуги линии l от точки S до точки T (линия l задана либо уравнением $y = f(x)$, если в условии задачи данного варианта указано уравнение, либо является прямой, проходящей через две точки S и T).

$$4.4.2.1 \quad \vec{F} = (2x^2 - 3y)\vec{i} + (3x - y)\vec{j} + z\vec{k}, S(2; 3; 5), T(5; 1; 4).$$

$$4.4.2.2 \quad \vec{F} = (3x - y)\vec{i} + (2x + 5y^2)\vec{j}, f(x) = x^2, S(1; 1), T\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right).$$

$$4.4.2.3 \quad \vec{F} = (4x^2 + 3y^2)\vec{i} + (2x - y)\vec{j}, S(1; 4), T(2; 5).$$

$$4.4.2.4 \quad \vec{F} = (x^2 - y^2)\vec{i} + (2x^2 - 6y^3)\vec{j}, f(x) = x^2 + 4x - 1, S(1; 4), T(2; 11).$$

- 4.4.2.5 $\vec{F} = (4x - y)\vec{i} + (3x^3 - 5z)\vec{j} + (2x + 6z)\vec{k}$, $S(4;3;2)$, $T(2;5;1)$.
- 4.4.2.6 $\vec{F} = (5x + 3y)\vec{i} + (4x + 4y^3)\vec{j}$, $f(x) = x^3$, $S(2;8)$, $T(3;27)$.
- 4.4.2.7 $\vec{F} = (x^3 + 5y)\vec{i} + (x^2 + 2y)\vec{j}$, $S(5;4)$, $T(6;7)$.
- 4.4.2.8 $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$, $f(x) = 2x^2 + 5x + 2$, $S(0;2)$, $T(1;9)$.
- 4.4.2.9 $\vec{F} = (x^2 - z)\vec{i} + (3z - y)\vec{j} + (2x + z)\vec{k}$, $S(3;3;4)$, $T(6;7;8)$.
- 4.4.2.10 $\vec{F} = (2x + 5y)\vec{i} + (2x - 4y^2)\vec{j}$, $f(x) = x^2 - x$, $S\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$, $T(3;6)$.
- 4.4.2.11 $\vec{F} = (3x^2 + 5y^2)\vec{i} - (x^2 - 4y)\vec{j}$, $S(2;1)$, $T(4;3)$.
- 4.4.2.12 $\vec{F} = (2x - 5y)\vec{i} + (3x + 2y^2)\vec{j}$, $f(x) = 3x^2 - 10x + 3$, $S(1;-4)$, $T(3;0)$.
- 4.4.2.13 $\vec{F} = (y^2 - z)\vec{i} + (3z - x)\vec{j} + (2y + z)\vec{k}$, $S(2;1;6)$, $T(4;5;4)$.
- 4.4.2.14 $\vec{F} = (x^2 - 3y)\vec{i} - (4x - 5y^2)\vec{j}$, $f(x) = 4 - x^2$, $S(2;0)$, $T(1;3)$.
- 4.4.2.15 $\vec{F} = (2x^2 + y^3)\vec{i} - (x^3 - y^3)\vec{j}$, $S(3;7)$, $T(-2;-1)$.
- 4.4.2.16 $\vec{F} = x\vec{i} + (4x - y^2)\vec{j}$, $f(x) = x^2 - 10x + 9$, $S(1;0)$, $T(2;-7)$.
- 4.4.2.17 $\vec{F} = (y^2 - x)\vec{i} + (x + y - z)\vec{j} + x\vec{k}$, $S(3;2;1)$, $T(8;5;2)$.
- 4.4.2.18 $\vec{F} = (x^3 - 2y^2)\vec{i} - (5x + 4y^2)\vec{j}$, $f(x) = x - x^2$, $S\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$, $T(5;-20)$.
- 4.4.2.19 $\vec{F} = (4x + 2y^2)\vec{i} + 2(3x^2 - y^2)\vec{j}$, $S(2;5)$, $T(3;7)$.
- 4.4.2.20 $\vec{F} = y\vec{i} + (2x + 3y^2)\vec{j}$, $f(x) = 2x^2 - 9x + 1$, $S(2;-9)$, $T(0;1)$.
- 4.4.2.21 $\vec{F} = (y^2 - z^3)\vec{i} + (x^2 + y - z)\vec{j} + (x + z)\vec{k}$, $S(4;1;2)$, $T(2;4;7)$.
- 4.4.2.22 $\vec{F} = (x^3 + 4y^2)\vec{i} + 3 \cdot (2x - 3y^2)\vec{j}$, $f(x) = x^2 + 3x$, $S(0;0)$, $T(3;18)$.
- 4.4.2.23 $\vec{F} = (2x + 4y^2)\vec{i} - 5(4x^2 + y^3)\vec{j}$, $S(3;9)$, $T(6;8)$.
- 4.4.2.24 $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + (x^2 - 5y^2)\vec{j}$, $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$, $S(1;0)$, $T(2;7)$.
- 4.4.2.25 $\vec{F} = (y^3 - z^2)\vec{i} + (x^2 + 2y - 3z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$, $S(5;1;0)$, $T(4;2;1)$.
- 4.4.2.26 $\vec{F} = (x + 4y)\vec{i} + 3x\vec{j}$, $f(x) = \sin x$, $S(0;0)$, $T\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$.
- 4.4.2.27 $\vec{F} = \cos x \vec{i} - x \sin y \vec{j}$, $S(2;2)$, $T(7;7)$.
- 4.4.2.28 $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + 2xy \vec{j}$, $f(x) = \sin 3x$, $S\left(\frac{\pi}{3}; 0\right)$, $T\left(\frac{\pi}{2}; -1\right)$.
- 4.4.2.29 $\vec{F} = \sin x \vec{i} + \cos y \vec{j} + \operatorname{tg} z \vec{k}$, $S(2;4;1)$, $T(5;1;2)$.
- 4.4.2.30 $\vec{F} = \cos x \vec{i} + \sin y \vec{j}$, $f(x) = x^2$, $S\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$, $T(-2;4)$.

5 ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА

Содержание: поверхностные интегралы первого рода и их приложения, поверхностные интегралы второго рода и их приложения.

5.1 Теоретический материал по теме практического занятия

5.1.1 Поверхностные интегралы первого рода

Пусть в пространстве задана некоторая поверхность $\Sigma: \Phi(x; y; z) = 0$. Предположим, что на этой поверхности задана функция трех переменных $f(x; y; z)$. Разобьем поверхность Σ на n элементарных частей, с площадями элементарных поверхностей: $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$. Будем считать, что поверхность Σ является гладкой, то есть на ней определены и непрерывны частные производные, по крайней мере, одна из которых отлична от нуля. Поэтому направление нормали по поверхности Σ будет меняться непрерывно. На каждой элементарной поверхности произвольным образом выбираем точки P_1, P_2, \dots, P_n и вычисляем значение функции $f(x; y; z)$ в каждой из них: $f(P_1), f(P_2), \dots, f(P_n)$.

Составим интегральные суммы $\sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta\sigma_i$ от функции $f(x; y; z)$ по площади поверхности Σ . Расстояние между наиболее удаленными точками разбиения поверхности Σ назовем диаметром разбиения, а максимальный из диаметров разбиения – мелкостью разбиения, и обозначим значением λ_n .

Определение 5.1.1.1 Поверхностным интегралом первого рода (ПИ-1) от функции $f(x; y; z)$ по поверхности Σ называется предел интегральных сумм от этой функции по площади поверхности σ , при мелкости разбиения стремящемся к нулю и если этот предел существует и конечен.

$$\iint_{\Sigma} f(x; y; z) d\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i; z_i) \Delta\sigma_i. \quad (5.1.1.1)$$

Теорема 5.1.1.1 Если функция $f(x; y; z)$ является непрерывной в некоторой области Ω , то на любой поверхности, входящей в данную область, будет существовать ПИ-1, как предел интегральных сумм.

Предположим, что поверхность Σ задана уравнением $z = \varphi(x; y)$, которая проектируется на плоскость Oxy в область Σ_{xy} . Тогда вычисление ПИ-1 сводится к вычислению двойного интеграла.

$$\iint_{\Sigma} f(x; y; z) d\sigma = \iint_{\Sigma_{xy}} f(x; y; \varphi(x; y)) \sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2} dx dy. \quad (5.1.1.2)$$

С помощью ПИ-1 можно вычислить площадь поверхности Σ .

$$Q = \iint_{\Sigma} d\sigma = \iint_{\Sigma_{xy}} \sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2} dx dy. \quad (5.1.1.3)$$

С физической точки зрения, поверхностный интеграл первого рода от поверхностной плотности заданной части поверхности равен массе этой части поверхности.

5.1.2 Поверхностные интегралы второго рода

Поверхностный интеграл второго рода связан с ориентацией поверхности. Ориентировать поверхность означает задать одну из ее сторон. Двухсторонние поверхности являются *ориентируемыми*, если указана одна из её сторон. Если поверхность имеет одну сторону, то она называется не ориентируемой.

Поверхность называется двусторонней, если, перемещаясь по любой кривой, лежащей на данной поверхности, мы возвращаемся в исходную точку, при этом направление нормали не меняется. При перемещении направление нормали должно меняться непрерывно. Если существует кривая, при перемещении вдоль которой по возвращению в исходную точку направление нормали изменится, то такая поверхность называется односторонней.

Пусть задана ориентируемая поверхность Σ , с единичным вектором нормали \vec{n}_0 . Допустим, что на данной поверхности определена некоторая вектор-функция $\vec{a}(x; y; z) = (P(x; y; z); Q(x; y; z); R(x; y; z))$. Составим скалярное произведение вектор-функции на нормальный единичный вектор: $\vec{a} \cdot \vec{n}_0 = a_n(x; y; z)$, где $a_n(x; y; z)$ – проекция вектор-функции на единичный нормальный вектор.

Определение 5.1.2.1 Поверхностным интегралом второго рода (ПИ-2) от вектор-функции $\vec{a}(x; y; z)$ по ориентируемой поверхности Σ называется поверхностный интеграл первого рода от скалярной функции $\vec{a} \cdot \vec{n}_0 = a_n(x; y; z)$.

$$\iint_{\Sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}_0) d\sigma = \iint_{\Sigma} a_n d\sigma. \quad (5.2.1.1)$$

Используя свойства скалярного произведения, равенство (5.2.1.1) можно записать в виде

$$\iint_{\Sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}_0) d\sigma = \iint_{\Sigma} P(x; y; z) dydz + Q(x; y; z) dx dz + R(x; y; z) dx dy. \quad (5.2.1.2)$$

В подынтегральном выражении правой части стоит алгебраическая сумма. Знаки учитываются при вычислении поверхностного интеграла второго рода. При переходе от поверхностного интеграла второго рода к двойным интегралам перед ними берём знак «+», если угол между нормалью к поверхности и соответствующей осью острый, и знак «-» если угол является тупым.

Справедлива следующая формула, сводящая вычисление ПИ-2 к вычислению двойного интеграла:

$$\iint_{\Sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}_0) d\sigma = \iint_{\Sigma_{xy}} (\vec{a} \cdot \vec{n}) dx dy, \quad (5.2.1.3)$$

где область Σ_{xy} является проекцией поверхности Σ на плоскость Oxy ; поверхность Σ задаётся функцией $z = \varphi(x; y)$; нормальный вектор поверхности равен $\vec{n} = \pm \text{grad}(z - \varphi(x; y))$. Аналогично, вычисляется ПИ-2 при проектировании поверхности на другие плоскости.

С физической точки зрения, поверхностный интеграл второго рода от вектора векторного поля равен потоку этого поля.

5.2 Примеры решения типовых задач

5.2.1 Вычислить поверхностный интеграл первого рода

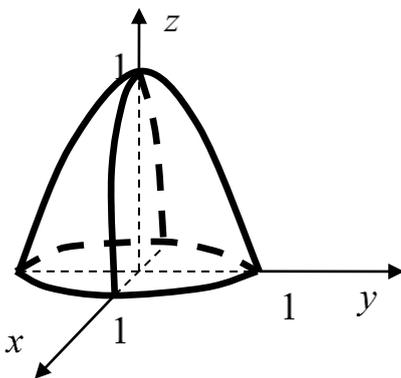


Рисунок 5.1 – Параболоид

$\iint_{\Sigma} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} d\sigma$, где Σ – конечная часть поверхности $z = 1 - x^2 - y^2$, отсеченная плоскостью $z = 0$.

Решение. Изобразим заданную поверхность на рисунке 5.1. Так как поверхность задана уравнением $z = z(x; y)$, то для вычисления поверхностного интеграла воспользуемся формулой (5.1.1.2).

Так как $\frac{\partial z}{\partial x} = -2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$, то

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{1 + (-2x)^2 + (-2y)^2} dx dy = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy.$$

Проекцией заданной части параболоида вращения $z = 1 - x^2 - y^2$ на плоскость Oxy является область, ограниченная окружностью $x^2 + y^2 = 1$.

Вычислим заданный поверхностный интеграл первого рода.

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} d\sigma &= \iint_G \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy = \\ &= \iint_G (1 + 4x^2 + 4y^2) dx dy = I \end{aligned}$$

Для вычисления двойного интеграла перейдем к полярным координатам: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $x^2 + y^2 = r^2$, $dx dy = r dr d\varphi$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

$$\begin{aligned} I &= \iint_G (1 + 4x^2 + 4y^2) dx dy = \iint_G (1 + 4r^2) r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r + 4r^3) dr = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} + r^4 \right) \Big|_0^1 d\varphi = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{3}{2} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{2} \cdot 2\pi = 3\pi. \end{aligned}$$

5.2.2 Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint_{\Sigma} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, где Σ – внешняя сторона сферы $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

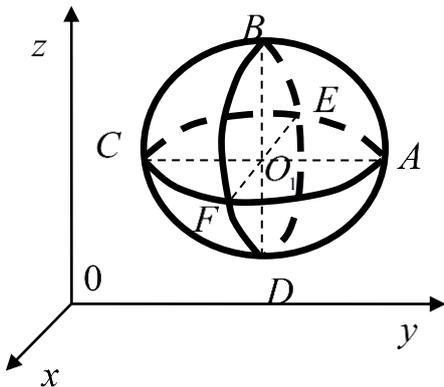


Рисунок 5.2 – Сфера

Решение. Изобразим заданную сферу на рисунке 5.2.

Исходный интеграл представляет сумму трех интегралов.

$$I_1 = \iint_{\Sigma_1} x^2 dy dz, \quad I_2 = \iint_{\Sigma_2} y^2 dz dx, \quad I_3 = \iint_{\Sigma_3} z^2 dx dy.$$

Вычислим первый интеграл $I_1 = \iint_{\Sigma_1} x^2 dy dz$. В этом случае уравнение сферы будет иметь вид:

$$x - a = \pm \sqrt{R^2 - (y - b)^2 - (z - c)^2},$$

где знак «плюс» берем, когда рассматриваем ближнюю полусферу, а знак «минус», когда дальнюю полусферу. Подынтегральную функцию представим в виде

$$x^2 = (x - a)^2 + a^2 + 2a(x - a).$$

Обозначим через Σ_{11} внешнюю сторону ближней полусферы $ABCDEF$ (рис. 5.2), через Σ_{12} – внешнюю сторону дальней полусферы; через G – проекцию каждой полусферы на плоскость Oyz (это круг, ограниченный окружностью $(y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$).

Учитывая, что выражение $x - a$ меняет знак при переходе от одной полусферы к другой, находим первый интеграл.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint_{\Sigma_1} x^2 dydz = \iint_{\Sigma_{11}} [(x-a)^2 + a^2 + 2a(x-a)] dydz - \\
&- \iint_{\Sigma_{12}} [(x-a)^2 + a^2 - 2a(x-a)] dydz = 4a \iint_G (x-a) dydz = \\
&= 4a \iint_G \sqrt{R^2 - (y-b)^2 - (z-c)^2} dydz.
\end{aligned}$$

Для вычисления двойного интеграла переходим к полярным координатам по формулам: $y-b = r \cos \varphi$, $z-c = r \sin \varphi$.

При этом

$$(y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2, \quad dydz = r dr d\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq R.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
I_1 &= 4a \iint_G \sqrt{R^2 - r^2} r dr d\varphi = 4a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr = \\
&= -2a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} d(R^2 - r^2) = -\frac{4a}{3} \int_0^{2\pi} \sqrt{(R^2 - r^2)^3} \Big|_0^R d\varphi = \frac{4aR^3}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi = \\
&= \frac{4aR^3}{3} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{8}{3} \pi aR^3.
\end{aligned}$$

Аналогично вычисляем остальные два интеграла:

$$I_2 = \iint_{\Sigma_2} y^2 dzdx = 8\pi bR^3/3, \quad I_3 = \iint_{\Sigma_3} z^2 dxdy = 8\pi cR^3/3.$$

Следовательно,

$$\iint_{\sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = I_1 + I_2 + I_3 = 8\pi R^3(a+b+c)/3.$$

5.2.3 Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$\iint_{\Sigma} z dydz - 4y dx dz + 8x^2 dx dy$, где Σ — часть поверхности $z = x^2 + y^2 + 1$, отсечённой

плоскостью $z = 2$, если нормаль \vec{n} к поверхности Σ составляет с осью Oz тупой угол γ .

Решение. С помощью градиента находим вектор нормали к заданной поверхности: $\vec{n} = -(-2x; -2y; 1) = (2x; 2y; -1)$, так как $\cos \gamma < 0$. По условию задано векторное поле $\vec{a} = (z; -4y; 8x^2)$. По формуле (5.2.1.3) вычисляем заданный поверхностный интеграл второго рода.

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma} z dydz - 4y dx dz + 8x^2 dx dy = \iint_{\Sigma_{oxy}} \vec{a} \cdot \vec{n} dx dy = \iint_{\Sigma_{oxy}} (2xz - 8y^3 - 8x^2) dx dy = \\
&= \iint_{\Sigma_{oxy}} (2x(x^2 + y^2 + 1) - 8(y^2 + x^2)) dx dy = \left[\begin{array}{l} x = r \cos \varphi \quad 0 \leq r \leq 1 \quad dxdy = r d\varphi dr \\ y = r \sin \varphi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad x^2 + y^2 = r^2 \end{array} \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{\Sigma_{oxy}} (2r \cos \varphi (r^2 + 1) - 8r^2) r d\varphi dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (2r^4 \cos \varphi + 2r^2 \cos \varphi - 8r^3) dr = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{5} r^5 \cos \varphi + \frac{2}{3} r^3 \cos \varphi - 2r^4 \right) \Big|_0^1 d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{5} \cos \varphi + \frac{2}{3} \cos \varphi - 2 \right) d\varphi = \\
&= \left(\frac{2}{5} \sin \varphi + \frac{2}{3} \sin \varphi - 2\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = -4\pi.
\end{aligned}$$

5.3 Задания для решения на практическом занятии

5.3.1 Вычислить поверхностный интеграл $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + 3z^2) d\sigma$, где Σ – часть поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, отсечённая плоскостями $z = 0$, $z = 1$.

5.3.2 Вычислить поверхностный интеграл $\iint_{\Sigma} (xz + yz) d\sigma$, где Σ – часть поверхности $z = \sqrt{9 - x^2}$, отсечённая плоскостями $y = 0$, $y = 2$.

5.3.3 Вычислить поверхностный интеграл $\iint_{\Sigma} \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} d\sigma$, где Σ – часть поверхности $y = 2 - x^2 - z^2$, отсечённая плоскостью $y = 0$.

5.3.4 Вычислить поверхностный интеграл $\iint_{\Sigma} \frac{d\sigma}{(1 + x + y + z)^2}$, где Σ – граница тетраэдра $x + y + z \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

5.3.5 Вычислить массу полусферы $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, если поверхностная плотность в каждой её точке $\mu = x^2 y^2$.

5.3.6 Вычислить площадь поверхности Σ , где Σ – верхняя сторона плоскости $x + y + z = 6$, вырезанной цилиндром $x^2/4 + y^2/9 = 1$, $z = 1$.

5.3.7 Вычислить поверхностный интеграл $\iint_{\Sigma} x dy dz + y dx dz + z dx dy$, где Σ – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

5.3.8 Вычислить поверхностный интеграл $\iint_{\Sigma} xz dy dz + xy dx dz + yz dx dy$, где Σ – внешняя сторона поверхности $2x + 3y + 4z = 12$, расположенная в первом октанте.

5.3.9 Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint_{\Sigma} (x+y)dydz + (y-x)dx dz + (z-2)dxdy$, где Σ – часть поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, отсекаемая плоскостями $z=0$ и $z=1$.

5.3.10 Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint_{\Sigma} xzdydz + yx^2 dx dz + zy^2 dxdy$, где Σ – верхняя сторона поверхности, расположенной в первом октанте и составленной из параболоида вращения $z = x^2 + y^2$, цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ и координатных плоскостей.

5.3.11 Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint_{\Sigma} xzdydz + yx^2 dx dz + zy^2 dxdy$, где Σ – верхняя сторона поверхности, расположенной в первом октанте и составленной из параболоида вращения $z = x^2 + y^2$, цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ и координатных плоскостей.

5.3.12 Вычислить поверхностный интеграл $\iint_{\Sigma} \frac{dydz}{x} + \frac{dx dz}{y} + \frac{dxdy}{z}$, где Σ – внешняя сторона эллипсоида $x^2/4 + y^2/9 + z^2/16 = 1$.

5.3.13 Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint_{\Sigma} xdydz + zdxdy$, где Σ – часть поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$, отсекаемая плоскостью $z = 4$.

5.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

5.4.1 Вычислить массу части поверхности сферы Σ , если поверхностная плотность в каждой её точке равна $\mu = \mu(x, y, z)$.

5.4.1.1 $\Sigma : z = \sqrt{225 - x^2 - y^2}, x \geq 0, 0 \leq y \leq x/\sqrt{3}, \mu = xy.$

5.4.1.2 $\Sigma : x = -\sqrt{196 - z^2 - y^2}, 0 \leq y \leq z/\sqrt{3}, z \geq 0, \mu = y^2 z.$

5.4.1.3 $\Sigma : y = -\sqrt{169 - z^2 - x^2}, z \leq x \leq \sqrt{3} z, z \geq 0, \mu = x^2 + z^2.$

5.4.1.4 $\Sigma : z = \sqrt{144 - x^2 - y^2}, x \geq 0, x/\sqrt{3} \leq y \leq x\sqrt{3}, \mu = xy^2.$

5.4.1.5 $\Sigma : x = \sqrt{121 - y^2 - z^2}, -z\sqrt{3} \leq x \leq z, z \geq 0, \mu = y^2 z.$

5.4.1.6 $\Sigma : y = -\sqrt{100 - x^2 - z^2}, -z \leq x \leq 0, z \geq 0, \mu = x^2 z^2.$

5.4.1.7 $\Sigma : z = \sqrt{81 - x^2 - y^2}, x \geq 0, -x/\sqrt{3} \leq y \leq 0, \mu = x - y.$

5.4.1.8 $\Sigma : x = \sqrt{64 - z^2 - y^2}, -z/\sqrt{3} \leq y \leq z/\sqrt{3}, z \leq 0, \mu = y^2 + z^2.$

- 5.4.1.9 $\Sigma: y = \sqrt{49 - z^2 - x^2}, 0 \leq x \leq z/\sqrt{3}, z \geq 0, \mu = x + z.$
- 5.4.1.10 $\Sigma: z = -\sqrt{36 - x^2 - y^2}, x \leq 0, -x/\sqrt{3} \leq y \leq 0, \mu = x^2 + y^2.$
- 5.4.1.11 $\Sigma: x = -\sqrt{25 - z^2 - y^2}, -z/\sqrt{3} \leq y \leq 0, z \geq 0, \mu = -yz.$
- 5.4.1.12 $\Sigma: y = -\sqrt{16 - x^2 - z^2}, x \leq 0, -z\sqrt{3} \leq x \leq -z/\sqrt{3}, z \geq 0, \mu = x^2 z.$
- 5.4.1.13 $\Sigma: z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, x \geq 0, \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq x, \mu = x^2 y^2.$
- 5.4.1.14 $\Sigma: x = \sqrt{81 - 4z^2 - 4y^2}/2, -z \leq y \leq 0, z \geq 0, \mu = -yz^2.$
- 5.4.1.15 $\Sigma: y = \sqrt{4 - 9z^2 - 9x^2}/3, -z/\sqrt{3} \leq x \leq 0, z \leq 0, \mu = x^2 + z^2.$
- 5.4.1.16 $\Sigma: z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}, x \geq 0, -x\sqrt{3} \leq y \leq -x, \mu = -x^3 y.$
- 5.4.1.17 $\Sigma: x = -\sqrt{1 - 9z^2 - 9y^2}/3, -z\sqrt{3} \leq y \leq 0, z \leq 0, \mu = -y^2 z.$
- 5.4.1.18 $\Sigma: y = \frac{1}{5}\sqrt{324 - 25z^2 - 25x^2}, -z\sqrt{3} \leq x \leq z\sqrt{3}, z \leq 0, \mu = x^2 z^2.$
- 5.4.1.19 $\Sigma: z = \sqrt{289 - x^2 - y^2}, x \leq 0, 0 \leq y \leq x, \mu = -2x + 3y.$
- 5.4.1.20 $\Sigma: x = \sqrt{256 - z^2 - y^2}, -z \leq y \leq z\sqrt{3}, z \geq 0, \mu = 2y^2 + 2z^2.$
- 5.4.1.21 $\Sigma: y = -\sqrt{441 - z^2 - x^2}, -z\sqrt{3} \leq x \leq -z/\sqrt{3}, z \leq 0, \mu = -3x - 6z.$
- 5.4.1.22 $\Sigma: z = \sqrt{529 - 16x^2 - 16y^2}/4, x \leq 0, -x \leq y \leq -x/\sqrt{3}, \mu = xy.$
- 5.4.1.23 $\Sigma: x = \sqrt{49 - 36z^2 - 36y^2}/6, -\frac{z}{\sqrt{3}} \leq y \leq 0, z \geq 0, \mu = y^2 z^2.$
- 5.4.1.24 $\Sigma: y = \sqrt{16 - 49z^2 - 49x^2}/7, 0 \leq x \leq z\sqrt{3}, z \geq 0, \mu = x^2 z.$
- 5.4.1.25 $\Sigma: z = \sqrt{484 - x^2 - y^2}, x \geq 0, 0 \leq y \leq x\sqrt{3}, \mu = x^3 y.$
- 5.4.1.26 $\Sigma: x = -\sqrt{4 - z^2 - y^2}, 0 \leq y \leq z, z \geq 0, \mu = y^3 z.$
- 5.4.1.27 $\Sigma: y = \sqrt{9 - z^2 - x^2}, z \leq x \leq z\sqrt{3}, z \geq 0, \mu = 2x^2 + 2z^2.$
- 5.4.1.28 $\Sigma: z = -\sqrt{841 - 64x^2 - 64y^2}/8, x \geq 0, x \leq y \leq x\sqrt{3}, \mu = xy^2.$
- 5.4.1.29 $\Sigma: x = \sqrt{9 - z^2 - y^2}, -z\sqrt{3} \leq y \leq 0, z \geq 0, \mu = 3y^2 + 3z^2.$
- 5.4.1.30 $\Sigma: y = \sqrt{16 - 100z^2 - 100x^2}/10, 0 \leq x \leq z, z \geq 0, \mu = 4x + 5z.$

5.4.2 Вычислить поверхностный интеграл $\oiint_{\Sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}_0) d\sigma$, где Σ – замкнутая

поверхность, \vec{n}_0 – внешняя нормаль к поверхности Σ , \vec{a} – векторное поле.

5.4.2.1 $\vec{a} = (x - z^2)\vec{i} + (y + z^2)\vec{j} - x\vec{k}, \Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = 0, z \leq 0.$

5.4.2.2 $\vec{a} = (x + 2z^2)\vec{i} + (y - z^2)\vec{j} - y\vec{k}, \Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 4, z = 0, z \geq 0.$

- 5.4.2.3 $\vec{a} = (x - yz^2)\vec{i} + (xy + z^2)\vec{j} - xy\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 9, z = 0, z \leq 0$.
- 5.4.2.4 $\vec{a} = y\vec{i} + z^2\vec{j} + x\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 16, z = 0, z \geq 0$.
- 5.4.2.5 $\vec{a} = (x - yz^2)\vec{i} + (y + xz^2)\vec{j} - y\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 = z^2, z = -1, z \leq 0$.
- 5.4.2.6 $\vec{a} = (y - yz^2)\vec{i} + x\vec{j} + (x + z^2)\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 = z^2, z = 1, z \geq 0$.
- 5.4.2.7 $\vec{a} = (x + z)\vec{i} + (y + z)\vec{j} - z\vec{k}$, $\Sigma: z = -x^2 - y^2, z = -1$.
- 5.4.2.8 $\vec{a} = (x - z)\vec{i} + (y - z)\vec{j} + \vec{k}$, $\Sigma: z = x^2 + y^2, z = 1$.
- 5.4.2.9 $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\Sigma: z = \sqrt{18 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- 5.4.2.10 $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$, $\Sigma: z = -\sqrt{8 - x^2 - y^2}, z = -\sqrt{x^2 + y^2}$.
- 5.4.2.11 $\vec{a} = 2x\vec{i} + z\vec{j} + y\vec{k}$, $\Sigma: z = 2 - x^2 - y^2, z^2 = x^2 + y^2$.
- 5.4.2.12 $\vec{a} = 2y\vec{i} + 5z\vec{j} + x\vec{k}$, $\Sigma: z = 98 - x^2 - y^2, z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0$.
- 5.4.2.13 $\vec{a} = (x - y)\vec{i} + (y - z)\vec{j} + (z - x)\vec{k}$, $\Sigma: z = x^2 + y^2 + 1, x^2 + y^2 = 1, z = 0$.
- 5.4.2.14 $\vec{a} = (y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$, $\Sigma: z = 54 - 3x^2 - 3y^2, z = 3x^2 + 3y^2$.
- 5.4.2.15 $\vec{a} = yz\vec{i} + 3xz\vec{j} + 4xy\vec{k}$, $\Sigma: z = x, x^2 + y^2 = 4, z = 0, z \geq 0$.
- 5.4.2.16 $\vec{a} = (x^2 - z)\vec{i} + (y^2 + z)\vec{j} - y\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 49, z = 0, z \leq 0$.
- 5.4.2.17 $\vec{a} = (y + z^2)\vec{i} + (x - z^2)\vec{j} - x\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 25, z = 0, z \geq 0$.
- 5.4.2.18 $\vec{a} = (x + z^2)\vec{i} + (xy - z^2)\vec{j} - xyz\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 36, z = 0, z \leq 0$.
- 5.4.2.19 $\vec{a} = xy\vec{i} + yz^2\vec{j} + xy\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 64, z = 0, z \geq 0$.
- 5.4.2.20 $\vec{a} = (x^2 - z^2)\vec{i} + (y^2 + z^2)\vec{j} - xy\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 = z^2, z = -2, z \leq 0$.
- 5.4.2.21 $\vec{a} = (y - z^2)\vec{i} + y\vec{j} + (x - z^2)\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 = z^2, z = 3, z \geq 0$.
- 5.4.2.22 $\vec{a} = (3x + 2z)\vec{i} + (3y - z)\vec{j} - 2z\vec{k}$, $\Sigma: z = -x^2 - y^2, z = -4$.
- 5.4.2.23 $\vec{a} = (3x - 2z)\vec{i} + (4y - 2z)\vec{j} + x\vec{k}$, $\Sigma: z = x^2 + y^2, z = 9$.
- 5.4.2.24 $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$, $\Sigma: z = \sqrt{50 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- 5.4.2.25 $\vec{a} = (x + z)\vec{i} + (x + 2z)\vec{j} + (x + 3z)\vec{k}$, $\Sigma: z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}, z = -\sqrt{x^2 + y^2}$.
- 5.4.2.26 $\vec{a} = 2y\vec{i} + 2z\vec{j} + xy\vec{k}$, $\Sigma: z = 8 - x^2 - y^2, z^2 = x^2 + y^2$.
- 5.4.2.27 $\vec{a} = y^2\vec{i} + z\vec{j} + x^2\vec{k}$, $\Sigma: z = 18 - x^2 - y^2, z^2 = x^2 + y^2$.
- 5.4.2.28 $\vec{a} = (y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (y - x)\vec{k}$, $\Sigma: z = x^2 + y^2 + 2, x^2 + y^2 = 4, z = 0$.
- 5.4.2.29 $\vec{a} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$, $\Sigma: z = 40 - 5x^2 - 5y^2, z = 5x^2 + 5y^2$.
- 5.4.2.30 $\vec{a} = xyz\vec{i} + 3x\vec{j} + y\vec{k}$, $\Sigma: z = x, x^2 + y^2 = 9, z = 0, z \geq 0$.

6 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛЕЙ

Содержание: скалярные поля и их характеристики, векторные поля и их характеристики, поток и циркуляция векторного поля, потенциальные поля, потенциал векторного поля, соленоидальные поля, гармонические поля.

6.1 Теоретический материал по теме практического занятия

6.1.1 Дифференциальные характеристики полей

Если любой точке M из области Ω , по определенному правилу, сопоставляется некоторое действительное число $u(M)$, то говорят, что в данной области задано *скалярное поле*. Если любой точке M из области Ω , по определенному правилу, сопоставляется некоторый вектор $\vec{a}(M)$, то говорят, что в данной области задано *векторное поле*.

Предположим, задано пространственное скалярное поле, которое определяется функцией трех переменных $f(x; y; z)$. *Поверхностью уровня* называется поверхность, в любой точке которой поле принимает постоянное значение. Таким образом, поверхность уровня имеет уравнение: $f(x; y; z) = C$. Если скалярное поле плоское, то оно определяется функцией двух переменных $f(x; y)$, и в данном случае имеем *линию уровня*, в любой точке которой поле принимает постоянное значение: $f(x; y) = C$.

Скорость изменения поля в заданном направлении l определяется *производной функции* $f(x; y; z)$ по направлению вектора \vec{l} , которая вычисляется по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma, \quad (6.1.1.1)$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ – направляющие косинусы (координаты единичного вектора \vec{l}_0).

Направление и наибольшая скорость возрастания поля характеризуется *градиентом*, который представляет собой вектор:

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}. \quad (6.1.1.2)$$

Производная функции по направлению вектора и градиент функции являются дифференциальными характеристиками скалярного поля.

Определение 6.1.1.1 *Дивергенцией* векторного поля $\vec{a}(M)$ в точке M называется скалярная величина, равная пределу отношения потока векторного поля, через замкнутую поверхность Σ , внутри которого располагается точка M , к величине объёма тела, ограниченного данной поверхностью, при стягивании поверхности Σ в точку M .

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{\Sigma \rightarrow M \\ (\Delta V \rightarrow 0)}} \frac{\oiint_{\Sigma} a_n d\sigma}{\Delta V}. \quad (6.1.1.3)$$

Определение 6.1.1.2 Проекцией *ротора* векторного поля $\vec{a}(M)$ по направлению нормального вектора \vec{n} называется предел отношения циркуляции векторного поля по выбранной замкнутой кривой γ к площади $\Delta\sigma$ соответствующей поверхности, ограниченной данной кривой, при стягивании кривой γ в точку M .

$$\operatorname{rot} \vec{a}(M) = \lim_{\gamma \rightarrow M} \frac{\oint_{\gamma} a_{\tau} dl}{\Delta\sigma}. \quad (6.1.1.4)$$

Введём символический вектор ∇ (читается «набла»):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (6.1.1.5)$$

который называется оператором Гамильтона.

Выразим основные дифференциальные операции с помощью оператора Гамильтона.

Действие оператора на скалярную функцию u определяется по правилу

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}. \quad (6.1.1.6)$$

Рассмотрим векторное поле $\vec{a}(M) = P(x; y; z) \vec{i} + Q(x; y; z) \vec{j} + R(x; y; z) \vec{k}$.

$$\operatorname{div} \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (6.1.1.7)$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \quad (6.1.1.8)$$

6.1.2 Интегральные характеристики полей

Рассмотрим векторное поле $\vec{a}(M) = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k}$.

Определение 6.1.2.1 *Потоком* векторного поля $\vec{a}(x; y; z)$ через ориентируемую поверхность Σ называется поверхностный интеграл второго рода вектор-функции $\vec{a}(x; y; z)$ через заданную поверхность Σ .

$$\Pi = \iint_{\Sigma} a_n d\sigma = \iint_{\Sigma} P dydz + Q dx dz + R dx dy. \quad (6.1.2.1)$$

Определение 6.1.2.2 *Циркуляцией* векторного поля $\vec{a}(x; y; z)$ по замкнутому ориентируемому контуру γ называется криволинейный интеграл второго рода от данной вектор-функции по заданному ориентируемому контуру γ .

$$\mathcal{C} = \oint_{\gamma} a_{\tau} dl = \oint_{\gamma} P dx + Q dy + R dz. \quad (6.1.2.2)$$

Теорема Остроградского-Гаусса устанавливает связь между поверхностным интегралом второго рода через замкнутую поверхность и тройным интегралом по области, которую ограничивает данная замкнутая поверхность.

Теорема 6.1.2.1 Если векторное поле $\vec{a}(M)$ определено в замкнутой области Ω и имеет непрерывные частные производные от координат векторного поля, то поток векторного поля через внешнюю сторону гладкой замкнутой поверхности Σ , ограничивающую область Ω , равен тройному интегралу от дивергенции векторного поля по области Ω .

$$\Pi = \oiint_{\Sigma} a_n d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a}(M) dV. \quad (6.1.2.3)$$

Теорема Стокса устанавливает связь между поверхностным интегралом второго рода и криволинейным интегралом второго рода по замкнутому контуру.

Теорема 6.1.2.2 Если функции $P(x; y; z)$, $Q(x; y; z)$ и $R(x; y; z)$ векторного поля $\vec{a}(x; y; z)$ непрерывны вместе со своими частными производными, то поверхностный интеграл второго рода по поверхности Σ от проекции ротора $\text{rot}_n \vec{a}(M)$ на нормаль, равен циркуляции векторного поля вдоль контура γ , на который натянута данная поверхность, при соответствующей ориентации поверхности и направлении обхода контура.

$$\mathcal{C} = \oint_{\gamma} a_{\tau} dl = \iint_{\Sigma} \text{rot}_n \vec{a} d\sigma = \iint_{\Sigma} \text{rot} \vec{a} \vec{n} d\sigma. \quad (6.1.2.4)$$

Запишем формулу Стокса в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} P dx + Q dy + R dz = \\ = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned} \quad (6.1.2.5)$$

Пусть задано плоское поле $\vec{a}(x; y) = (P(x; y); Q(x; y))$. Частным случаем формулы Стокса является формула Грина.

$$\iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\gamma} P dx + Q dy. \quad (6.1.2.6)$$

6.1.3 Виды полей

Определение 6.1.3.1 Векторное поле $\vec{a}(M) = (P; Q; R)$ называется *потенциальным* в односвязной области Ω , если в каждой точке этой области ротор векторного поля равен нулю, то есть $\text{rot} \vec{a}(M) = 0$.

Потенциал векторного поля определяется по формуле

$$\varphi(x; y; z) = \int_{M_0 M} P dx + Q dy + R dz + C, \quad (6.1.3.1)$$

где $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – некоторая фиксированная точка области Ω , $M(x; y; z)$ – любая точка области Ω , а C – произвольная константа.

Из формулы (6.1.3.1) следует формула для вычисления криволинейного интеграла второго рода, не зависящего от пути интегрирования:

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz = \varphi(B) - \varphi(A), \quad (6.1.3.2)$$

где $\varphi(A)$ и $\varphi(B)$ – значение потенциала φ в начальной A и конечной B точках пути.

Определение 6.1.3.2 Векторное поле $\vec{a}(M) = (P; Q; R)$ называется *соленоидальным* в односвязной области Ω , если в каждой точке этой области дивергенция векторного поля равна нулю, то есть $\operatorname{div} \vec{a}(M) = 0$.

Определение 6.1.3.3 Векторное поле $\vec{a}(M) = (P; Q; R)$ называется *гармоническим* в односвязной области Ω , если поле является потенциальным и соленоидальным в этой области, то есть $\operatorname{rot} \vec{a}(M) = 0$ и $\operatorname{div} \vec{a}(M) = 0$.

6.2 Примеры решения типовых задач

6.2.1 Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M) = (x + y - z)\vec{i} + (2x + y + z)\vec{j} + (x - y + z)\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью $6x + 3y + 4z - 12 = 0$ и координатными плоскостями, двумя способами: 1) используя определение потока; б) с помощью формулы Остроградского-Гаусса.

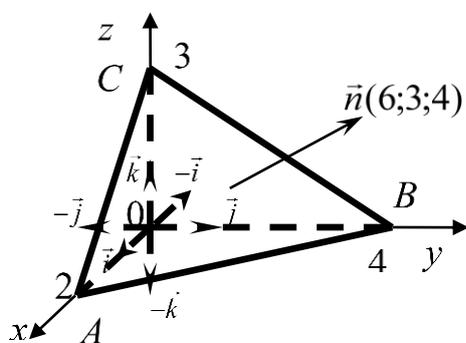


Рисунок 6.1 – Поток

Решение. 1. По определению поток векторного поля вычисляется с помощью поверхностного интеграла второго рода $\Pi = \iint_{\Sigma} \vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0 d\sigma$, где Σ – внешняя сторона поверхности пирамиды $OABC$ (рис. 6.1). Поток векторного поля через полную поверхность пирамиды $OABC$, в направлении внешней нормали, равен сумме потоков векторного поля через грани OAB , OBC , OAC и ABC :

$$\Pi_{OABC} = \Pi_{OAB} + \Pi_{OBC} + \Pi_{OAC} + \Pi_{ABC}.$$

Рассмотрим грань OAB , которая лежит в плоскости $z = 0$. Нормаль к этой грани $\vec{n}^0 = -\vec{k}$, $dS = dxdy$. Скалярное произведение векторного поля на нормальный единичный вектор равно

$$\vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0 = ((x + y)\vec{i} + (2x + y)\vec{j} + (x - y)\vec{k}) \cdot (-\vec{k}) = y - x.$$

Тогда поток векторного поля через грань OAB равен

$$\begin{aligned} \Pi_{OAB} &= \iint_{\Delta OAB} (y-x) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} (y-x) dy = \int_0^2 \left(\frac{y^2}{2} - xy \right) \Big|_0^{4-2x} dx = \int_0^2 (4x^2 - 12x + 8) dx = \\ &= \left(\frac{4}{3} x^3 - 6x^2 + 8x \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Рассмотрим грань OBC , которая лежит в плоскости $x=0$. Нормаль к этой грани $\vec{n}^0 = -\vec{i}$, $dS = dydz$. Скалярное произведение векторного поля на нормальный единичный вектор равно

$$\vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0 = \left((y-z)\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (z-y)\vec{k} \right) \cdot (-\vec{i}) = z-y.$$

Тогда поток векторного поля через грань OBC равен

$$\begin{aligned} \Pi_{OBC} &= \iint_{\Delta OBC} (z-y) dy dz = \int_0^4 dy \int_0^{3-\frac{3}{4}y} (z-y) dz = \int_0^4 \left(\frac{z^2}{2} - yz \right) \Big|_0^{3-\frac{3}{4}y} dy = \\ &= \int_0^4 \left(\frac{33}{32} y^2 - \frac{21}{4} y + \frac{9}{2} \right) dy = \left(\frac{11}{32} y^3 - \frac{21}{8} y^2 + \frac{9}{2} y \right) \Big|_0^4 = -2. \end{aligned}$$

Рассмотрим грань OAC , которая лежит в плоскости $y=0$. Нормаль к этой грани $\vec{n}^0 = -\vec{j}$, $dS = dx dz$. Скалярное произведение векторного поля на нормальный единичный вектор равно

$$\vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0 = \left((x-z)\vec{i} + (2x+z)\vec{j} + (x+z)\vec{k} \right) \cdot (-\vec{j}) = -2x-z.$$

Тогда поток векторного поля через грань OAC равен

$$\begin{aligned} \Pi_{OAC} &= - \iint_{\Delta OAC} (z+2x) dx dz = - \int_0^2 dx \int_0^{3-\frac{3}{2}x} (z+2x) dz = - \int_0^2 \left(\frac{z^2}{2} + 2xz \right) \Big|_0^{3-\frac{3}{2}x} dx \\ &= - \int_0^2 \left(-\frac{15}{8} x^2 + \frac{3}{2} x + \frac{9}{2} \right) dx = - \left(-\frac{5}{8} x^3 + \frac{3}{4} x^2 + \frac{9}{2} x \right) \Big|_0^2 = -7. \end{aligned}$$

Рассмотрим грань ABC , которая лежит в плоскости $6x+3y+4z-12=0$.

Нормаль к этой грани $\vec{n}^0 = \frac{6\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{36+9+16}} = \frac{6}{\sqrt{61}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{61}}\vec{j} + \frac{4}{\sqrt{61}}\vec{k}$. Найдем

$dS = \sqrt{1+z'_x{}^2+z'_y{}^2} dx dy$. По условию $z = 3 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}y$, следовательно, $z'_x = -\frac{3}{2}$,

$z'_y = -\frac{3}{4}$. Тогда $dS = \sqrt{1 + \frac{9}{4} + \frac{9}{16}} dx dy = \frac{\sqrt{61}}{4} dx dy$. Скалярное произведение векторного поля на нормальный единичный вектор равно

$$\vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0 = \left((x+y-z)\vec{i} + (2x+y+z)\vec{j} + (x-y+z)\vec{k} \right) \cdot \left(\frac{6}{\sqrt{61}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{61}}\vec{j} + \frac{4}{\sqrt{61}}\vec{k} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{61}} \left(15x + \frac{21}{2}y - 18 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}y + 9 - 2x - 7y + 12 \right) = \frac{1}{\sqrt{61}} \left(\frac{29}{2}x + \frac{17}{4}y + 3 \right).$$

Тогда поток векторного поля через грань ABC равен

$$\begin{aligned} \Pi_{ABC} &= \iint_{\Delta OAB} \frac{1}{\sqrt{61}} \left(\frac{29}{2}x + \frac{17}{4}y + 3 \right) \frac{\sqrt{61}}{4} dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} \left(\frac{29}{8}x + \frac{17}{16}y + \frac{3}{4} \right) dy = \\ &= \int_0^2 \left(\frac{29}{2}xy - \frac{17}{8}y^2 + 3 \right) \Big|_0^{4-2x} dx = \int_0^2 \left(-\frac{41}{8}x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{23}{2} \right) dx = \\ &= \left(-\frac{41}{24}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{23}{2}x \right) \Big|_0^2 = \frac{55}{3} \end{aligned}$$

Следовательно, поток векторного поля через внешнюю поверхность пирамиды равен

$$\Pi_{OABC} = \Pi_{OAB} + \Pi_{OBC} + \Pi_{OAC} + \Pi_{ABC} = \frac{8}{3} - 2 - 7 + \frac{55}{3} = 12.$$

2. Вычислим поток векторного поля через поверхность пирамиды $OABC$ по формуле Остроградского-Гаусса (6.1.2.3):

$$\Pi = \oiint_{\Sigma} a_n d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a}(M) dV = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Находим частные производные

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(x+y-z)}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial(2x+y+z)}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial(x-y+z)}{\partial z} = 1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Pi_{OABC} &= \iiint_{\Omega} (1+1+1) dx dy dz = 3 \iiint_{\Omega} dx dy dz = 3 \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} dy \int_0^{3-\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}y} dz = \\ &= 3 \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} z \Big|_0^{3-\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}y} dy = 3 \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} \left(3 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}y \right) dy = 3 \int_0^2 \left(3y - \frac{3}{2}xy - \frac{3}{8}y^2 \right) \Big|_0^{4-2x} dx = \\ &= 3 \int_0^2 \left(\frac{3}{2}x^2 - 6x + 6 \right) dx = 3 \left(\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 6x \right) \Big|_0^2 = 3(4 - 12 + 12) - 0 = 12. \end{aligned}$$

6.2.2 Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M) = (x+y-z)\vec{i} + (2x+y+z)\vec{j} + (x-y+z)\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $6x+3y+4z-12=0$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n}(6;3;4)$ этой плоскости двумя способами: 1) используя определение циркуляции; 2) с помощью формулы Стокса.

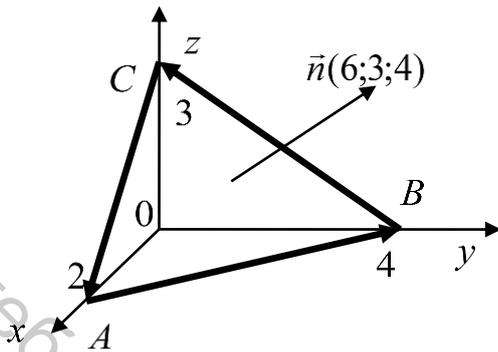


Рисунок 6.2 – Циркуляция

Решение. В результате пересечения плоскости π с координатными плоскостями получим треугольник ABC (рис. 6.2) и укажем на нём положительное направление обхода контура $ABCA$ в соответствии с условием задачи.

1. Вычислим циркуляцию векторного поля по формуле (6.1.2.2): $\mathcal{C} = \oint_{\gamma} a_{\tau} dl = \oint_{\gamma} \vec{a} \cdot \vec{dl}$. Используя свойство

аддитивности области интегрирования,

получаем, что циркуляция по указанному контуру $ABCA$ равна

$$\mathcal{C} = \oint_{ABCA} \vec{a} \cdot \vec{dl} = \int_{AB} \vec{a} \cdot \vec{dl} + \int_{BC} \vec{a} \cdot \vec{dl} + \int_{CA} \vec{a} \cdot \vec{dl}.$$

На отрезке AB получаем: $z = 0$, $y = 4 - 2x$, $dy = -2dx$, x лежит от 2 до 0, $\vec{dl} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j}$, векторное поле $\vec{a}(M) = (x + y)\vec{i} + (2x + y)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$, скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{dl} = (x + y)dx + (2x + y)dy$,

$$\begin{aligned} \int_{AB} \vec{a} \cdot \vec{dl} &= \int_{AB} (x + y)dx + (2x + y)dy = \int_2^0 (x + 4 - 2x)dx + (2x + 4 - 2x) \cdot (-2)dx = \\ &= \int_2^0 (-x - 4)dx = \left(-\frac{x^2}{2} - 4x \right) \Big|_2^0 = 0 - (-2 - 8) = 10. \end{aligned}$$

На отрезке BC получаем: $x = 0$, $z = 3 - \frac{3}{4}y$, $dz = -\frac{3}{4}dy$, y лежит от 4 до 0, $\vec{dl} = dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$, векторное поле $\vec{a}(M) = (y - z)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (z - y)\vec{k}$, скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{dl} = (y + z)dy + (z - y)dz$,

$$\begin{aligned} \int_{BC} \vec{a} \cdot \vec{dl} &= \int_{BC} (y + z)dy + (z - y)dz = \int_4^0 \left(y + 3 - \frac{3}{4}y \right) dy + \left(3 - \frac{3}{4}y - y \right) \cdot \left(-\frac{3}{4} \right) dy = \\ &= \int_4^0 \left(\frac{25}{16}y + \frac{3}{4} \right) dy = \left(\frac{25}{32}y^2 + \frac{3}{4}y \right) \Big|_4^0 = 0 - \left(\frac{25}{2} + 3 \right) = -\frac{31}{2}. \end{aligned}$$

На отрезке CA получаем: $y = 0$, $z = 3 - \frac{3}{2}x$, $dz = -\frac{3}{2}dx$, x лежит от 0 до 2, $\vec{dl} = dx \cdot \vec{i} + dz \cdot \vec{k}$, векторное поле $\vec{a}(M) = (x - z)\vec{i} + (2x + z)\vec{j} + (x + z)\vec{k}$, скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{dl} = (x - z)dx + (x + z)dz$,

$$\int_{CA} \vec{a} \cdot \vec{dl} = \int_{CA} (x - z)dx + (x + z)dz = \int_0^2 \left(x - 3 + \frac{3}{2}x \right) dx + \left(x + 3 - \frac{3}{2}x \right) \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) dx =$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{13}{4}x - \frac{15}{2} \right) dx = \left(\frac{13}{8}x^2 - \frac{15}{2}x \right) \Big|_0^2 = \left(\frac{13}{2} - 15 \right) - 0 = -\frac{17}{2}.$$

Следовательно, $\mathcal{C} = 10 - \frac{31}{2} - \frac{17}{2} = -14$.

2. Вычислим циркуляцию данного поля с помощью формулы Стокса (6.1.2.4). Для этого определим ротор векторного поля

$$\operatorname{rot} \vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+y-z & 2x+y+z & x-y+z \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}.$$

Нормальный единичный вектор заданной плоскости имеет вид $\vec{n}^0 = \frac{6}{\sqrt{61}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{61}}\vec{j} + \frac{4}{\sqrt{61}}\vec{k}$. Тогда

$$\operatorname{rot} \vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0 = (-2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) \cdot \left(\frac{6}{\sqrt{61}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{61}}\vec{j} + \frac{4}{\sqrt{61}}\vec{k} \right) = -\frac{14}{\sqrt{61}}.$$

Элемент площади равен $dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy = \frac{\sqrt{61}}{4} dx dy$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \iint_{\sigma} \left(-\frac{14}{\sqrt{61}} \right) dS = \iint_{OAB} \left(-\frac{14}{\sqrt{61}} \cdot \frac{\sqrt{61}}{4} \right) dx dy = -\frac{7}{2} \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} dy = \\ &= -\frac{7}{2} \int_0^2 y \Big|_0^{4-2x} dx = -\frac{7}{2} \int_0^2 (4-2x) dx = -\frac{7}{2} (4x - x^2) \Big|_0^2 = -\frac{7}{2} \cdot (8-4) + \frac{7}{2} \cdot 0 = -14. \end{aligned}$$

6.2.3 Проверить, является ли векторное поле $\vec{F}(M)$ потенциальным. В случае потенциальности поля найти его потенциал, если $\vec{F}(M) = (3yz + x^2)\vec{i} + (2y^2 + 3xz)\vec{j} + (z^2 + 3xy)\vec{k}$. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по линии, соединяющей точки $A(1;1;3)$ и $B(6;3;9)$.

Решение. Найдём ротор векторного поля $\vec{F}(M)$.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{a}(M) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3yz + x^2 & 2y^2 + 3xz & z^2 + 3xy \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(z^2 + 3xy)}{\partial y} - \frac{\partial(2y^2 + 3xz)}{\partial z} \right) \vec{i} - \\ &- \left(\frac{\partial(z^2 + 3xy)}{\partial x} - \frac{\partial(3yz + x^2)}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial(2y^2 + 3xz)}{\partial x} - \frac{\partial(3yz + x^2)}{\partial y} \right) \vec{k} = \end{aligned}$$

$$= (3x - 3x)\vec{i} - (3y - 3y)\vec{j} + (3z - 3z)\vec{k} = \vec{0}.$$

Ротор векторного поля $\vec{F}(M)$ равен нулю, следовательно, поле является потенциальным. Найдём потенциал $\varphi(x; y; z)$ векторного поля.

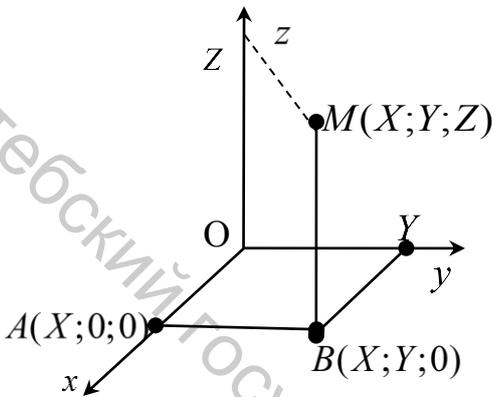


Рисунок 6.3 – Потенциал

Так как функции $P(x; y; z) = 3yz + x^2$, $Q(x; y; z) = 2y^2 + 3xz$ и $R(x; y; z) = z^2 + 3xy$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные во всех точках пространства R^3 , то в качестве точки M_0 выберем начало координат $O(0; 0; 0)$, а в качестве точки $M(X; Y; Z)$ – произвольную точку пространства R^3 (рис. 6.3). Криволинейный интеграл второго рода не зависит от формы пути интегрирования, поэтому его можно вычислять по любой ломаной кривой, например, по кривой $OABM$. Следовательно, потенциал векторного поля $\vec{F}(M) = (3yz + x^2)\vec{i} + (2y^2 + 3xz)\vec{j} + (z^2 + 3xy)\vec{k}$ равен:

$$\begin{aligned} \varphi(X; Y; Z) &= \int_{OM} (3yz + x^2)dx + (2y^2 + 3xz)dy + (z^2 + 3xy)dz + C = \int_{OA} \dots + \int_{AB} \dots + \\ &+ \int_{BM} \dots + C = \left[\begin{array}{l} OA: y = 0, z = 0, dy = 0, dz = 0, 0 \leq x \leq X, \\ OB: x = X, z = 0, dx = 0, dz = 0, 0 \leq y \leq Y, \\ OC: x = X, y = Y, dx = 0, dy = 0, 0 \leq z \leq Z, \end{array} \right] = \int_0^X x^2 dx + \int_0^Y 2y^2 dy + \\ &+ \int_0^Z (z^2 + 3XY)dz + C = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^X + \left. \frac{2y^3}{3} \right|_0^Y + \left. \left(\frac{z^3}{3} + 3XYZ \right) \right|_0^Z + C = \\ &= X^3/3 + 2Z^3/3 + Z^3/3 + 3XYZ + C. \end{aligned}$$

Заменяя в последнем равенстве X, Y, Z на произвольные переменные x, y, z , записываем выражение для потенциала векторного поля: $\varphi(x; y; z) = x^3/3 + 2y^3/3 + z^3/3 + 3xyz + C$.

В потенциальном поле криволинейный интеграл второго рода не зависит от формы пути интегрирования. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{AB} (3yz + x^2)dx + (2y^2 + 3xz)dy + (z^2 + 3xy)dz &= \varphi(B) - \varphi(A) = \\ &= \frac{6^3}{3} + \frac{2 \cdot 3^3}{3} + \frac{9^3}{3} + 3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 9 - \frac{1^3}{3} - \frac{2 \cdot 1^3}{3} - \frac{3^3}{3} - 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 = 576 - 19 = 557. \end{aligned}$$

6.3 Задания для решения на практическом занятии

6.3.1 Вычислить производную функции $u = \ln(3 - x^2) + x \cdot y^2 \cdot z$ в точке $A(1;3;2)$ по направлению к точке $B(4;7;14)$.

6.3.2 Найти градиент функции $u = x^2 yz - xy^2 z + xyz^2$ в точке.

6.3.3 Вычислить дивергенцию векторного поля $\vec{F}(M) = x^2 z \vec{i} + xy^3 \vec{j} - xz^4 \vec{k}$ в точке $M_0(-2;1;2)$.

6.3.4 Найти ротор векторного поля $\vec{a}(M) = x^2 yz \vec{i} + xzy^3 \vec{j} + 2xy^2 z^3 \vec{k}$ в точке $M_0(3;2;1)$.

6.3.5 Найти градиент от дивергенции векторного поля $\vec{a} = (x^3; y^3; z^3)$.

6.3.6 Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M) = (x - y) \vec{i} + (x + y) \vec{j} + z^2 \vec{k}$ через поверхность цилиндрического тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ и $z = 2$, в направлении внешней нормали.

6.3.7 Найти поток векторного поля $\vec{a}(M) = x \vec{i} - 2y \vec{j} - z \vec{k}$ через замкнутую поверхность Σ , ограниченную поверхностями $z = 1 - x^2 - y^2$ и $z = 0$, в направлении внешней нормали.

6.3.8 Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M) = z \vec{i} + (x + y) \vec{j} + y \vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью $\pi: 2x + y + 2z = 2$ и координатными плоскостями, двумя способами: 1) используя определение потока; б) с помощью формулы Остроградского-Гаусса.

6.3.9 Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M) = z^2 \vec{i} + x^2 \vec{j} + y^2 \vec{k}$ по сечению сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ плоскостью $x + y + z = 2$ в положительном направлении обхода относительно нормального вектора плоскости.

6.3.10 Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M) = zy^2 \vec{i} + xz^2 \vec{j} + yx^2 \vec{k}$ по контуру пересечения параболоида $y = x^2 + z^2$ плоскостью $y = 16$ в положительном направлении обхода относительно орта \vec{j} .

6.3.11 Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a} = 3x \vec{i} + (y + z) \vec{j} + (x - z) \vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $x + 3y + z = 3$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора этой плоскости двумя способами: 1) используя определение циркуляции; 2) с помощью формулы Стокса.

6.3.12 Найти потенциал φ векторного поля $\vec{a}(M) = yz \vec{i} + xz \vec{j} + (xy + 1) \vec{k}$ и вычислить криволинейный интеграл $\int_{(1;1;1)}^{(2;3;4)} yz dx + xz dy + (xy + 1) dz$.

6.3.13 Проверить, является ли векторное поле $\vec{F}(M) = 2xyzi\vec{i} + x^2zj\vec{j} + x^2yk\vec{k}$ потенциальным. В случае потенциальности поля найти его потенциал. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по дуге линии, соединяющей точки $A(1; -1; 2)$ и $B(-2; 4; 2)$.

6.3.14 Проверить, является ли векторное поле $\vec{a}(M) = 3x^2yi\vec{i} - 2xy^2j\vec{j} - 2xyzk\vec{k}$ соленоидальным.

6.3.15 Проверить, является ли векторное поле $a(M) = 3yzi\vec{i} + 3xzj\vec{j} + 3xyk\vec{k}$ гармоническим. Если поле гармоническое, то найти его потенциал.

6.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

6.4.1 Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью π и координатными плоскостями, двумя способами: 1) используя определение потока; б) с помощью формулы Остроградского-Гаусса.

6.4.1.1 $\vec{a}(M) = (x - z)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (2x - y + 2z)\vec{k}, \quad \pi: x + 2y + 3z = 6.$

6.4.1.2 $\vec{a}(M) = (3x - 2z)\vec{i} + (2y - 4z)\vec{j} + (x - 5y + z)\vec{k}, \quad \pi: 2x - 3y + 4z = 12.$

6.4.1.3 $\vec{a}(M) = (x + 2y - z)\vec{i} + (4x + 2z)\vec{j} + (3x - 2y + 3z)\vec{k}, \quad \pi: 2x + 3y - 5z = 30.$

6.4.1.4 $\vec{a}(M) = (5x + 4y)\vec{i} + (x - 2y - 3z)\vec{j} + (3x + 4z)\vec{k}, \quad \pi: -3x + 4y + 6z = 12.$

6.4.1.5 $\vec{a}(M) = (2y + 5z)\vec{i} + (3y - 3z)\vec{j} + (2x - y)\vec{k}, \quad \pi: 2x - 4y - 5z = 20.$

6.4.1.6 $\vec{a}(M) = (3x - 4y)\vec{i} + (2x - z)\vec{j} + (3x - 2y + z)\vec{k}, \quad \pi: -3x + 2y - 7z = 42.$

6.4.1.7 $\vec{a}(M) = x\vec{i} + (y - 2z)\vec{j} + (-x - y + 3z)\vec{k}, \quad \pi: -x - 3y + 5z = 15.$

6.4.1.8 $\vec{a}(M) = (2x + 4z)\vec{i} + (x - 4y + z)\vec{j} + (2x - 3y + z)\vec{k}, \quad \pi: x + 2y + 3z = -12.$

6.4.1.9 $\vec{a}(M) = (3x - 2z)\vec{i} + (4y + 5z)\vec{j} + (6x - 2y + z)\vec{k}, \quad \pi: 2x + 3y + 6z = 18.$

6.4.1.10 $\vec{a}(M) = (2x - 3z)\vec{i} + (4y - 2z)\vec{j} + (2x - 3y + 7z)\vec{k}, \quad \pi: 5x - 4y + 2z = 20.$

6.4.1.11 $\vec{a}(M) = (x + 3y - 2z)\vec{i} + (2x + 3z)\vec{j} + (2x - 3y + 4z)\vec{k}, \quad \pi: 6x + y - 2z = 6.$

6.4.1.12 $\vec{a}(M) = (4x + 5y)\vec{i} + (3x - y - 2z)\vec{j} + (4x + 3z)\vec{k}, \quad \pi: -4x + 2y + 5z = 20.$

6.4.1.13 $\vec{a}(M) = (5y + 6z)\vec{i} + (7y - 4z)\vec{j} + (x - 2y)\vec{k}, \quad \pi: 3x - 5y - 6z = 30.$

6.4.1.14 $\vec{a}(M) = (4x - y)\vec{i} + (3x - y)\vec{j} + (2x - 2y + 3z)\vec{k}, \quad \pi: -4x + 7y - 7z = 28.$

6.4.1.15 $\vec{a}(M) = 2y\vec{i} + (z - 2y)\vec{j} + (3x - y + 2z)\vec{k}, \quad \pi: -3x - 4y + 6z = 12.$

6.4.1.16 $\vec{a}(M) = (3x - 4z)\vec{i} + (2x - 4y + 3z)\vec{j} + (x - 4y + 3z)\vec{k}, \quad \pi: 2x + 4y + 5z = 40.$

6.4.1.17 $\vec{a}(M) = (4x - 5z)\vec{i} + (3y + 2z)\vec{j} + (3x - 2y + z)\vec{k}, \quad \pi: 3x + y + 5z = 15.$

6.4.1.18 $\vec{a}(M) = (3x - 2z)\vec{i} + (2y + 3z)\vec{j} + (3x + 2y + z)\vec{k}, \quad \pi: x - 2y + 3z = 6.$

$$6.4.1.19 \quad \vec{a}(M) = (3x + 2y + z)\vec{i} + (2x + 3z)\vec{j} + (x - y + z)\vec{k}, \quad \pi: 4x + 5y - 8z = 40.$$

$$6.4.1.20 \quad \vec{a}(M) = (6x + 3y)\vec{i} + (2x - 5y - z)\vec{j} + (4x + 5z)\vec{k}, \quad \pi: -4x + y + 2z = 4.$$

$$6.4.1.21 \quad \vec{a}(M) = (2y + 3z)\vec{i} + (3y - 7z)\vec{j} + (3x - 2y)\vec{k}, \quad \pi: 3x - 4y - 5z = 60.$$

$$6.4.1.22 \quad \vec{a}(M) = (x - y)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (x - y - z)\vec{k}, \quad \pi: -2x + 4y - 3z = 24.$$

$$6.4.1.23 \quad \vec{a}(M) = 3z\vec{i} + (2y - z)\vec{j} + (-3x - 3y + z)\vec{k}, \quad \pi: -2x - 5y + 10z = 10.$$

$$6.4.1.24 \quad \vec{a}(M) = (3x + 5z)\vec{i} + (6x - 3y + 2z)\vec{j} + (x - y + z)\vec{k}, \quad \pi: 2x + 2y + 3z = -18.$$

$$6.4.1.25 \quad \vec{a}(M) = (4x - 5z)\vec{i} + (4y + z)\vec{j} + (3x - y + z)\vec{k}, \quad \pi: 3x + 2y + 3z = 24.$$

$$6.4.1.26 \quad \vec{a}(M) = (2x - 5z)\vec{i} + (5y - 2z)\vec{j} + (3x - 2y + z)\vec{k}, \quad \pi: 3x - 4y + 2z = 12.$$

$$6.4.1.27 \quad \vec{a}(M) = (4x + 2y - 3z)\vec{i} + (5x + 6z)\vec{j} + (2x - y + 2z)\vec{k}, \quad \pi: 3x + 4y - z = 24.$$

$$6.4.1.28 \quad \vec{a}(M) = (x + 3y)\vec{i} + (2x - 3y - 4z)\vec{j} + (5x + z)\vec{k}, \quad \pi: -4x + 5y + z = 20.$$

$$6.4.1.29 \quad \vec{a}(M) = (2x - 3z)\vec{i} + (y - 4z)\vec{j} + (3x - 2y)\vec{k}, \quad \pi: 12x - 4y - 5z = 60.$$

$$6.4.1.30 \quad \vec{a}(M) = (4x - 3y)\vec{i} + (3x - 2z)\vec{j} + (x - y + 3z)\vec{k}, \quad \pi: -6x + 4y - 3z = 24.$$

6.4.2 Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n}(A; B; C)$ этой плоскости двумя способами: 1) используя определение циркуляции; 2) с помощью формулы Стокса. **Указание:** векторное поле $\vec{a}(M)$ и уравнение плоскости π для каждого варианта приведены в задаче 6.4.1.

6.4.3 Проверить, является ли векторное поле $\vec{F}(M)$ потенциальным, соленоидальным и гармоническим. В случае потенциальности поля найти его потенциал.

$$6.4.3.1 \quad \vec{a}(M) = (2xy - 2yz)\vec{i} + (x^2 - 2xz)\vec{j} + (z^2 - 2xy)\vec{k}.$$

$$6.4.3.2 \quad \vec{a}(M) = (x + z)\vec{i} + 2yz\vec{j} + (x + y^2)\vec{k}.$$

$$6.4.3.3 \quad \vec{a}(M) = (2xy + 2xz)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j} + (z^2 + x^2)\vec{k}.$$

$$6.4.3.4 \quad \vec{a}(M) = (x + z^2)\vec{i} + 2yz\vec{j} + (y^2 - 2xz)\vec{k}.$$

$$6.4.3.5 \quad \vec{a}(M) = (3yz + 2x)\vec{i} + (3xz + 2yz^2)\vec{j} + (2y^2z + 3xy)\vec{k}.$$

$$6.4.3.6 \quad \vec{a}(M) = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}.$$

$$6.4.3.7 \quad \vec{a}(M) = (y^2z - yz^2)\vec{i} + (2xyz - xz^2)\vec{j} + (xy^2 - 2xyz)\vec{k}.$$

$$6.4.3.8 \quad \vec{a}(M) = -2yz\vec{i} + (2yz - 2xz)\vec{j} + (y^2 - 2xy)\vec{k}.$$

$$6.4.3.9 \quad \vec{a}(M) = 4yz\vec{i} + (z^2 + 4xz)\vec{j} + (2yz + 4xy)\vec{k}.$$

$$6.4.3.10 \quad \vec{a}(M) = (y + z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}.$$

$$6.4.3.11 \quad \vec{a}(M) = -yz\vec{i} + (yz^2 - xz)\vec{j} + (y^2z - xy)\vec{k}.$$

- 6.4.3.12 $\vec{a}(M) = 4yz\vec{i} + (4xz - yz^2)\vec{j} + (4xy - zy^2)\vec{k}$.
- 6.4.3.13 $\vec{a}(M) = (3x + yz)\vec{i} + (3y^2z - z^3 + xz)\vec{j} + (y^3 - 3yz^2 + xy)\vec{k}$.
- 6.4.3.14 $\vec{a}(M) = (2xy - 2yz)\vec{i} + (x^2 - 2xz)\vec{j} + (z^2 - 2xy)\vec{k}$.
- 6.4.3.15 $\vec{a}(M) = (yz + 2)\vec{i} + (xz - 1)\vec{j} + (xy - 3)\vec{k}$.
- 6.4.3.16 $\vec{a}(M) = 2yz\vec{i} + (2yz - z^2 + 2xz)\vec{j} + (2xy + y^2 - 2yz)\vec{k}$.
- 6.4.3.17 $\vec{a}(M) = (4yz + 4)\vec{i} + (yz^2 + 4xz)\vec{j} + (4xy + y^2z)\vec{k}$.
- 6.4.3.18 $\vec{a}(M) = 2yz\vec{i} + (2xz + 2yz)\vec{j} + (y^2 + 2xy)\vec{k}$.
- 6.4.3.19 $\vec{a}(M) = -x^2\vec{i} + 2yz\vec{j} + y^2\vec{k}$.
- 6.4.3.20 $\vec{a}(M) = (3 - y - z)\vec{i} + (4 - x - z)\vec{j} + (5 - x - y)\vec{k}$.
- 6.4.3.21 $\vec{a}(M) = (y^2z + 2yz^2)\vec{i} + (2xyz + 2xz^2)\vec{j} + (xy^2 + 4xyz)\vec{k}$.
- 6.4.3.22 $\vec{a}(M) = -y^2z\vec{i} + (z^2 - 2xyz)\vec{j} + (2yz - xy^2)\vec{k}$.
- 6.4.3.23 $\vec{a}(M) = (y^2z^2 - y^3z)\vec{i} + (2xyz^2 - 3xy^2z)\vec{j} + (2xy^2z - xy^3)\vec{k}$.
- 6.4.3.24 $\vec{a}(M) = yz\vec{i} + (xz + 2yz + 2z^2)\vec{j} + (xy + y^2 + 4yz)\vec{k}$.
- 6.4.3.25 $\vec{a}(M) = (1 - yz)\vec{i} + (2 - xz)\vec{j} + (3 - xy)\vec{k}$.
- 6.4.3.26 $\vec{a}(M) = 2yz\vec{i} + (3yz^2 + 2xz)\vec{j} + (3y^2z + 2xy)\vec{k}$.
- 6.4.3.27 $\vec{a}(M) = 2xyz\vec{i} + (x^2z + 3y^2z + z^3)\vec{j} + (x^2y + y^3z + 3yz^2)\vec{k}$.
- 6.4.3.28 $\vec{a}(M) = (7 + yz)\vec{i} + (2 + xz)\vec{j} + (5 + xy)\vec{k}$.
- 6.4.3.29 $\vec{a}(M) = yz\vec{i} + (xz - 2yz + z^2)\vec{j} + (xy - y^2 + 2yz)\vec{k}$.
- 6.4.3.30 $\vec{a}(M) = (5 + 2y + 2z)\vec{i} + (7 + 2x + 2z)\vec{j} + (4 + 2x + 2y)\vec{k}$.

7 ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Содержание: определение числового ряда, частичная сумма ряда, сходимость ряда, необходимый и достаточный признаки сходимости ряда, свойства сходящихся рядов, необходимое и достаточное условия сходимости рядов с положительными членами, достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами (признак сравнения, предельный признак сравнения, признак Даламбера, радикальный признак Коши).

7.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Рассмотрим числовую последовательность $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, где $a_n = f(n)$ – функция натуральных чисел.

Определение 7.1.1 *Бесконечным числовым рядом* называется выражение вида $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$, где $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ некоторые действительные или комплексные числа, которые называются членами ряда, а $a_n = f(n)$ – общим или n -м членом ряда.

Ряд считается вполне определённым, если задан общий член ряда. Числовой ряд часто записывают в виде $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Например, гармонический ряд имеет вид: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$, а геометрический ряд может быть записан в виде $\sum_{n=1}^{\infty} bq^{n-1} = b + bq + bq^2 + \dots + bq^{n-1} + \dots$, где b и q – числа, отличные от нуля.

Определение 7.1.2 Сумма конечного числа первых членов ряда называется *частичной суммой* ряда.

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ – n частичная сумма ряда.

Частичные суммы ряда представляют числовую последовательность.

Определение 7.1.3 Числовой ряд называется *сходящимся*, если существует предел последовательности частичных сумм ряда, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, при этом число S называется суммой ряда. Если указанный предел не существует или, в частности, равен бесконечности, то ряд называется *расходящимся*.

Пример 7.1.1 *Гармонический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится.

Пример 7.1.2 *Обобщённый гармонический ряд (ряд Дирихле)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ – расходится, если $\alpha \leq 1$, и сходится, если $\alpha > 1$. Сумма обобщённого гармонического ряда порядка α равна значению дзета-функции Римана $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. Для чётных чисел α значение выражается через число π , например $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, а для $\alpha = 3$ его значение аналитически неизвестно.

Пример 7.1.3 *Геометрический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} bq^{n-1}$ – расходится, если $|q| \geq 1$, и сходится, если $|q| < 1$, а его сумма равна $S = \frac{b}{1-q}$.

Теорема 7.1.1 (необходимый признак сходимости ряда). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то предел n -го члена равен нулю, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Этот признак является необходимым, но не достаточным, так, например, гармонический ряд расходится, но предел n -го члена равен нулю.

Теорема 7.1.2 (достаточный признак расходимости ряда). Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится.

Сформулируем основные свойства числовых рядов:

1) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна числу S , то будет сходиться ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$, причём сумма последнего ряда равна αS ;

2) если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и их суммы равны S и σ , соответственно, то будет сходиться ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$, причём сумма последнего ряда равна $S \pm \sigma$;

3) сходимость или расходимость числового ряда не изменится, если в нём приписать или отбросить конечное число слагаемых.

Рассмотрим ряды с положительными членами.

Теорема 7.1.3 Для того, чтобы числовой ряд с положительными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена.

Перечислим основные достаточные признаки сходимости и расходимости рядов с положительными членами.

Теорема 7.1.4 (признак сравнения). Пусть дан ряд (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и ряд (2) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, причём для каждого члена рядов выполняется неравенство $0 < a_n \leq b_n$.

Тогда из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1). Из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

Признак остаётся в силе, если соответствующее неравенство выполняется не с первых членов ряда, а лишь начиная с некоторого члена N .

Теорема 7.1.5 (предельный признак сравнения). Пусть дан ряд (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и ряд (2) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ ($c \neq 0, c \neq \infty$). Тогда ряды сходятся и расходятся одновременно. Если $c = 0$, то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1). Если $c \rightarrow \infty$, то из расходимости ряда (2) следует расходимость ряда (1).

Теорема 7.1.6 (предельный признак Даламбера). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с

положительными членами и существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Тогда

- 1) если $l < 1$, ряд сходится;
- 2) если $l > 1$, ряд расходится;
- 3) если $l = 1$, сомнительный случай, требуются дополнительные исследования.

Теорема 7.1.7 (предельный радикальный признак Коши). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами и существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Тогда

- 1) если $l < 1$, ряд сходится;
- 2) если $l > 1$, ряд расходится;
- 3) если $l = 1$, сомнительный случай, требуются дополнительные исследования.

Экономические приложения числовых рядов

Формула наращенной суммы по дискретно изменяющимся процентным ставкам (нормам). Если P – первоначальная сумма, r_j ($j = \overline{1, k}$) – j -я ставка, действующая t_j времени, то итоговая сумма равна:

$$S = P(1 + r_1 t_1 + r_2 t_2 + \dots + r_k t_k) = P(1 + \sum_{j=1}^k r_j t_j).$$

Множитель наращения в этом случае равен: $\mu = 1 + \sum_{j=1}^k r_j t_j$.

7.2 Примеры решения типовых задач

7.2.1 Написать первые четыре члена ряда, общий член которого задан формулой $a_n = (-1)^{n-1} n^2$.

Решение. Полагая в данной формуле $n = 1, 2, 3, 4$, находим первые четыре члена числового ряда: $a_1 = (-1)^{1-1} 1^2 = 1$, $a_2 = (-1)^{2-1} 2^2 = -4$, $a_3 = (-1)^{3-1} 3^2 = 9$, $a_4 = (-1)^{4-1} 4^2 = -16$. Таким образом, данный числовой ряд можно записать в виде $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot n^2 = 1 - 4 + 9 - 16 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 + \dots$

7.2.2 Найти общий член ряда $2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{2}{81} + \frac{4}{243} + \dots$, считая, что последующие члены подчиняются тому же закону, по которому образованы первые члены ряда.

Решение. Каждый член ряда представляет собой дробь, числитель которой равен двойке для членов с нечётными номерами и четырём для членов с чётными номерами, а знаменатель – соответствующей степени числа три. Следовательно, числитель можно представить формулой $3 + (-1)^n$, а знаменатель – формулой 3^{n-1} , поэтому формула n -го члена ряда имеет вид: $a_n = \frac{3 + (-1)^n}{3^{n-1}}$.

7.2.3 Найти сумму ряда $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots$

Решение. Составим n -ю частичную сумму данного ряда:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)}.$$

Чтобы упростить выражение для частичной суммы S_n , преобразуем формулу для общего члена ряда, разлагая a_n на элементарные дроби. Положим

$$\frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1},$$

отсюда

$$\frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{(2A+2B)n + (A-B)}{(2n-1) \cdot (2n+1)}.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях n в числителях обеих частей равенства, получаем: $2A+2B=0$, $A-B=1$, откуда $A=1/2$, $B=-1/2$.

Поэтому n -й член ряда имеет вид

$$a_n = \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right).$$

Запишем n -ю частичную сумму данного ряда и преобразуем её:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right). \end{aligned}$$

Поскольку $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$, то данный ряд сходится и его сумма равна $S = 1/2$.

7.2.4 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3n-7}$.

Решение. Воспользуемся достаточным признаком расходимости ряда.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+5}{3n-7} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+5/n}{3-7/n} = \frac{2}{3} \neq 0.$$

Согласно теореме 7.1.2 ряд расходится.

7.2.5 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^n}$.

Решение. Воспользуемся признаком сравнения. Так как для геометрического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ значение $q = \frac{1}{5} < 1$, то он сходится. Для установления сходимости ряда используем неравенство $a_n = \frac{1}{n \cdot 5^n} \leq \frac{1}{5^n} = b_n$. Согласно признаку

сравнения (теорема 7.1.4) исходный ряд сходится.

7.2.6 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 1}{3n^3 + 2n^2 - 4}$.

Решение. Воспользуемся предельным признаком сравнения, сравнив исходный ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^2 - 1}{3n^3 + 2n^2 - 4}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - n}{3n^3 + 2n^2 - 4} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n^2}}{3 + 2\frac{1}{n} - \frac{4}{n^3}} = \frac{2}{3} \quad \left(\begin{array}{l} \neq 0; \\ \neq \infty \end{array} \right).$$

На основании предельного признака сравнения (теорема 7.1.5) ряды сходятся и расходятся одновременно, следовательно, исходный ряд расходится.

7.2.7 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 - n + 5}{n^6 + 3n^4 - 2}$.

Решение. Воспользуемся предельным признаком сравнения, сравнив исходный ряд с обобщённо гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ ($p = 4 > 1$).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4n^2 - n + 5}{n^6 + 3n^4 - 2}}{\frac{1}{n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^6 - n^5 + 5n^4}{n^6 + 3n^4 - 2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^2} - \frac{2}{n^6}} = 4 \quad \left(\begin{array}{l} \neq 0; \\ \neq \infty \end{array} \right).$$

На основании предельного признака сравнения (теорема 7.1.5) ряды сходятся и расходятся одновременно, следовательно, исходный ряд сходится.

7.2.8 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3^n(2n+1)}$.

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5^{n+1}}{3^{n+1}(2n+3)}}{\frac{5^n}{3^n(2n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} \cdot 3^n \cdot (2n+1)}{5^n \cdot 3^{n+1} \cdot (2n+3)} = \frac{5}{3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} = \frac{5}{3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{5}{3} > 1.$$

На основании признака Даламбера (теорема 7.1.6) ряд расходится.

7.2.9 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n!}$.

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n+5}{(n+1)!}}{\frac{3n+2}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot (3n+5)}{(n+1)! \cdot (3n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+5}{3n^2+5n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}}{3 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}} = 0 < 1.$$

На основании признака Даламбера (теорема 7.1.6) ряд сходится.

7.2.10 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \arccos^n \frac{\sqrt{3}n+5}{2n+12}$.

Решение. Воспользуемся радикальным признаком Коши (теорема 7.1.7).

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\arccos^n \frac{\sqrt{3}n+5}{2n+12}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \arccos \frac{\sqrt{3}n+5}{2n+12} = \\ &= \left(\arccos \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \arccos \frac{\sqrt{3} + 5/n}{2 + 12/n} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} < 1. \end{aligned}$$

На основании радикального признака Коши ряд сходится.

7.2.11 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{3n+5}{3n+1} \right)^{3n^2/4}$.

Решение. Воспользуемся радикальным признаком Коши (теорема 7.1.7).

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} \cdot \left(\frac{3n+5}{3n+1} \right)^{3n^2/4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3n+5}{3n+1} \right)^{3n/4} = (1^\infty) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3n+5}{3n+1} - 1 \right)^{3n/4} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3n+5-3n-1}{3n+1} \right)^{3n/4} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{3n+1} \right)^{3n/4} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{(3n+1)/4} \right)^{\frac{4 \cdot 3n}{3n+1}} \right)^{1/4} = \frac{1}{2} \cdot e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{3n+1}} = \frac{1}{2} \cdot e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{3+1/n}} = \frac{1}{2} \cdot e > 1. \end{aligned}$$

На основании радикального признака Коши ряд расходится.

7.2.12 Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

Решение. Для доказательства воспользуемся необходимым признаком сходимости ряда (теорема 7.1.1). Рассмотрим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$, у которого

n -й член равен $a_n = \frac{2^n}{n!}$. Исследуем числовой ряд на сходимость, воспользовавшись признаком Даламбера.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot 2^{n+1}}{(n+1)! \cdot 2^n} = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 2 \cdot 0 = 0 < 1.$$

По признаку Даламбера (теорема 7.1.6) ряд сходится. На основании необходимого признака сходимости ряда: если ряд сходится, то предел n -го члена равен нулю, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

7.3 Задания для решения на практическом занятии

7.3.1 Написать первые шесть членов ряда по заданному общему члену:

$$7.3.1.1 \quad a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{5}{6} \right)^n, \quad 7.3.1.2 \quad a_n = \frac{2^n}{n!}, \quad 7.3.1.3 \quad a_n = \sin \frac{\pi(n-1)}{4}.$$

7.3.2 Найти общий член ряда, считая, что последующие члены подчиняются тому же закону, по которому образованы первые члены ряда.

$$7.3.2.1 \quad \frac{1}{2} + \frac{3}{4 \cdot 5} + \frac{5}{6 \cdot 25} + \frac{7}{8 \cdot 125} + \frac{9}{10 \cdot 625} + \dots$$

$$7.3.2.2 \quad \frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{5}{4 \cdot 9} + \frac{7}{9 \cdot 16} + \frac{9}{16 \cdot 25} + \frac{11}{25 \cdot 36} + \dots$$

$$7.3.2.3 \quad 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{6} + \frac{5}{24} + \frac{6}{120} + \frac{7}{720} + \frac{8}{5040} + \dots$$

7.3.3 Найти сумму ряда, считая, что последующие его члены образованы по усматриваемому правилу:

$$7.3.3.1 \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots$$

$$7.3.3.2 \quad \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 8} + \frac{1}{5 \cdot 8 \cdot 11} + \frac{1}{8 \cdot 11 \cdot 14} + \frac{1}{11 \cdot 14 \cdot 17} + \frac{1}{14 \cdot 17 \cdot 20} + \dots$$

$$7.3.3.3 \quad \frac{3+4-6}{12} + \frac{9+16-36}{144} + \frac{27+64-216}{1728} + \frac{81+256-1296}{20736} + \dots$$

7.3.4 Используя достаточный признак расходимости числового ряда, доказать, что каждый из следующих рядов является расходящимся:

$$7.3.4.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 5n - 3}{2n^2 - 3n + 4}, \quad 7.3.4.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{1}{5n}, \quad 7.3.4.3 \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(1-1/n)^n}.$$

7.3.5 Используя достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами, исследовать на сходимость указанные ряды:

$$7.3.5.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \cdot 3^n}.$$

$$7.3.5.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{1+4^{2n}}.$$

$$7.3.5.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+5)}.$$

$$7.3.5.4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3 + 2n}{3n^4 - 7}.$$

$$7.3.5.5 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{n} + 7}{5\sqrt[6]{n^{13}} + 3}.$$

$$7.3.5.6 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[6]{n^5}}{\sqrt{n} - \sqrt[3]{n}}.$$

$$7.3.5.7 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(2n+3)}{4^n(7n+8)}.$$

$$7.3.5.8 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n^n}.$$

$$7.3.5.9 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n!}.$$

$$7.3.5.10 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{2n+1}{4n+1}.$$

$$7.3.5.11 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+7}{n+4} \right)^{5n^2+n}.$$

$$7.3.5.12 \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^n \sin^n \frac{1}{3n}.$$

$$7.3.6 \quad \text{Доказать, что } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\arctg \frac{2n^3 + 7n^2 + 2n + 6}{2n^3 + 4n^2 - 5n + 1} \right)^n = 0.$$

7.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

7.4.1 Доказать сходимость числового ряда и найти его сумму.

$$7.4.1.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \cdot (2n+3)}.$$

$$7.4.1.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n - 4^n}{12^n}.$$

$$7.4.1.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \cdot (n+5)}.$$

$$7.4.1.4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+2) \cdot (2n+4)}.$$

$$7.4.1.5 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 4^n + 5^n}{60^n}.$$

$$7.4.1.6 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot (n+3)}.$$

$$7.4.1.7 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2) \cdot (3n+5)}.$$

$$7.4.1.8 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 5^n - 6^n}{60^n}.$$

$$7.4.1.9 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \cdot (n+5)}.$$

$$7.4.1.10 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+5) \cdot (2n+7)}.$$

$$7.4.1.11 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 6^n + 7^n}{210^n}.$$

$$7.4.1.12 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3) \cdot (n+6)}.$$

$$7.4.1.13 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1) \cdot (3n+4)}.$$

$$7.4.1.14 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n - 7^n - 8^n}{168^n}.$$

$$7.4.1.15 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4) \cdot (n+7)}.$$

$$7.4.1.16 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+7) \cdot (2n+9)}.$$

$$7.4.1.17 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n - 4^n}{20^n}.$$

$$7.4.1.18 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5) \cdot (n+8)}.$$

$$7.4.1.19 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1) \cdot (3n+2)}.$$

$$7.4.1.20 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n + 4^n}{6^n}.$$

$$7.4.1.21 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+6) \cdot (n+9)}.$$

$$7.4.1.22 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1) \cdot (4n+3)}.$$

$$7.4.1.23 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 3^n - 2^n}{30^n}.$$

$$7.4.1.24 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot (n+3)}.$$

$$7.4.1.25 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-2) \cdot (5n+3)}.$$

$$7.4.1.26 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n - 8^n}{12^n}.$$

$$7.4.1.27 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \cdot (n+4)}.$$

$$7.4.1.28 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(6n-1) \cdot (6n+5)}.$$

$$7.4.1.29 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n + 4^n - 2^n}{24^n}.$$

$$7.4.1.30 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3) \cdot (n+5)}.$$

7.4.2 Используя достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами, исследовать на сходимость указанные ряды.

7.4.2.1 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 5}{2n^4 - n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n(3n+2)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \left(\frac{3n^2 + 3}{3n^2 - 1} \right)^{2n^3 - 5n}$.

7.4.2.2 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{7^n n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{\sqrt{3} n^4 + 2n + 2}{2n^4 - n^3 + 7}$.

7.4.2.3 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + n}{5n^4 - 2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{6^n(4n+1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2} \right)^n \sin^n \frac{5}{n}$.

7.4.2.4 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n5^n}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{2^n(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3} \right)^{2n} \left(1 - \cos \frac{2}{5n} \right)^n$.

7.4.2.5 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{4\sqrt[3]{n^4} - n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{6^{2n-1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{2n+5}{2n-3} \right)^{3n^2+2n}$.

7.4.2.6 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)4^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{7^n(6n+5)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^3 - 5n^2 + 2n + 1}{7n^3 + 4n^2 + 3n - 2} \right)^{n+2}$.

7.4.2.7 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^5 + 2}{2n^8 - n^6}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n(4n-3)}{3^n(2n-1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg^n \frac{\sqrt{3} n^2 - 3n}{n^2 + 2n + 1}$.

7.4.2.8 a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin \frac{1}{n+1}$; в) $\log_2^n \left(\frac{16n^2 + 3n - 1}{4n^2 + 7n + 2} \right)$.

7.4.2.9 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)6^n}{5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-2}{5^{5n+2}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}^n \frac{\sqrt{3} n^3 - 5n}{n^3 - 3n + 2}$.

7.4.2.10 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sqrt[7]{n^6} + 4}{3n^2 - 2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n(n^2+1)}{9^n(3n^2+1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{4n^3 + 7}{4n^3 - 5} \right)^{3n^3 - 3n^2}$.

7.4.2.11 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + 4}{3n^5 - 2n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin \frac{1}{n+2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \arccos^n \frac{3n^4 + 2n + 5}{6n^4 - 6n^3 + 12}$.

7.4.2.12 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)4^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^{n+2}}{4^n(n+2)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{n^3 + 3n^2 + 2}{2n^3 - n^2 + 11}$.

7.4.2.13 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3 + n^2}{6n^5 - 3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{9^n(2n+3)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3} \right)^n \sin^n \frac{6}{n+1}$.

7.4.2.14 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)5^n}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)^{n+3}}{5^n(n+3)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{4} \right)^{2n} \left(1 - \cos \frac{6}{n+1} \right)^n$.

7.4.2.15 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3\sqrt[3]{n^7} + n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{3n}(7n+2)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{5n+1}{5n+3} \right)^{-2n^2+3n}$.

7.4.2.16 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+2)5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^3 + 2n^2 - 2n - 1}{2n^3 + 5n^2 + 6n - 3} \right)^{2n+3}$.

7.4.2.17 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^6 + 3}{3n^9 - n^7}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{n^2 + 2n + 5}{\sqrt{3n^2 + 2n + 1}}$.

7.4.2.18 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n(2n-1)}{3^n(3n+2)}$; в) $\log_3^n \left(\frac{\sqrt{3n^2 + n - 5}}{n^2 + 7n + 2} \right)$.

7.4.2.19 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+4)7^n}{6^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{7^n(3n-2)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}^n \frac{n^4 + 2n^2 + 5}{\sqrt{3n^4 - 7n + 1}}$.

7.4.2.20 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\sqrt[8]{n^7} + 5}{4n^2 - 2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n(n^2 + 2)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} \left(\frac{6n^3 - 2}{6n^3 + 2} \right)^{4n^4 + 3n}$.

7.4.2.21 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 + 6}{4n^6 - n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n} \operatorname{tg} \frac{1}{2n+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arccos}^n \frac{\sqrt{3n^3 + 2n^2}}{2n^3 - 4n^2 + 13}$.

7.4.2.22 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+2)5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+4)^{n+4}}{8^n(n+4)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcsin}^n \frac{n^4 + n^3 + n}{n^4 - n^2 + 8}$.

7.4.2.23 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^4 - n}{3n^8 + 2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(n^2 + 2)}{4^n(n^2 + 8)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{5} \right)^n \sin^n \frac{8}{n+2}$.

7.4.2.24 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5)8^n}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{8} \right)^{2n} \left(1 - \cos \frac{4}{n+3} \right)^n$.

7.4.2.25 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3\sqrt[4]{n^5} + 1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} \sin \frac{1}{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n} \left(\frac{7n-6}{7n+2} \right)^{5n^2 - 4n}$.

7.4.2.26 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{(n+5)9^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (5n-3)}{1 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (4n-3)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^3 + n^2 - 9n - 10}{6n^3 + 5n^2 + 4n + 3} \right)^{2n+5}$.

7.4.2.27 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^2 + 5}{5n^5 - n^4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n^3 + 1)}{5^n(n^3 + 6)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{n^2 + 2n + 3}{n^2 - 2n - 3}$.

7.4.2.28 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+2)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} 4^n \operatorname{tg} \frac{1}{n^2}$; в) $\log_4^n \left(\frac{64n^2 + n + 5}{2n^2 + 3n - 2} \right)$.

7.4.2.29 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+4)8^n}{7^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (4n-1)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}^n \frac{n^5 + 2n^4 + 5}{n^5 - 7n^3 + 2}$.

7.4.2.30 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\sqrt[8]{n^7} + 8}{4n^2 - 3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n^2 + 1)}{n^2 + 3n + 1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arccos}^n \frac{\sqrt{2n^3 - n^2 + n}}{2n^3 + n^2 + 12}$.

8 ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ПРИЗНАК КОШИ. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ И ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ

Содержание: интегральный признак Коши рядов с положительными членами, знакопеременные ряды, абсолютная и условная сходимость, знакочередующиеся ряды, признак Лейбница и следствие из него.

8.1 Теоретический материал по теме практического занятия

В продолжение темы предыдущего практического занятия приведём ещё один важный достаточный признак сходимости рядов с положительными членами.

Теорема 8.1.1 (интегральный признак Коши). Если функция $f(x)$ непрерывная, положительная и монотонно убывающая на интервале $[1; +\infty)$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = f(n)$ сходится или расходится в зависимости от того, является ли несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ сходящимся или расходящимся.

Признак остаётся в силе, если соответствующие условия для функции начинают выполняться не со значения равного 1, а с некоторого значения $x > 1$.

Определение 8.1.1 Числовой ряд называется *знакопеременным*, если он содержит положительные и отрицательные члены.

Пусть задан знакопеременный ряд $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ (1), где a_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$) могут принимать как отрицательные, так и положительные значения. Рассмотрим ряд (2), составленный из абсолютных величин знакопеременного ряда, то есть ряд вида $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$. Возможны три случая:

- 1) ряд (1) сходится, а ряд (2) расходится;
- 2) ряд (1) сходится и ряд (2) сходится;
- 3) ряд (1) расходится и ряд (2) расходится.

Теорема 8.1.2 Если ряд, составленный из абсолютных величин знакопеременного ряда, сходится, то сходится и сам знакопеременный ряд.

Определение 8.1.2 Если ряд, составленный из абсолютных величин знакопеременного ряда, сходится, то знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся*. Если ряд, составленный из абсолютных величин знакопеременного ряда, расходится, а знакопеременный ряд сходится, то знакопеременный ряд называется *условно сходящимся*.

Частным случаем знакопеременного ряда является знакочередующийся ряд.

Определение 8.1.3 Знакопеременный ряд называется *знакочередующимся*, если произведение двух его соседних членов величина отрицательная.

Знакочередующийся ряд можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots,$$

где все a_i ($i = \overline{1; \infty}$) либо положительные, либо отрицательные числа. Для определённости в дальнейшем будем считать, что все члены a_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$) являются положительными числами. Все определения и теоремы для знакопеременного ряда справедливы и для знакочередующегося ряда.

Теорема 8.1.3 (признак Лейбница). Если члены знакочередующегося ряда по абсолютной величине монотонно убывают и предел n -го члена равен нулю, то знакочередующийся ряд сходится, причём его сумма не превосходит первого члена по абсолютной величине.

Таким образом, для доказательства сходимости знакочередующегося ряда необходимо проверить выполнение двух условий:

- 1) $a_1 > a_2 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

При этом, согласно теореме Лейбница, выполняется неравенство $S \leq |a_1|$, где S – сумма знакочередующегося сходящегося ряда.

Следствие из теоремы Лейбница: остаток ряда по абсолютной величине не превосходит модуля первого из отброшенных членов.

Рассмотрим знакочередующийся ряд $a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + (-1)^n a_{n+1} + \dots$. Выражение вида $r_n = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \dots$ называется *остатком ряда*. Тогда, согласно следствию из теоремы Лейбница, будет выполняться неравенство $|r_n| \leq a_{n+1}$.

8.2 Примеры решения типовых задач

8.2.1 С помощью интегрального признака Коши доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

Решение. Общий член ряда определяется формулой $a_n = f(n) = \frac{1}{1+n^2}$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Эта функция удовлетворяет условиям интегрального признака Коши (теорема 8.1.2): она принимает положительные

значения и монотонно убывает на промежутке $[1; +\infty)$. Вычислим несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Так как несобственный интеграл сходится, то сходится исходный ряд.

8.2.2 С помощью интегрального признака Коши исследовать, сходится или расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2}$.

Решение. Функция $f(x) = \frac{x+3}{x^2}$ удовлетворяет условиям интегрального признака Коши (теорема 8.1.2). Поскольку

$$\int_1^{\infty} \frac{x+3}{x^2} dx = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \right) dx = \left(\ln|x| - \frac{3}{x} \right) \Big|_1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln|x| - \frac{3}{x} \right) - 0 + 3 = \infty,$$

то несобственный интеграл расходится, то есть будет расходиться и заданный ряд.

8.2.3 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$.

Решение. Общий член ряда определяется формулой $a_n = f(n) = \frac{1}{n \ln^2 n}$, где $n \geq 2$. Обратим внимание на то, что суммирование начинается со значения $n=2$ (если $n=1$, то соответствующий член не определён, так как в знаменателе содержится множитель $\ln 1 = 0$). Из формулы для общего члена ряда находим функцию $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln^2 x}$, которая удовлетворяет условиям интегрального признака Коши на промежутке $[2; +\infty)$. Вычислим интеграл

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x} = \int_2^{\infty} \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} \Big|_2^{\infty} = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln 2} = 0 + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}.$$

Несобственный интеграл сходится, а, следовательно, сходится и ряд.

8.2.4 Исследовать на сходимость знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$.

Решение. Составляем ряд из абсолютных величин членов данного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$. Так как $|\cos n| \leq 1$, то каждый член последнего ряда не превышает соответствующего члена, сходящегося обобщённо гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Согласно признаку сравнения (теорема 7.1.4), ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$ сходится. Поэтому сходится и данный ряд, причём абсолютно (теорема 8.1.2).

8.2.5 Исследовать на сходимость знакопередающийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$.

Решение. Составляем ряд из абсолютных величин членов данного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$. Полученный геометрический ряд сходится (пример 7.1.3 и $q = \frac{1}{2} < 1$). Следовательно, сходится и исходный ряд, причём абсолютно (теорема 8.1.2).

8.2.6 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+2}{3n+5}$.

Решение. Составляем ряд из абсолютных величин членов данного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3n+5}$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2/n}{3+5/n} = \frac{1}{3} \neq 0$, то, согласно необходимому признаку сходимости (теорема 7.1.1), ряд расходится. Рассмотрим исходный ряд. Предел его n -го члена равен $1/3$, если значение числа n является нечётным. Если число n – чётное, то предел его n -го члена равен $(-1/3)$. Следовательно, предела n -го члена не существует ввиду свойства единственности предела числовой последовательности. На основании необходимого признака сходимости числовых рядов (теорема 7.1.1) заданный числовой ряд расходится.

8.2.7 Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^n}$.

Решение. Составляем ряд из абсолютных величин членов данного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$. Воспользуемся признаком Даламбера.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}}{\frac{1}{n \cdot 2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 2^n}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Следовательно, по теореме Даламбера, ряд, составленный из абсолютных величин, является сходящимся. Согласно теореме 8.1.2, исходный ряд сходится абсолютно.

8.2.8 Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Решение. Поскольку ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, расходится, то о сходимости исходного ряда

пока ничего нельзя сказать (пример 7.1.2). Применим к данному ряду признак Лейбница. Условия признака Лейбница в данном случае выполнены:

$$1 > \frac{1}{\sqrt[3]{2}} > \frac{1}{\sqrt[3]{3}} > \frac{1}{\sqrt[3]{4}} > \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0.$$

Следовательно, этот ряд сходится. Так как ряд из абсолютных величин расходится, то исходный ряд сходится условно.

8.2.9 Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^n}$ с точностью $\varepsilon = 0,001$.

Решение. Данный знакочередующийся ряд является абсолютно сходящимся (пример 8.2.7). На основании следствия из признака Лейбница величина отброшенного при вычислении остатка ряда не превосходит первого отброшенного члена. Необходимое число членов n находим путём подбора из неравенства $\frac{1}{n \cdot 2^n} \leq 0,001$. При значении $n = 8$ последнее неравенство справедливо.

Следовательно, если отбросить в исходном ряде все члены, начиная с восьмого, то требуемая точность будет достигнута. Таким образом,

$$S \approx S_7 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \frac{1}{160} - \frac{1}{384} + \frac{1}{896} = 0,406.$$

8.3 Задания для решения на практическом занятии

8.3.1 С помощью интегрального признака Коши исследовать на сходимость ряд.

$$8.3.1.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2) \ln^3(3n+2)}. \quad 8.3.1.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}. \quad 8.3.1.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+9}.$$

8.3.2 Исследовать на сходимость знакопеременные ряды.

$$8.3.2.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{1+(-2)^{2n}}. \quad 8.3.2.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^3}. \quad 8.3.2.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^3+4}.$$

$$8.3.2.4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+7) \cdot \ln(2n+7)}. \quad 8.3.2.5 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}. \quad 8.3.2.6 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 5^n}.$$

$$8.3.2.7 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}. \quad 8.3.2.8 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+3}}. \quad 8.3.2.9 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln^5 n}.$$

8.3.3 Вычислить сумму указанного ряда с точностью $\varepsilon = 0,001$.

$$8.3.3.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}. \quad 8.3.3.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 3^n}. \quad 8.3.3.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}.$$

8.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

8.4.1 Исследовать на сходимость указанные ряды. В пункте а) необходимо исследовать ряд $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$, используя интегральный признак Коши, а в пункте б)

указать характер сходимости знакопередающегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (условная или абсолютная сходимость), если ряд сходится.

$$8.4.1.1 \text{ а) } a_n = \frac{n}{n^2 + 2}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{5n}. \quad 8.4.1.2 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}.$$

$$8.4.1.3 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n \cdot \ln \sqrt{n}}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}. \quad 8.4.1.4 \text{ а) } a_n = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}.$$

$$8.4.1.5 \text{ а) } a_n = \frac{n}{e^{-n^2}}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1} n}{5n+4}. \quad 8.4.1.6 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n^2} \sin \frac{1}{n}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1} n}{7^n}.$$

$$8.4.1.7 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n^2} \cos \frac{1}{n}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 + 9}. \quad 8.4.1.8 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n^2} \operatorname{tg} \frac{1}{n}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n^4}}.$$

$$8.4.1.9 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n^2} \operatorname{ctg} \frac{1}{n}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1} n^2}{2n^2 + 1}. \quad 8.4.1.10 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n^2 + 9}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^n}.$$

$$8.4.1.11 \text{ а) } a_n = \frac{n+5}{n^2}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[5]{n}}. \quad 8.4.1.12 \text{ а) } a_n = \frac{1}{(n+1)^5}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{4n}.$$

$$8.4.1.13 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n \cdot \ln \sqrt[3]{n}}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+2)}. \quad 8.4.1.14 \text{ а) } a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!}.$$

$$8.4.1.15 \text{ а) } a_n = \frac{3n}{n^2 + 5}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1} n}{6^n}. \quad 8.4.1.16 \text{ а) } a_n = \frac{e^{-\sqrt[3]{n}}}{\sqrt{n^2}}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1} n}{2n+3}.$$

$$8.4.1.17 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n^3} \sin \frac{1}{n^2}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[5]{n^6}}. \quad 8.4.1.18 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n^3} \cos \frac{1}{n^2}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{3n^3 + 8}.$$

$$8.4.1.19 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n^3} \operatorname{tg} \frac{1}{n^2}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)^n}. \quad 8.4.1.20 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n^3} \operatorname{ctg} \frac{1}{n^2}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1} n^3}{4n^3 + 8}.$$

$$8.4.1.21 \text{ а) } a_n = \frac{1}{(n+3)^7}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{10n}. \quad 8.4.1.22 \text{ а) } a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{2n+5}}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[9]{n^2}}.$$

$$8.4.1.23 \text{ а) } a_n = \frac{n^4}{n^5 + 32}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+2)!}. \quad 8.4.1.24 \text{ а) } a_n = \frac{n^2}{e^{-n^3}}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+3)}.$$

$$8.4.1.25 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n^9} \operatorname{tg} \frac{1}{n^8}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1} n}{7n+8}. \quad 8.4.1.26 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n^5} \sin \frac{1}{n^4}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1} n}{9^n}.$$

$$8.4.1.27 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n^4} \operatorname{ctg} \frac{1}{n^3}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{5n^4 + 3}. \quad 8.4.1.28 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n \cdot \ln \sqrt[6]{n}}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[9]{n^{10}}}.$$

$$8.4.1.29 \text{ а) } a_n = \frac{1}{\sqrt[5]{5n+9}}; \text{ б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1} n^5}{5n^5 + 7}. \quad 8.4.1.30 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n^7} \cos \frac{1}{n^6}; \text{ б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(8n-3)^n}.$$

9 ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Содержание: функциональные ряды, область сходимости функционального ряда, равномерно сходящиеся ряды, степенные ряды, теорема Абеля и следствие из неё, радиус и область сходимости степенного ряда, ряд Тейлора и Маклорена, применение степенных рядов к приближённым вычислениям, применение степенных рядов к нахождению и вычислению интегралов, применение степенных рядов к решению дифференциальных уравнений.

9.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Пусть на некотором множестве I задано бесконечное множество функций $\{u_n(x)\}$, где $x \in I$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

Определение 9.1.1 *Функциональным рядом* называется ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$, где $u_n(x)$ – функция от переменной x .

Определение 9.1.2 Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *сходящимся* в точке x_0 , если в этой точке сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$.

Определение 9.1.3 Функциональный ряд называется *сходящимся на промежутке I* , если он сходится в каждой точке этого интервала.

Определение 9.1.4 Множество всех точек сходимости функционального ряда называется *областью сходимости* этого ряда.

Каждому значению из области сходимости I соответствует определённое значение величины $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k u_n(x)$. Эту величину, являющуюся функцией от переменной x , называют *суммой функционального ряда* и обозначают $S(x)$.

Для определения области сходимости функционального ряда можно использовать предельный признак Даламбера $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = |l(x)|$ или предельный радикальный признак Коши $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = |l(x)|$.

Решение неравенства $|l(x)| < 1$ представляет собой интервал сходимости функционального ряда. Для определения области сходимости необходимо исследовать ряд на концах интервала сходимости, то есть в точках решения уравнения $|l(x)| = 1$.

Представим сумму ряда $S(x)$ в виде $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$, где $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$, $R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$ – остаток функционального ряда.

Определение 9.1.5 Сходящийся функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* в некоторой области I , если каждого сколь угодно малого положительного числа ε найдётся такое натуральное число N , что при всех $n \geq N$ выполняется неравенство $|R_n(x)| < \varepsilon$ для любого $x \in I$.

Сформулируем достаточный признак сходимости функционального ряда.

Теорема 9.1.1 (признак Вейерштрасса). Если члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ по абсолютной величине для всех $x \in I$ не превосходят соответствующих членов сходящегося числового ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то есть $|u_n(x)| \leq a_n$ для любого натурального n , то данный функциональный ряд равномерно сходится на промежутке I .

Сформулируем три теоремы, относящиеся к непрерывности, дифференцированию и интегрированию функциональных рядов.

Теорема 9.1.2 Если члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывны на интервале I и на этом интервале ряд является равномерно сходящимся, то его сумма на этом интервале является непрерывной функцией.

Теорема 9.1.3 (о почленном дифференцировании). Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на промежутке I и его сумма равна $S(x)$, а ряд, составленный из производных членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$, равномерно сходится на промежутке I , то производная суммы данного ряда равна сумме ряда, составленных из производных, то есть $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$.

Теорема 9.1.4 (о почленном интегрировании). Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на промежутке I сходится равномерно и имеет сумму $S(x)$, то на

любом отрезке $[a; b] \subseteq I$ его можно интегрировать, причём сумма полученного ряда равна $\int_a^b S(x) dx$.

Рассмотрим степенные ряды, как один из важных видов функциональных рядов.

Определение 9.1.6 *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots$ (1), где x_0 – произвольная точка, $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ – коэффициенты степенного ряда.

Если $x_0 = 0$, то полученный ряд принимает вид $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$ (2).

Каждый член указанных рядов представляет собой степенную функцию, поэтому ряды называются степенными. Область сходимости степенных рядов не являются пустым множеством. Ряд (1) всегда сходится в точке x_0 , а ряд (2) в точке нуль, причём их суммы в этом случае равны c_0 . Ряд (1) всегда можно свести к ряду (2), если выполнить замену $x - x_0 = t$.

Теорема 9.1.5 (Абеля). Если степенной ряд (2) сходится в точке x_1 , то он сходится на промежутке решения неравенства $|x| < |x_1|$.

Следствие 9.1.1 Если степенной ряд (2) расходится в точке x_2 , то он расходится на промежутке решения неравенства $|x| > |x_2|$.

Для определения области сходимости степенных рядов (1) и (2), на основании теоремы Абеля, определяем радиус сходимости $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ или

$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$. Тогда интервал сходимости ряда (2): $(-R; R)$. Для определения

области сходимости ряда (2) необходимо исследовать ряд на концах интервала, то есть в точках $x = \pm R$. Интервал сходимости ряда (1) имеет вид $(x_0 - R; x_0 + R)$. Для определения области сходимости ряда (1) необходимо исследовать ряд на концах интервала, то есть в точках $x = x_0 \pm R$.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, которая является бесконечно дифференцируемой на промежутке $(x_0 - R; x_0 + R)$. Эта функция на этом интервале может быть представлена в виде сходящегося к ней *бесконечного степенного ряда Тейлора*:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \dots,$$

если в этом интервале выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} = 0,$$

где $R_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора, а $c = x_0 + \Theta(x-x_0)$ и $0 < \Theta < 1$.

При значении $x_0 = 0$ получаем так называемый *ряд Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Если в некотором интервале, содержащем точку x_0 , при любом значении n выполняется неравенство $|f^{(n)}(x)| < M$, где M – положительная постоянная величина, то $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ и функция $f(x)$ разлагима в ряд Тейлора.

Рассмотрим разложение в ряд Тейлора некоторых основных функций.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (9.1.1)$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (9.1.2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (9.1.3)$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (9.1.4)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (9.1.5)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x \leq 1. \quad (9.1.6)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (9.1.7)$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \cdot \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right), \quad -1 < x < 1. \quad (9.1.8)$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m \cdot (m-1)}{2!}x^2 + \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{3!}x^3 + \dots, \quad (9.1.9)$$

которое возможно при $m \geq 0$, если $-1 \leq x \leq 1$; при $-1 < m < 0$, если $-1 < x \leq 1$; при $m \leq -1$, если $-1 < x < 1$.

Степенные ряды находят *применение при приближённых вычислениях значений функции*. Для вычисления приближённого значения функции $f(x)$ в её разложении в степенной ряд сохраняются первые n членов. Для оценки погрешности найденного приближённого значения необходимо оценить сумму отброшенных членов. Если данный ряд знакопостоянный, то ряд, составленный из отброшенных членов, сравнивают с бесконечно убывающей геометрической прогрессией. В случае знакопеременного ряда, члены которого удовлетворяют

признаку Лейбница, используется оценка $|R_n| < a_{n+1}$, где a_{n+1} – первый из отброшенных членов.

Для вычисления интегралов с помощью степенных рядов раскладывают подынтегральную функцию в степенной ряд, а затем ограничиваются в этом ряде конечным числом членов. Число членов выбирается из соображения обеспечения заданной точности. Также степенные ряды можно применять при решении дифференциальных уравнений.

9.2 Примеры решения типовых задач

9.2.1 Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n 3^{nx}$.

Решение. Применим к ряду признак Коши, для чего найдём предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n 3^{nx} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) 3^x = 3^x.$$

Интервал сходимости функционального ряда определяется неравенством: $3^x < 1$ или $x < 0$. Для определения области сходимости необходимо исследовать ряд на конце интервала, то есть в точке $x = 0$. В этой точке ряд имеет вид

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Этот ряд расходится, так как для него не выполнен необходимый

признак сходимости ряда: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$. Следовательно, областью сходимости ряда является интервал $(-\infty; 0)$.

9.2.2 Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n \sqrt{n}}$.

Решение. Найдём радиус сходимости степенного ряда:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1/5^n \sqrt{n}}{1/5^{n+1} \sqrt{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} \sqrt{n+1}}{5^n \sqrt{n}} = 5 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 5.$$

Следовательно, интервалом сходимости является интервал $(-5; 5)$.

Для определения области сходимости исследуем ряд на концах интервала, то есть в точках $x = \pm 5$. При значении $x = 5$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{5^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$,

который является расходящимся обобщённо гармоническим рядом (пример 1.1.2, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$). При значении $x = -5$ имеем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Ряд, составленный из абсолютных величин знакопеременного ряда, расхо- дится. Применим к данному ряду признак Лейбница. Условия признака Лейб- ница в данном случае выполнены: $1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{4}} > \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Следовательно, этот ряд сходится. Так как ряд из абсолютных величин расхо- дится, то знакопеременный ряд сходится условно. Таким образом, областью сходимости степенного ряда является интервал $[-5; 5)$.

9.2.3 Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{7^n n^2}$.

Решение. По определению 9.1.6 степенного ряда $x_0 = -2$. Рассмотрим степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{7^n n^2}$ (*) и найдём его область сходимости. Находим радиус сходимости степенного ряда (*):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1/7^n n^2}{1/7^{n+1} (n+1)^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^{n+1} (n+1)^2}{7^n n^2} = 7 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 = 7.$$

Следовательно, интервалом сходимости ряда (*) является интервал $(-7; 7)$. Для определения области сходимости исследуем ряд на концах интер- вала, то есть в точках $x = \pm 7$. При значении $x = 7$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{7^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, который является сходящимся обобщённым гармоническим рядом (пример 1.1.2, $\alpha = 2 > 1$). При значении $x = -7$ имеем знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Ряд, составленный из абсолютных величин знакопеременного ряда, сходится. Следовательно, этот знакопеременный ряд сходится абсолютно (теорема 8.1.2 и определение 8.1.2). Таким образом, областью сходимости степенного ряда (*) является интервал $[-7; 7]$. Следовательно, областью сходимости ис- ходного ряда будет интервал $[-7 - 2; 7 - 2]$ или $[-9; 5]$.

9.2.4 Разложить функцию $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ в степенной ряд.

Решение. Находим разложение функции $\varphi(x) = (1+x^2)^{-1/2}$ в ряд, исполь- зуя биномиальный ряд, определяемый формулой (3.1.9). Разложение функции имеет вид $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$. Полученный ряд сходится на отрезке $[-1; 1]$. Интегрируя его на промежутке $[0; x]$, где $0 < x < 1$ (что можно сделать, так как ряд сходится равномерно), находим $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Поскольку $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, то получаем искомое разложение в степенной ряд исходной функции:

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Областью сходимости ряда является промежуток: $[-1; 1]$.

9.2.5 Вычислить $\ln 2$ с точностью $\varepsilon = 0,000001$.

Решение. Воспользуемся формулой (9.1.8). Поскольку $\frac{1+x}{1-x} = 2$ выполняется при значении $x = \frac{1}{3}$, то, подставив это число в ряд, получим $\ln 2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots \right)$. Для вычисления $\ln 2$ с заданной точностью необходимо найти такое число членов частичной суммы, при котором сумма остатка ряда $|R_n| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} R_n &= 2 \left(\frac{1}{(2n+1) \cdot 3^{2n+1}} + \frac{1}{(2n+3) \cdot 3^{2n+3}} + \dots \right) < \frac{2}{2n+1} \left(\frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{3^{2n+3}} + \dots \right) = \\ &= \frac{2}{(2n+1) \cdot 3^{2n+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \dots \right) = \frac{2}{(2n+1) \cdot 3^{2n+1}} \cdot \frac{1}{1-1/9} = \frac{1}{4 \cdot (2n+1) \cdot 3^{2n-1}}. \end{aligned}$$

В соответствии с условием задачи выберем n так, чтобы остаток был меньше $0,000001$, то есть $\frac{1}{4 \cdot (2n+1) \cdot 3^{2n-1}} < 0,000001$. Последнее неравенство выполняется с номера $n = 6$, так как при этом значении n справедливо неравенство $\frac{1}{4 \cdot (2 \cdot 6 + 1) \cdot 3^{2 \cdot 6 - 1}} = \frac{1}{4 \cdot 13 \cdot 3^{11}} = \frac{1}{9211644} < 0,000001$. Следовательно, в разложении ряда можно ограничиться шестью слагаемыми, чтобы получить значение $\ln 2$ с заданной точностью:

$$\ln 2 \approx 2 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} + \frac{1}{11 \cdot 3^{11}} \right) = 0,6931471.$$

9.2.6 Вычислить $\sin 1$ с точностью $\varepsilon = 0,00001$.

Решение. Воспользуемся формулой (9.1.2) при значении $x = 1$: $\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} - \frac{1}{11!} + \dots$. Полученный ряд является знакочередующимся и удовлетворяет условиям признака Лейбница. Для определения числа членов в указанном ряде, для достижения заданной точности, воспользуемся следствием из теоремы Лейбница: погрешность при замене его суммой первых n членов не превысит первого отброшенного члена. Так как для пятого члена ря-

да выполняется требуемое неравенство $\frac{1}{9!} = \frac{1}{362880} \approx 0,000003 < 0,00001$, то достаточно взять сумму первых четырёх членов, чтобы получить искомое значение с заданной точностью. Следовательно,

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} \approx 0,84147.$$

9.2.7 Вычислить интеграл $\int_0^{1/2} \sqrt{1+x^3} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,001$.

Решение. Используя формулу (9.1.9), раскладываем подынтегральную функцию в степенной ряд $\sqrt{1+x^3} = 1 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{8} + \frac{x^9}{16} - \frac{5x^{12}}{128} + \dots$ ($|x| < 1$).

Интегрируя этот ряд на промежутке $[0; 0,5]$, находим

$$\begin{aligned} \int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx &= \int_0^{0,5} \left(1 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{8} + \frac{x^9}{16} - \frac{5x^{12}}{128} + \dots \right) dx = \left(x + \frac{x^4}{8} - \frac{x^7}{56} + \frac{x^{10}}{160} - \frac{5x^{13}}{1664} + \dots \right) \Big|_0^{0,5} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2^4} - \frac{1}{56} \cdot \frac{1}{2^7} + \frac{1}{160} \cdot \frac{1}{2^{10}} - \frac{5}{1664} \cdot \frac{1}{2^{13}} + \dots \end{aligned}$$

Поскольку $\frac{1}{56} \cdot \frac{1}{2^7} = \frac{1}{7168} \approx 0,00014 < 0,001$, то для вычисления заданного интеграла с указанной точностью достаточно взять два первых члена полученного ряда, то есть $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{128} \approx 0,508$.

9.2.8 Найти первые четыре члена разложения в ряд решения уравнения $y' = x^2 + y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 0,5$.

Решение. Запишем искомое решение в виде ряда Маклорена:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \frac{y'''(0)}{3!} x^3 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

Найдём выражения для двух последующих производных, дифференцируя исходное уравнение: $y'' = 2x + 2yy'$, $y''' = 2 + 2y'^2 + 2yy''$. Вычислим значения этих производных при заданных начальных условиях: $y'(0) = 0 + 0,5^2 = 0,25$, $y''(0) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,25 = 0,25$, $y'''(0) = 2 + 2 \cdot 0,0625 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,25 = 2,375$. Следовательно, решение исходного уравнения имеет вид

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \frac{19x^3}{48} + \dots$$

9.3 Задания для решения на практическом занятии

9.3.1 Найти область сходимости функциональных рядов.

$$9.3.1.1 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{2x+1} \right)^n.$$

$$9.3.1.2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^n.$$

$$9.3.1.3 \sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x.$$

9.3.2 Найти область сходимости степенных рядов.

$$9.3.2.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}.$$

$$9.3.2.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n x^n}{7^n}.$$

$$9.3.2.3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

$$9.3.2.4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2} \frac{(x-4)^n}{2^n}.$$

$$9.3.2.5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n \cdot (x-3)^n}{5 \cdot \sqrt{n}}.$$

$$9.3.2.6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot 4^n}.$$

9.3.3 Разложить функцию $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ по степеням переменной x .

9.3.4 С точностью $\varepsilon = 0,0001$ вычислить значения функций:

$$9.3.4.1 \sqrt[5]{37}.$$

$$9.3.4.2 \cos 20^\circ.$$

$$9.3.4.3 \ln 3.$$

9.3.5 С точностью $\varepsilon = 0,0001$ вычислить интеграл $\int_0^{0,25} \frac{\sin 2x}{x} dx$.

9.3.6 Найти первые пять членов разложения в ряд решения уравнения $y' = x^3 + y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 0,5$.

9.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

9.4.1 Найти область сходимости степенного ряда.

$$9.4.1.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^2}{2^n(2n+3)}.$$

$$9.4.1.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^2}{5^n(3n^2+4)}.$$

$$9.4.1.3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n(x-4)^n}{6^n(2\sqrt[3]{n}+3)}.$$

$$9.4.1.4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n(x-5)^n}{5^n(2n^7-6)}.$$

$$9.4.1.5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n(x-6)^n}{9^n(\sqrt[4]{n^3}-7)}.$$

$$9.4.1.6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n(x-7)^n}{3^n(2n-1)!}.$$

$$9.4.1.7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(x-8)^n}{11^n(4\sqrt[5]{n^2}+2)}.$$

$$9.4.1.8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-9)^n}{8^n(3n^8-8)}.$$

$$9.4.1.9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(x-1)^n}{8^n(2\sqrt[3]{n^7}-4)}.$$

$$9.4.1.10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(x+1)^n}{3^n(3n^2-8)}.$$

$$9.4.1.11 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(x+2)^n}{5^n(\sqrt[5]{n^8}+5)}.$$

$$9.4.1.12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n(x+2)^n}{5^n(4n^2+5)}.$$

$$9.4.1.13 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{4^n(n+1)!}.$$

$$9.4.1.14 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(x+4)^n}{7^n(8\sqrt{n}-1)}.$$

$$9.4.1.15 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(x+5)^n}{5^n(2n^3+4)}.$$

$$9.4.1.16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n(x+6)^n}{4^n(4\sqrt{n}-3)}.$$

$$9.4.1.17 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+7)^n}{3^n(6n^2+4)}.$$

$$9.4.1.18 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(x+8)^n}{5^n(3\sqrt[4]{n^3}-1)}.$$

$$\begin{array}{lll}
9.4.1.19 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n (x+12)^n}{11^n (7n^4 - 5)} & 9.4.1.20 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (x+10)^n}{3^n \sqrt[3]{n^2}} & 9.4.1.21 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x+11)^n}{5^n (4n^3 + 6)} \\
9.4.1.22 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x-11)^n}{3^n (7n^6 - 5)} & 9.4.1.23 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x-12)^n}{9^n (n+2)!} & 9.4.1.24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (x-13)^n}{4^n (3\sqrt[3]{n^2} - 8)} \\
9.4.1.25 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! (x+13)^n}{4^n (2\sqrt[2]{n^8} - 6)} & 9.4.1.26 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (x+2)^n}{7^n (4n^5 - 9)} & 9.4.1.27 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x+5)^n}{5^n (2\sqrt[2]{n^4} - 1)} \\
9.4.1.28 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n (x-18)^n}{11^n (4n^3 - 3)} & 9.4.1.29 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (x+19)^n}{4^n \sqrt[6]{x+19}} & 9.4.1.30 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x-7)^n}{11^n (5\sqrt[2]{n^8} - 7)}
\end{array}$$

9.4.2 Используя разложение в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции, вычислить указанную величину с заданной степенью точности ε .

$$\begin{array}{ll}
9.4.2.1 \sqrt[5]{34}, \quad \varepsilon = 0,001. & 9.4.2.2 \operatorname{sh} 1, \quad \varepsilon = 0,001. \\
9.4.2.3 \ln 1,3, \quad \varepsilon = 0,0001. & 9.4.2.4 \sqrt[3]{e}, \quad \varepsilon = 0,0001. \\
9.4.2.5 \operatorname{arctg} 0,2, \quad \varepsilon = 0,0001. & 9.4.2.6 \sqrt[5]{245}, \quad \varepsilon = 0,001. \\
9.4.2.7 \sin 58^\circ, \quad \varepsilon = 0,001. & 9.4.2.8 \lg 3, \quad \varepsilon = 0,001. \\
9.4.2.9 \sqrt{84}, \quad \varepsilon = 0,001. & 9.4.2.10 \cos 18^\circ, \quad \varepsilon = 0,0001. \\
9.4.2.11 \ln 3, \quad \varepsilon = 0,0001. & 9.4.2.12 \operatorname{arctg} 0,5, \quad \varepsilon = 0,0001. \\
9.4.2.13 \cos 28^\circ, \quad \varepsilon = 0,0001. & 9.4.2.14 \sin 18^\circ, \quad \varepsilon = 0,0001. \\
9.4.2.15 \sqrt[3]{29}, \quad \varepsilon = 0,001. & 9.4.2.16 \sin 91^\circ, \quad \varepsilon = 0,0001. \\
9.4.2.17 \sin 88^\circ, \quad \varepsilon = 0,0001. & 9.4.2.18 \sqrt{98}, \quad \varepsilon = 0,001. \\
9.4.2.19 \cos 2^\circ, \quad \varepsilon = 0,0001. & 9.4.2.20 \lg 9, \quad \varepsilon = 0,001. \\
9.4.2.21 \pi, \quad \varepsilon = 0,0001. & 9.4.2.22 \cos 57^\circ, \quad \varepsilon = 0,0001. \\
9.4.2.23 \sqrt{e}, \quad \varepsilon = 0,0001. & 9.4.2.24 \ln 6, \quad \varepsilon = 0,0001. \\
9.4.2.25 \lg 2, \quad \varepsilon = 0,001. & 9.4.2.26 \sqrt[4]{15}, \quad \varepsilon = 0,001. \\
9.4.2.27 \operatorname{arctg} 2/3, \quad \varepsilon = 0,0001. & 9.4.2.28 \sqrt[6]{67}, \quad \varepsilon = 0,001. \\
9.4.2.29 \operatorname{ch} 1, \quad \varepsilon = 0,001. & 9.4.2.30 \ln 1,1, \quad \varepsilon = 0,0001.
\end{array}$$

9.4.3 Вычислить определённый интеграл с точностью $\varepsilon = 0,001$, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.

$$\begin{array}{lll}
9.4.3.1 \int_0^{0,1} e^{-5x^2} dx. & 9.4.3.2 \int_0^{0,2} \sin 4x^2 dx. & 9.4.3.3 \int_0^{0,3} \cos 9x^2 dx. \\
9.4.3.4 \int_0^{0,4} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}. & 9.4.3.5 \int_0^{0,5} \frac{\ln(1+x/4)}{x} dx. & 9.4.3.6 \int_0^{0,6} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2} dx.
\end{array}$$

9.4.3.7	$\int_0^{0.7} \frac{e^{-3x} - 1}{x} dx.$	9.4.3.8	$\int_0^{0.8} \frac{x - \sin x}{x} dx.$	9.4.3.9	$\int_0^{0.9} \frac{1 - \cos x}{x} dx.$
9.4.3.10	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$	9.4.3.11	$\int_0^{0.1} \ln(1+x^2) dx.$	9.4.3.12	$\int_0^{0.2} \frac{\operatorname{arctg} x - x}{x^2} dx.$
9.4.3.13	$\int_0^{0.3} e^{-3x^2} dx.$	9.4.3.14	$\int_0^{0.4} \sin 16x^2 dx.$	9.4.3.15	$\int_0^{0.5} \cos 25x^2 dx.$
9.4.3.16	$\int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}.$	9.4.3.17	$\int_0^{0.6} \frac{\ln(1+x/3)}{x} dx.$	9.4.3.18	$\int_0^{0.7} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx.$
9.4.3.19	$\int_0^{0.8} \frac{2 - 2e^{-5x}}{x} dx.$	9.4.3.20	$\int_0^{0.9} \frac{\sin 2x}{x} dx.$	9.4.3.21	$\int_0^1 \frac{3 - 3\cos x}{x} dx.$
9.4.3.22	$\int_0^{0.9} e^{-2x^2} dx.$	9.4.3.23	$\int_0^{0.8} \sin 36x^2 dx.$	9.4.3.24	$\int_0^{0.7} \cos 49x^2 dx.$
9.4.3.25	$\int_0^{0.6} \sqrt[3]{8+x^3} dx.$	9.4.3.26	$\int_0^{0.16} \ln(1+\sqrt{x}) dx.$	9.4.3.27	$\int_0^{0.3} \sqrt[3]{27-x^3} dx.$
9.4.3.28	$\int_0^{0.7} \frac{3e^{-5x} - 3}{x} dx.$	9.4.3.29	$\int_0^{0.9} \frac{\sin 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$	9.4.3.30	$\int_0^1 \frac{e^{-x^2} - 1}{x^2} dx.$

10 РЯДЫ ФУРЬЕ

Содержание: периодические функции и их свойства, числовой тригонометрический ряд, ортогональные системы тригонометрических функций, тригонометрический ряд Фурье, разложение четных и нечетных функций в ряд Фурье, сходимость тригонометрического ряда, разложение в ряд Фурье функции, заданной на промежутке $(0;l)$.

10.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Рассмотрим периодическую функцию $y = f(x)$ с периодом $T = 2\pi$, заданную на промежутке $[-\pi; \pi]$.

Рядом Фурье функции $f(x)$ называется *тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (10.1.1)$$

где коэффициенты Фурье a_0, a_n, b_n ($n=1, 2, 3, \dots$) определяется по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \quad (10.1.2)$$

Если ряд (10.1.1) является рядом Фурье функции $f(x)$, то записывают

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (10.1.3)$$

Не для всякой функции можно построить её ряд Фурье (нельзя написать ряд Фурье функции, для которой интегралы в формулах (10.1.2) не существуют). Не всякая функция является суммой её ряда Фурье, даже если он сходится.

В формуле (10.1.3) вместо знака соответствия можно поставить знак равенства, если функция будет удовлетворять условиям теоремы.

Теорема 10.1.1 Если функция $f(x)$ с периодом $T=2\pi$ кусочно-дифференцируемая в промежутке $[-\pi; \pi]$, то её ряд Фурье сходится в любой точке $x \in \mathbf{R}$ и имеет сумму

$$S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}. \quad (10.1.4)$$

Из теоремы следует, что $S(x) = f(x)$ в точках непрерывности функции $f(x)$ и среднему арифметическому левостороннего и правостороннего пределов функции $f(x)$ в точках разрыва первого рода.

Ряд Фурье чётной функции содержит только члены с косинусами:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad (10.1.5)$$

где

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10.1.6)$$

Ряд Фурье чётной функции содержит только члены с синусами:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad (10.1.7)$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10.1.8)$$

Кусочно-дифференцируемая функция, заданная на полупериоде $[0; \pi]$, может быть продолжена в промежуток $[-\pi; 0]$ либо как чётная, либо как нечётная, в соответствии с чем её можно разложить в ряд Фурье или только по косинусам, или только по синусам кратных дуг.

Ряды Фурье периода $2l$. Если функция $f(x)$ и её производная $f'(x)$ в промежутке $[-l; l]$ длины $2l$ либо непрерывны, либо имеют лишь конечное число точек разрыва первого рода, то во всех точках непрерывности этого интервала справедливо разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (10.1.9)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (10.1.10)$$

В точках разрыва функции $f(x)$ и на концах промежутка $[-l; l]$ сумма ряда Фурье определяется формулой (10.1.4).

В случае разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье в произвольном промежутке $[a; a + 2l]$ длины $2l$ пределы интегрирования в формулах (10.1.10) следует заменить соответственно на значения a и $a + 2l$.

10.2 Примеры решения типовых задач

10.2.1 Воспользовавшись разложением функции $f(x) = x^2$ в ряд Фурье в интервале $[-\pi; \pi]$, найти сумму числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Решение. Так как заданная функция чётная, то разложение произведем по косинусам, т.е. коэффициенты $b_n = 0$, а коэффициенты a_0 и a_n определяются по формулам (10.1.6).

Найдем коэффициенты Фурье

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3\pi} x^3 \Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3};$$

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos kx \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2 \quad du = 2x dx \\ dv = \cos nx dx \quad v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right] = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \right) = \\
 &= -\frac{4}{\pi \cdot n} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \sin nx dx \quad v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right] = \frac{4x}{\pi \cdot n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} - \\
 &\quad - \frac{4}{\pi \cdot n^2} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx = (-1)^n \frac{4}{n^2} - \frac{4}{\pi \cdot n^3} \sin nx \Big|_0^{\pi} = (-1)^n \frac{4}{n^2}.
 \end{aligned}$$

Поэтому для значения $x \in [-\pi; \pi]$ заданная функция разлагается в ряд Фурье по формуле (10.1.5):

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Тогда при $x = \pi$ имеем $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n\pi}{n^2}$ или $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

10.3 Задания для решения на практическом занятии

10.3.1 Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье в интервале $(a; b)$.

10.3.1.1 $f(x) = x + 1$ в интервале $(-\pi; \pi)$.

10.3.1.2 $f(x) = x^2 + 1$ в интервале $(-2; 2)$.

10.3.1.3 $f(x) = (\pi - x)/2$ в интервале $(-\pi; \pi)$.

10.3.1.4 $f(x) = |x| + 1$ в интервале $(-1; 1)$.

10.3.1.5 $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$ в интервале $(-\pi; \pi)$.

10.3.1.6 $f(x) = |x - 1|$ в интервале $(-3; 3)$.

10.3.1.7 $f(x) = 2x$ в интервале $(-\pi; \pi)$.

10.3.1.8 $f(x) = 2x + 1$ в интервале $(-4; 4)$.

10.3.1.9 $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$ в интервале $(-\pi; \pi)$.

10.3.1.10 $f(x) = x^2$ в интервале $(0; 2\pi)$.

10.3.2 Разложить в ряд Фурье по синусам кратных дуг функцию $f(x) = \pi - x$ на отрезке $[0; \pi]$. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$.

10.3.3 Разложить в ряд Фурье по косинусам кратных дуг функцию $f(x) = 1 - x$ на отрезке $[0; 2]$. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

10.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

10.4.1 Воспользовшись разложением функции $f(x)$ в ряд Фурье в указанном интервале, найти сумму данного числового ряда.

10.4.1.1 $f(x) = x^2, \quad [-\pi; \pi], \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}.$

10.4.1.2 $f(x) = |x|, \quad (-\pi; \pi), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$

10.4.1.3 $f(x) = \frac{\pi}{4}, \quad (0; \pi), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}.$

10.4.1.4 $f(x) = |x|, \quad (-1; 1), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$

10.4.1.5 $f(x) = \cos x, \quad [0; \pi/2], \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n^2 - 1}.$

10.4.1.6 $f(x) = \pi^2 - x^2, \quad (-\pi; \pi), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}.$

10.4.1.7 $f(x) = \begin{cases} 0, & -3 < x \leq 0, \\ x, & 0 < x < 3, \end{cases} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$

10.4.1.8 $f(x) = |\sin x|, \quad (-\pi; \pi), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n^2 - 1}.$

10.4.1.9 $f(x) = \left| \cos \frac{x}{2} \right|, \quad [-\pi; \pi], \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1 - 4n^2}.$

10.4.1.10 $f(x) = |\sin x|, \quad (-\pi; \pi), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$

10.4.1.11 $f(x) = x, \quad (0; \pi), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$

10.4.1.12 $f(x) = x^2, \quad [0; \pi], \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$

10.4.1.13 $f(x) = \pi x - x^2, \quad (0; \pi), \quad \text{по синусам,} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^3}.$

$$10.4.1.14 \quad f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

$$10.4.1.15 \quad f(x) = x^2, \quad (-\pi; \pi), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

$$10.4.1.16 \quad f(x) = x, \quad [0; \pi], \quad \text{по косинусам,} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

$$10.4.1.17 \quad f(x) = 3 - |x|, \quad (-5; 5), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

$$10.4.1.18 \quad f(x) = 5x - 1, \quad (-5; 5), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}.$$

$$10.4.1.19 \quad f(x) = x^2 + 1, \quad [0; \pi], \quad \text{по косинусам,} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}.$$

$$10.4.1.20 \quad f(x) = 3 - x, \quad (-2; 2), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n-1}.$$

$$10.4.1.21 \quad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 3/2, \\ -1, & 3/2 < x < 3, \end{cases} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

$$10.4.1.22 \quad f(x) = (x - \pi)^2, \quad [0; \pi], \quad \text{по косинусам,} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}.$$

$$10.4.1.23 \quad f(x) = |x|, \quad (-2; 2), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

$$10.4.1.24 \quad f(x) = 1 - x/2, \quad [0; 2], \quad \text{по синусам,} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

$$10.4.1.25 \quad f(x) = \pi/4 - x/2, \quad (-\pi; \pi), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

$$10.4.1.26 \quad f(x) = \pi - x, \quad [0; \pi], \quad \text{по синусам,} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

$$10.4.1.27 \quad f(x) = x \sin x, \quad [-\pi; \pi], \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2 - 1}.$$

$$10.4.1.28 \quad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ -1, & 1 < x < 2, \end{cases} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

$$10.4.1.29 \quad f(x) = |\cos x|, \quad [-\pi; \pi], \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

$$10.4.1.30 \quad f(x) = |x| - 5, \quad (-2; 2), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Жевняк, Р. М. Высшая математика. В 5 ч. Ч. 3 / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1985. – 208 с.
2. Жевняк, Р. М. Высшая математика. В 5 ч. Ч. 4 / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1987. – 240 с.
3. Ефимов, А. В. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа / А. В. Ефимов [и др.]. – Москва : Наука, 1984. – 460 с.
4. Индивидуальные задания по высшей математике : учеб. пособие. В 4 ч. Ч. 3. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля / А. П. Рябушко [и др.] ; под общ. ред. А. П. Рябушко. – 6-е изд. – Минск : Выш. шк., 2013. – 367 с. : ил.
5. Руководство к решению задач по высшей математике. В 2 ч. Ч. 2 / Е. И. Гурский [и др.]. – Минск : Выш. шк., 1989. – 400 с.
6. Чудесенко, В. Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математике (Типовые расчёты) / В. Ф. Чудесенко. – Москва : Высш. школа, 1983. – 111 с.
7. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчёты / Л. А. Кузнецов. – Москва : Высш. школа, 1983. – 168 с.
8. Кудрявцев, В. А. Краткий курс высшей математики / В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович. – Москва : Наука, 1989. – 655 с.
9. Герасимович, А. И. Математический анализ. В 2 ч. / А. И. Герасимович, П. П. Кеда, М. Б. Суган. – Минск : Выш. шк., 1990. – Ч. 1–2.
10. Математика. Линейные операторы векторных пространств. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной : практикум / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2017. – 120 с.
11. Математика. Аналитическая геометрия. Линейная и векторная алгебра: методические указания к практическим занятиям для студентов первого курса специальностей 1-40 05 01-01 «Информационные системы и технологии (в проектировании и производстве)», 1-36 01 01 «Технология машиностроения», 1-53 01 01-01 «Автоматизация технологических процессов и производств (машиностроение и приборостроение)» / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2017. – 103 с.
12. Математика. Интегральное исчисление функции одной переменной. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных : практикум / сост. А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2018. – 98 с.
13. Математика. Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений. Операционное исчисление : практикум / сост. А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2019. – 101 с.
14. Высшая математика: задания для выполнения типовых расчётов для студентов первого курса механико-технологических специальностей / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2010. – 71 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Таблица А.1 – Таблица производных основных элементарных функций

1)	$C' = 0$, где $C = Const$;	2)	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
3)	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, где $a > 0, a \neq 1$;	4)	$(e^x)' = e^x$
5)	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$, $a > 0, a \neq 1, x > 0$;	6)	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$, где $x > 0$;
7)	$(\sin x)' = \cos x$;	8)	$(\cos x)' = -\sin x$;
9)	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;	10)	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
11)	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, где $ x < 1$;	12)	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, где $ x < 1$;
13)	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;	14)	$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;
15)	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;	16)	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;
17)	$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;	18)	$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$, где $x \neq 0$.

Таблица А.2 – Таблица основных неопределённых интегралов

1)	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$;	2)	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$;
3)	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1, x > 0$;	4)	$\int e^x dx = e^x + C$;
5)	$\int \sin x dx = -\cos x + C$;	6)	$\int \cos x dx = \sin x + C$;
7)	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;	8)	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;
9)	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$;	10)	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$;
11)	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a \neq 0$;	12)	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, x < a $;
13)	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C$;	14)	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$;
16)	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$;	17)	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$;
18)	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$;	19)	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C, \text{ где } x \neq 0$.

Учебное издание

**МАТЕМАТИКА.
КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ. РЯДЫ**

Практикум

Составители:

Коваленко Александр Вильямович
Джежора Александр Александрович
Дмитриев Александр Петрович
Завацкий Юрий Александрович
Вардомацкая Елена Юрьевна

Редактор *Т. А. Осипова*

Корректор *Т. А. Осипова*

Компьютерная верстка *А. В. Коваленко*

Подписано к печати _____. Формат _____. Усл. печ. ли-
стов _____.

Уч.-изд. листов _____. Тираж _____ экз. Заказ № _____.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»

210038, г. Витебск, Московский пр., 72.

Отпечатано на ризографе учреждения образования

«Витебский государственный технологический университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1497 от 30 мая 2017 г.