

Г.Н. ФЕДОСЕЕВ

**ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА НИТИ,
ТКАНИ И ТРИКОТАЖА**

Курс лекций

Витебск
ВГТУ
2009

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
"ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ"**

Федосеев Г.Н.

**ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА НИТИ, ТКАНИ И
ТРИКОТАЖА**

КУРС ЛЕКЦИЙ

для студентов специальности 1-500101

"Технология пряжи, тканей, трикотажа и нетканых материалов"
дневной формы обучения

**ВИТЕБСК
2009**

УДК 531.3:67/68(075.8)

ББК 22.2 : 37.23

Ф33

Рецензент :

Коган А.Г., доктор технических наук, заведующий кафедрой "Прядение натуральных и химических волокон"

Рекомендовано в качестве учебного пособия редакционно-издательским советом УО "ВГТУ", протокол № 9 от 29 декабря 2008 года.

Федосеев, Г. Н. Прикладная механика нити, ткани и трикотажа : курс лекций / Г. Н. Федосеев. – Витебск : УО "ВГТУ", 2009. – 58 с.

ISBN 978-985-481-160-4

В курсе лекций приводятся основные положения кинематики и динамики нерастяжимой и растяжимой идеально гибкой нити, рассмотрен ряд прикладных задач.

ISBN 978-985-481-160-4

УДК 531.3:67/68(075.8)

ББК 22.2 : 37.23

Ф 33

© Федосеев Г.Н., 2009

© УО "ВГТУ", 2009

Содержание

Лекция 1. Относительная длина и продольная скорость нити	5
1.1. Классификация нитей по А.П. Минакову.....	5
1.2. Лагранжева и эйлера координаты нити.....	5
1.3. Относительная длина нити.....	9
1.4. Продольная скорость нити.....	9
1.5. Производные функции, заданной на нити.....	9
1.6. Связь относительной длины с продольной скоростью.....	10
Лекция 2. Уравнение Дарбу	11
2.1. Производная вектора, определенного во вращающейся системе координат.....	11
2.2. Вектор Дарбу.....	14
2.3. Дифференцирование векторной функции, заданной на нити.....	15
2.4. Уравнение Дарбу.....	16
2.5. Твердо – контурное движение.....	17
Лекция 3. Кинематика нити	18
3.1. Скорость точки нити.....	18
3.2. Геометрическое соотношение для скоростей.....	18
3.3. Ускорение точки нити.....	21
3.4. Ускорение точки нити как результат теоремы о сложении ускорений.....	22
Лекция 4. Уравнения движения нити	23
4.1. Второй закон динамики в приложении к нити.....	23
4.2. Уравнение Дарбу в проекциях на оси натурального трехгранника.....	24
4.3. Геометрическое соотношение для скоростей в проекциях на оси натурального трехгранника.....	26
4.4. Скалярные уравнения.....	27
4.5. Случай подвижного относительно нити начала отсчета дуговой координаты.....	27
Лекция 5. Плоская задача	28
5.1. Уравнение плоской задачи.....	28
5.2. Уравнения задачи Эйлера.....	28
5.3. Формула Эйлера.....	31
5.4. Условие равновесия нити на шкиве.....	32
Лекция 6. Скольжение нерастяжимой нити по шероховатому шкиву	32
6.1. Уравнения скольжения нерастяжимой нити по неподвижному шкиву.....	32
6.2. Принцип Даламбера в приложении к нерастяжимой нити.....	34
6.3. Интегро – дифференциальное уравнение скольжения нерастяжимой нити.....	35
6.4. Режим постоянной скорости.....	37
Лекция 7. Нить в декартовых координатах	38
7.1. Уравнения движения в декартовых координатах.....	38
7.2. Нерастяжимая нить в потоке воздуха.....	39

7.3. Скорость нерастяжимой нити в воздушном потоке.....	42
7.4. Теорема об изменении кинетической энергии в приложении к нити на рис. 7.2.....	42
7.5. Уравнение Мещерского в приложении к нити на рис. 7.2.....	43
Лекция 8. Малые свободные поперечные колебания нити.....	43
8.1. Волновое уравнение.....	43
8.2. Метод Фурье.....	46
8.3. Колебания протягиваемой нити.....	48
Лекция 9. Резонанс в вынужденных и параметрических колебаниях нити.....	50
9.1. Вынужденные колебания нити при перемотке.....	50
9.2. Резонанс.....	54
9.3. Параметрические поперечные колебания нити.....	54
9.4. Уравнение Матье.....	55
9.5. Параметрический резонанс.....	56
Литература.....	58

Лекция 1. Относительная длина и продольная скорость нити

Нить – протяженное материальное тело, длина которого много больше поперечных размеров. Примеры нитей: ткацкие волокна, шнуры, тросы, канаты и т.п. Модель нити – геометрическая кривая (лишенная толщины), которой приписана конечная масса.

На рис. 1.1 изображено полотно (ткань, бумага и т.п.) с плоско – параллельными кромками, принадлежащими параллельным плоскостям Π_1 и Π_2 . Плоско – параллельное движение полотна полностью определится, если будет изучено движение бесконечно узкой полоски полотна – нити $N - N$, изучено в рамках прикладной механики нити.

1.1. Классификация нитей по А.П. Минакову [1]

На рис. 1.2 показаны внутренние силовые факторы в поперечном сечении нити: натяжение $\bar{T}$, перерезывающая сила $\bar{Q}$, изгибающий момент M_u , крутящий момент M_k .

Если нить сопротивляется только растяжению ($Q = 0, M_u = 0, M_k = 0$), нить называется идеально гибкой. При этом рассматриваются нерастяжимая и растяжимая нити.

Если изгибающий момент $M_u \neq 0$, и может быть, натяжение $T \neq 0$, нить называется сопротивляющейся изгибу.

Если крутящий момент $M_k \neq 0$ и, может быть, натяжение $T \neq 0$, нить называется сопротивляющейся кручению.

1.2. Лагранжева и эйлерова координаты нити.

Дуговая координата точки нерастяжимой нити отсчитывается вдоль нити от начала 0, неподвижного на нити (рис. 1.3). В случае растяжимой нити координата s укажет "место", в котором в различные моменты времени окажутся различные точки нити (рис. 1.5). Если нить мысленно заключить в нерастяжимую трубку, эту эйлерову координату измерим, "перемещаясь" вдоль трубки (рис. 1.4). Сами же точки нити можно различить, пользуясь лагранжевыми координатами, которые отсчитываются вдоль нерастянутой нити и неизменны во времени. Начало отсчета лагранжевых и эйлеровых координат полагается общим.

Рассмотрение рис. 1.5 дает зависимость

$$s_0 = s_0(s, t), \quad (1.1)$$

тогда как рис. 1.6 – зависимость

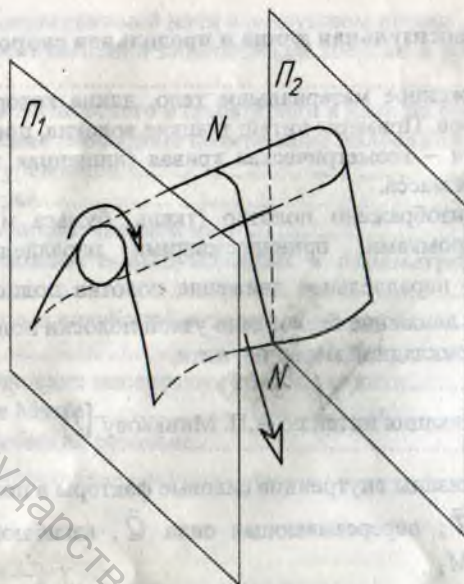


Рис. 1.1. Плоско - параллельное движение полотна

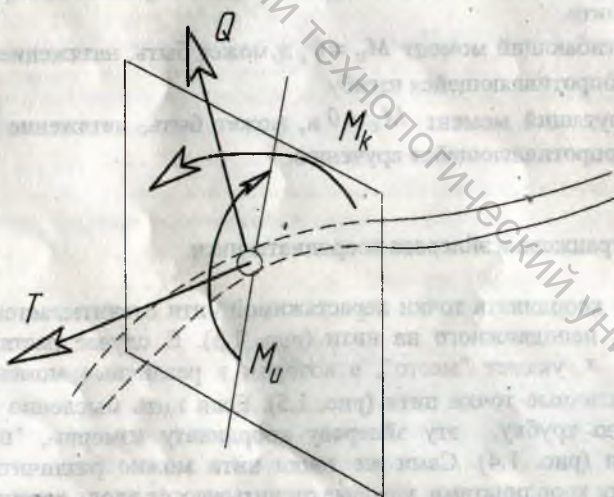


Рис. 1.2. Внутренние силовые факторы в поперечном сечении нити

Рис. 1.3. Дуговая координата точки нити

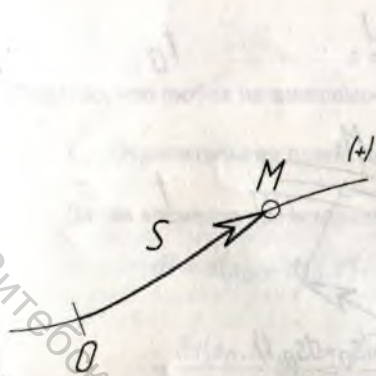


Рис. 1.4. Эйлерова координата

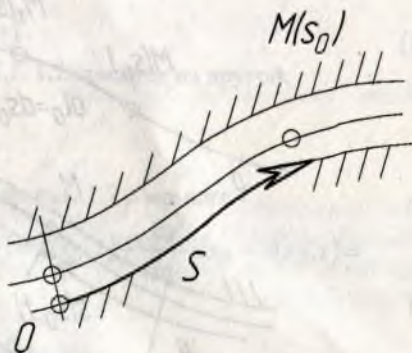


Рис. 1.5. В различные моменты времени в заданном “месте трубки” оказываются различные точки нити

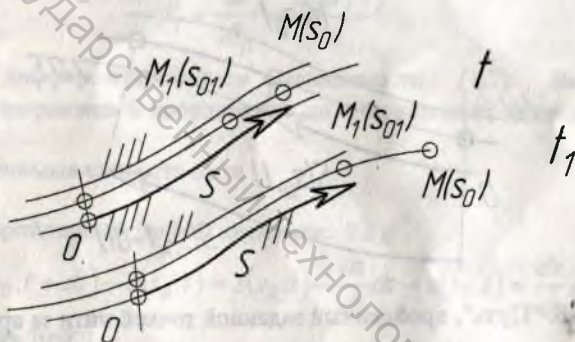
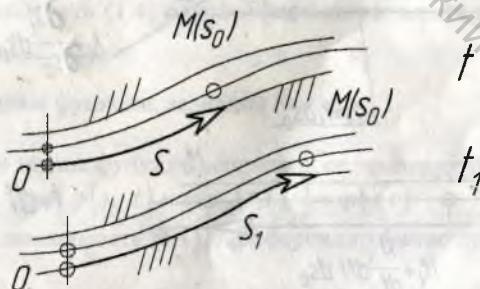


Рис. 1.6. В различные моменты времени заданная точка нити оказывается в различных “местах трубки”



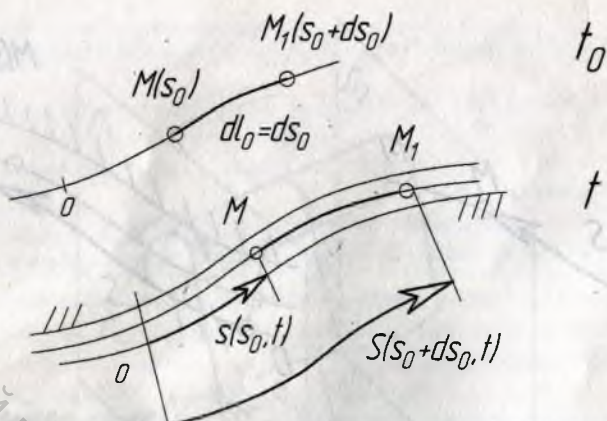


Рис. 1.7. Элемент нити в произвольный момент времени

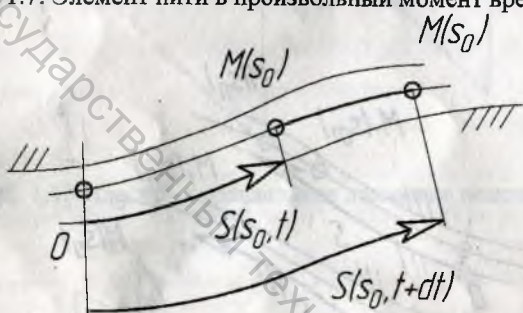


Рис. 1.8. "Путь", пройденный заданной точкой нити за время dt

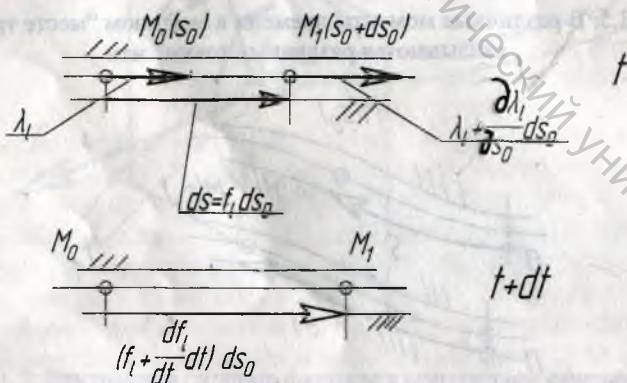


Рис. 1.9. Изменение длины элемента нити за счет различных скоростей его концов

$$s = s(s_0, t). \quad (1.2)$$

Понятно, что любая из зависимостей (1.1, 1.2) следует из другой.

1.3. Относительная длина нити

Длина элемента растяжимой нити на рис. 1.7 в момент t .

$$\begin{aligned} dl &= s(s_0 + ds_0, t) - s(s_0, t) = s(s_0, t) + \frac{\partial s}{\partial s_0} ds_0 - s(s_0, t) = \\ &= \frac{\partial s(s_0, t)}{\partial s_0} ds_0 = \frac{\partial s(s_0, t)}{\partial s_0} dl_0. \end{aligned}$$

относительная длина

$$f_t = \frac{dl}{dl_0} = \frac{\partial s(s_0, t)}{\partial s_0} \quad (1.3)$$

получается дифференцированием зависимости (1.2). Величине (1.3) определяется лагранжевой координатой, на что указывает индекс t .

1.4. Продольная скорость нити

"Путь", пройденный точкой нити, (рис. 1.8)

$$dL = s(s_0, t + dt) - s(s_0, t) = s(s_0, t) + \frac{ds}{dt} dt - s(s_0, t) = \frac{ds}{dt} dt,$$

откуда скорость точки

$$\lambda_t = \frac{dL}{dt} = \frac{ds(s_0, t)}{dt}. \quad (1.4)$$

Продольная скорость (1.4) определяется лагранжевой координатой точки нити.

1.5. Производные функции, заданной на нити

Пусть на нити задана функция, например, ее температура

$$\varphi = \varphi(s_0, t) = \varphi[s_0(s, t), t] = \varphi(s, t),$$

где использована зависимость (1.1). Дифференцирование при "замороженном" времени

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi(s_0, t)}{\partial s_0} ds_0 = \frac{\partial \varphi(s, t)}{\partial s} ds$$

дает соотношение

$$\frac{\partial \varphi[s_0(s, t), t]}{\partial s_0} = \frac{\partial \varphi(s, t)}{\partial s} \cdot \frac{ds}{ds_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial s_0} = \frac{\partial \varphi(s, t)}{\partial s} \cdot f(s, t),$$

ибо при "замороженном" времени

$$\frac{ds}{ds_0} = \frac{\partial s(s_0, t)}{\partial s_0} = f[s_0(s, t), t] = f(s, t)$$

- см. определение (1.3). Итак, производная "температуры" точки нити в заданный момент времени, т.е. скорость изменения "температуры" при следовании вдоль нити, определенная эйлеровой координатой "места", где находится точка,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s_0} = f \frac{\partial \varphi}{\partial s}. \quad (1.5)$$

Индекса при f в соотношении (1.5) нет, что указывает на использование эйлеровой координаты.

Пусть теперь точка нити задана ($s_0 = \text{const}$), а время "разморожено": приращение "температуры" точки

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds,$$

откуда производная

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{ds}{dt},$$

но, как следует из определения (1.4),

$$\frac{ds(s_0, t)}{dt} = \lambda[s_0(s, t), t] = \lambda(s, t),$$

т.е. производная "температуры" точки нити по времени

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \quad (1.6)$$

где частная производная $\partial \varphi / \partial t$ относится к "месту" трубки, где находится точка нити.

1.6. Связь относительной длины с продольной скоростью

На рис. 1.9 показано изменение длины элемента нити $M_0 M_1$ за время dt . Длина элемента в момент $t + dt$ дается суммой длины в момент t и произведения относительной скорости $(\partial \lambda_1 / \partial s_0) ds_0$ на время dt :

$$\left(f_1 + \frac{df_1}{dt} dt \right) ds_0 = f_1 ds_0 + \frac{\partial \lambda_1}{\partial s_0} ds_0 dt,$$

откуда

$$\frac{df_i}{dt} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial s_0}, \quad (1.7)$$

или, если использовать выражения (1.5) и (1.6),

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \lambda \frac{\partial f}{\partial s} = f \frac{\partial \lambda}{\partial s}. \quad (1.8)$$

Лекция 2. Уравнение Дарбу

2.1. Производная вектора, определенного во вращающейся системе координат

Бесконечно малый угол поворота твердого тела вокруг неподвижной оси может быть изображен вектором $d\vec{\varphi}$, направленным вдоль оси вращения (рис. 2.1). Приращение радиуса - вектора точки M тела дается векторным произведением

$$d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}.$$

Если указанный поворот совершается за время dt , скорость точки M

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r}, \quad (2.1)$$

где вектор

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt},$$

направленный вдоль оси вращения, называется угловой скоростью твердого тела. Производная (2.1) приобретает вид

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (2.2)$$

Если тело вращается вокруг неподвижной точки (рис. 2.1), вращение это может быть представлено в момент времени t поворотом за время dt вокруг мгновенной оси вращения (м.о.в.) - с мгновенной угловой скоростью $\vec{\omega}(t)$. Формула (2.2) пригодна и в этом случае.

На рис. 2.2 изображен вектор $\vec{p}$, определенный во вращающейся системе координат O_1xyz , т.е.

$$\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Производная (точкой обозначается дифференцирование по времени)

$$\dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}) + x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}} + z\dot{\vec{k}}.$$

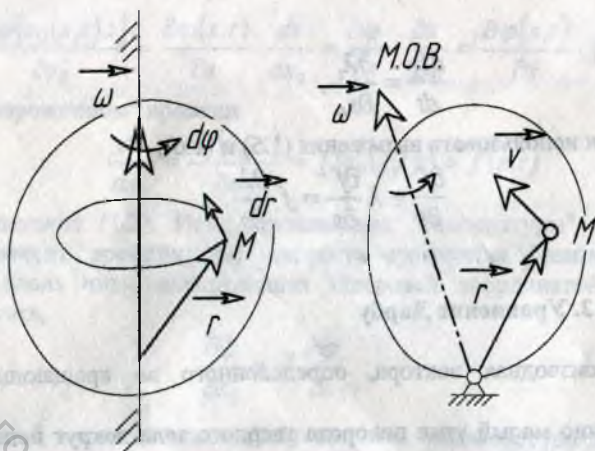


Рис. 2.1. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси и вокруг неподвижной точки

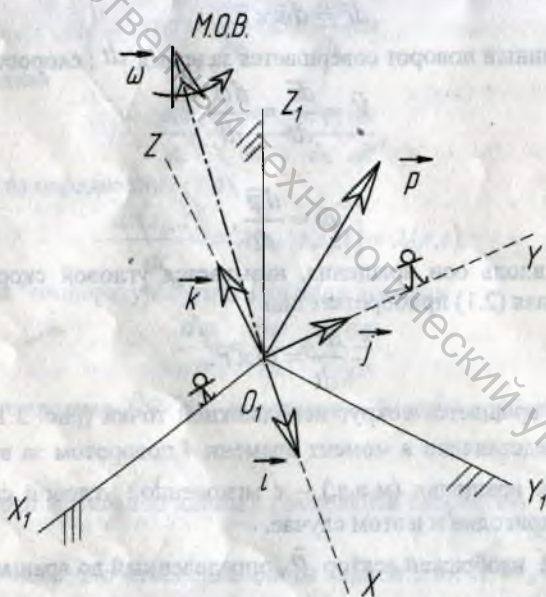


Рис. 2.2. Вектор $\vec{p}$, определенный во вращающейся вокруг начала O_1 системе координат O_1xyz

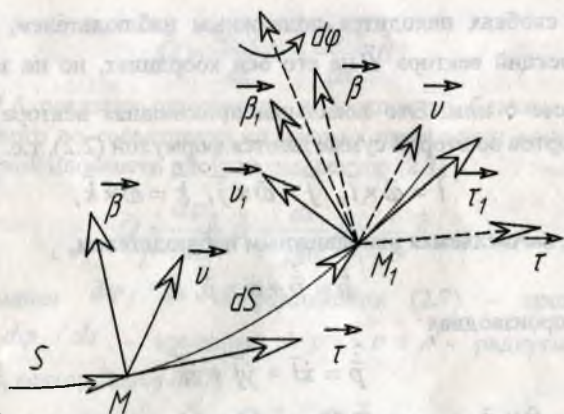


Рис. 2.3. Натуральный трехгранник и его "поворот"

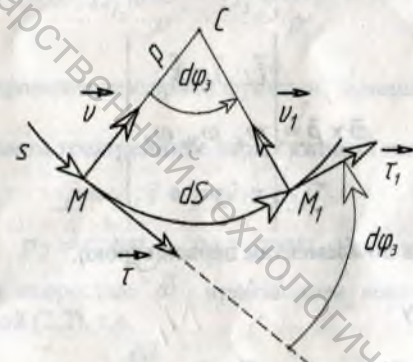


Рис. 2.4. "Поворот" натурального трехгранника окружности

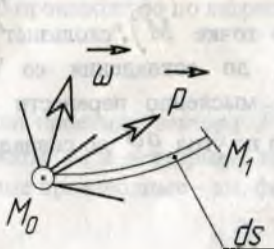


Рис. 2.5. Вращающийся элемент нерастяжимой нити

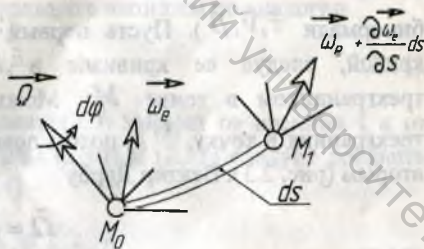


Рис. 2.6. Элемент трубки в момент t

Сумма в скобках находится подвижным наблюдателем, "замечающим" изменение проекций вектора $\vec{P}$ на его оси координат, но не замечающим их вращения вместе с ним. Это локальная производная вектора $\vec{P}$ $d\vec{P}/dt$. Производные ортов во второй сумме даются формулой (2.2), т.е.

$$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega} \times \vec{i}, \quad \dot{\vec{j}} = \vec{\omega} \times \vec{j}, \quad \dot{\vec{k}} = \vec{\omega} \times \vec{k},$$

и производная, вычисляемая неподвижным наблюдателем,

$$\dot{\vec{P}} = \tilde{\vec{P}} + \vec{\omega} \times \vec{P}, \quad (2.3)$$

где локальная производная

$$\tilde{\vec{P}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}. \quad (2.4)$$

Слагаемое $\vec{\omega} \times \vec{P}$ в сумме (2.3) есть результат вращения вектора $\vec{P}$ вместе с подвижной системой координат с угловой скоростью $\vec{\omega}$.

Заметим, что это векторное произведение может быть представлено определителем

$$\vec{\omega} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}; \quad (2.5)$$

его удобно раскрывать по элементам первой строки.

2.2. Вектор Дарбу

Рассмотрим два бесконечно близких натуральных трехгранника кривой (натуральный трехгранник образован ортами касательной, главной нормали и бинормали $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$). Пусть первый из них в точке M "скользит" вдоль кривой, следуя ее кривизне и кручению, до совпадения со вторым трехгранником в точке M . Можно иначе: мысленно перенести первый трехгранник в точку M_1 , потом повернуть его на угол $d\varphi$ до совпадения со вторым (рис. 2.3). Вектор Дарбу

$$\vec{\Omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{ds}. \quad (2.6)$$

По мере "скольжения" первого трехгранника вдоль кривой, он поворачивается вокруг касательной и вокруг бинормали:

$$d\vec{\varphi} = d\varphi_1 \vec{\tau} + d\varphi_3 \vec{\beta}.$$

Вектор (2.6)

$$\vec{\Omega} = \frac{d\vec{\varphi}_1}{ds} \vec{\tau} + \frac{d\varphi_3}{ds} \vec{\beta}. \quad (2.7)$$

На рис. 2.4 показана окружность и бесконечно близкие трехгранники. "Поворот" первого до совмещения со вторым происходит вокруг бинормали, перпендикулярной плоскости рисунка, т.е. вектор (2.7)

$$\vec{\Omega} = \frac{d\varphi_3}{ds} \vec{\beta} = \frac{ds}{\rho ds} \vec{\beta} = \frac{1}{\rho} \vec{\beta}.$$

производная $d\varphi_3/ds$ в разложении (2.7) – кривизна кривой. Производная $d\varphi_1/ds$ – кручение $1/\rho'$; ρ и ρ' – радиусы кривизны и кручения. Итак, вектор Дарбу (2.7)

$$\vec{\Omega} = \Omega_1 \vec{\tau} + \Omega_3 \vec{\beta}, \quad (2.8)$$

где проекции вектора Дарбу на оси натурального трехгранника

$$\Omega_1 = \frac{1}{\rho'}, \quad \Omega_3 = \frac{1}{\rho}.$$

2.3. Дифференцирование векторной функции, заданной на нити

Пусть в натуральном трехграннике нерастяжимой нити задан вектор

$$\vec{p} = p_1 \vec{\tau} + p_2 \vec{\nu} + p_3 \vec{\beta}, \quad (2.9)$$

причем $p_1 = \text{const}$, $p_2 = \text{const}$, $p_3 = \text{const}$. Если элемент нити (рис. 2.5) вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$, производная вектора (2.9) по времени определяется формулой (2.2), т.е.

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \vec{\omega} \times \vec{p}, \quad (2.10)$$

частную производную по лагранжевой координате напомним по аналогии

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial s} = \vec{\Omega} \times \vec{p}. \quad (2.11)$$

Если проекции вектора $\vec{p}$ в разложении (2.9) зависят от времени t и от координаты s , к векторным произведениям (2.10) и (2.11) следует добавить локальные производные – см. формулу (2.4) –

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \dot{p}_1 \vec{\tau} + \dot{p}_2 \vec{\nu} + \dot{p}_3 \vec{\beta}, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial s} = p'_1 \vec{\tau} + p'_2 \vec{\nu} + p'_3 \vec{\beta} \quad (2.13)$$

(штрихом отмечено дифференцирование по координате).

Если нить растяжимая, формулы (2.10 – 2.13) относятся к трубке, облегающей нить, и s - эйлерова координата (рис. 1.4), причем угловая скорость $\vec{\omega}$ - угловая скорость элемента трубки (назовем ее переносной и обозначим $\vec{\omega}_e$).

Производные (2.10 – 2.11), отнесенные к точке нити $M_0(S_0)$, находятся по формулам (1.5) и (1.6):

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial s_0} = f \frac{\partial \vec{p}}{\partial s}, \quad (2.14)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \vec{p}}{\partial s}, \quad (2.15)$$

где производные

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial s} = \vec{\Omega} \times \vec{p}, \quad \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \vec{\omega}_e \times \vec{p}; \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{p} \quad (2.16)$$

($\vec{\omega}$ - угловая скорость элемента нити, назовем ее абсолютной). Формулы (2.14 – 2.15) приобретают вид

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial s_0} = f \vec{\Omega} \times \vec{p},$$

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \frac{d\vec{p}}{dt} - \lambda \frac{\partial \vec{p}}{\partial s} = (\vec{\omega} - \lambda \vec{\Omega}) \times \vec{p},$$

т.е. переносная угловая скорость (угловая скорость элемента трубки – см. формулы (2.16) –

$$\vec{\omega}_e = \vec{\omega} - \lambda \vec{\Omega}, \quad (2.17)$$

относительная угловая скорость элемента нити во вращении относительно трубки

$$\vec{\omega}_r = \lambda \vec{\Omega}. \quad (2.18)$$

2.4. Уравнение Дарбу

На рис. 2.6. изображен элемент трубки в момент t . По истечению времени dt его внутренняя геометрия, характеризуемая вектором Дарбу $\vec{\Omega}$, изменилась, т.е. угол (рис. 2.3)

$$d\vec{\varphi} + \Delta(d\vec{\varphi}) = \left(\vec{\Omega} + \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} dt \right) ds, \quad d\vec{\varphi} = \vec{\Omega} ds, \quad (2.19)$$

где производная $\partial \vec{\Omega} / \partial t$ - локальная производная, ибо речь идет о внутренней геометрии трубки, на которой не сказывается поворот трубки как целого.

С другой стороны,

$$d\vec{\varphi} + \Delta(d\vec{\varphi}) = d\vec{\varphi} + \left(\frac{\partial \vec{\omega}_e}{\partial s} ds \right) dt, \quad (2.20)$$

ибо изменение внутренней геометрии трубки может произойти только из-за разности угловых скоростей в точках M_0 и M_1 .

Приравнявая правые части выражений (2.19 – 2.20), найдем уравнение Дарбу

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{\omega}_e}{\partial s}. \quad (2.21)$$

Обратившись к формулам (2.3) и (2.17), напомним:

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} - \vec{\omega} \times \vec{\Omega}, \quad \frac{\partial \vec{\omega}_e}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} (\vec{\omega} - \lambda \vec{\Omega}).$$

После подстановки в уравнение (2.21):

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial s} - \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = \vec{\Omega} \times \vec{\omega} + \frac{\partial}{\partial s} (\lambda \vec{\Omega}) \quad (2.22)$$

2.5. Твердо – контурное движение

Твердо – контурным называется такое движение нити, при котором она может быть заключена в твердую трубку, внутренняя геометрия которой не изменяется, т.е. не изменяются кручение и кривизна (2.8) трубки, - $\partial \vec{\Omega} / \partial t = 0$. Из уравнения Дарбу (2.21) сразу же следует, что производная

$$\frac{\partial \vec{\omega}_e}{\partial s} = 0,$$

или переносная угловая скорость (2.17) – произвольная функция времени:

$$\vec{\omega}_e = \vec{\omega} - \lambda \vec{\Omega} = \vec{\eta}(t).$$

Можно иначе:

$$\vec{\omega} = \lambda \vec{\Omega} + \vec{\eta}(t),$$

или - см. формулу (2.18) –

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e$$

- уравнение Дарбу (2.21) становится известной теоремой о сложении угловых скоростей.

Лекция 3. Кинематика нити

3.1. Скорость точки нити

Скорость точки нити с лагранжевой координатой s_0

$$\vec{V}_t = \frac{dr_t}{dt}.$$

Переходя к эйлеровым переменным, согласно правилу (2.15), получим

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \vec{r}}{\partial s}, \quad (3.1)$$

где первая из производных в правой части дает скорость той точки нерастяжимой трубки (введенной мысленно!), с которой совпадает движущаяся точка $M(s_0)$ растягиваемой нити. Вторая производная (рис. 3.1)

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \vec{\tau}. \quad (3.2)$$

Действительно, при $\Delta s \rightarrow 0$ вектор $\Delta \vec{r} / \Delta s$ поворачивается вместе с вектором $\overline{MM_1}$ вокруг точки M , стремясь к касательной нити; его модуль

$$\left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right| = \frac{MM_1}{MM_1} \rightarrow 1.$$

Если трубка – подвижная система отсчета, производная $\partial \vec{r} / \partial t$ – переносная скорость точки нити $\vec{V}_e$, тогда как произведение $\lambda \partial \vec{r} / \partial s = \lambda \vec{\tau}$ – относительная скорость $\vec{V}_r$, и скорость (3.1) есть результат известной [2] теоремы о сложении скоростей

$$\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \lambda \vec{\tau}. \quad (3.3)$$

3.2. Геометрическое соотношение для скоростей

На рис. 3.2 показан абсолютно твердый стержень. Скорость точек В и А связаны известным [2] соотношением

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \quad (3.4)$$

где скорость точки В во вращении вокруг полюса

$$\vec{V}_{BA} = \vec{\omega} \times \overline{AB};$$

или, если учесть, что вектор $\overline{AB} = \Delta x \cdot \vec{\tau}$ ($\vec{\tau}$ – орт направления $\overline{AB}$),

$$\vec{V}_{BA} = (\vec{\omega} \times \vec{\tau}) \Delta x.$$

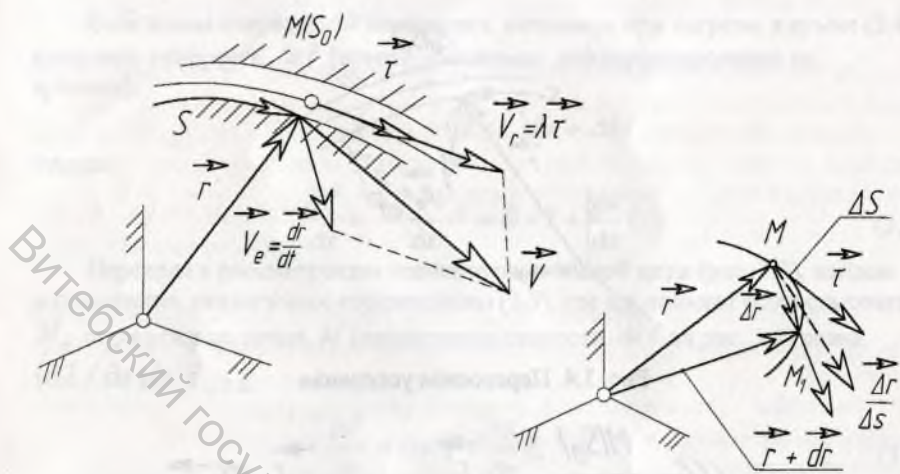


Рис. 3.1. Сложение скоростей нити

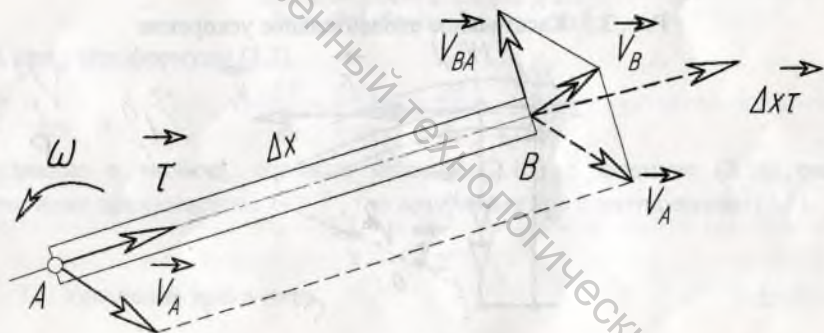


Рис. 3.2. Скорости двух точек твердого стержня

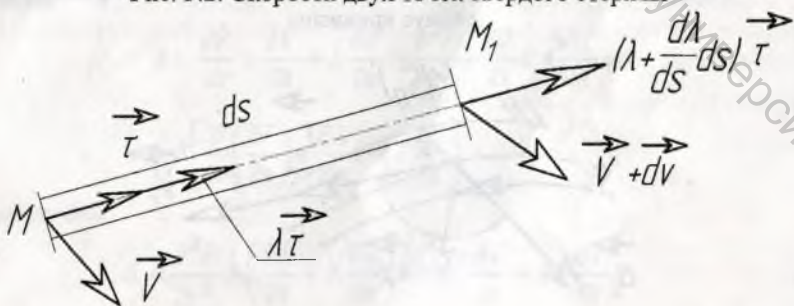


Рис. 3.3. Элемент нити

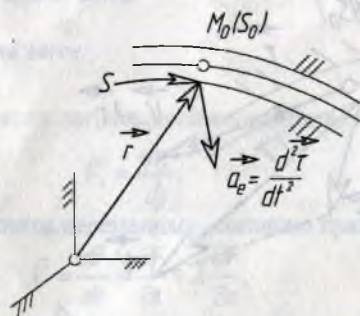


Рис. 3.4. Переносное ускорение

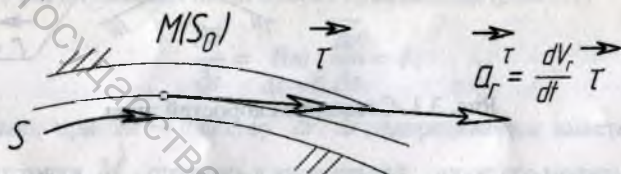


Рис. 3.5. Касательное относительное ускорение

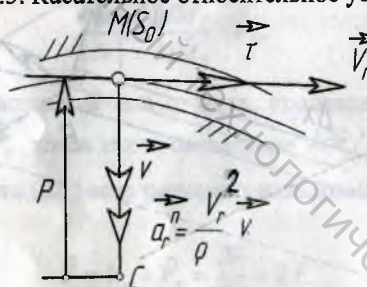


Рис. 3.6. Нормальное относительное ускорение: С – центр кривизны нити, Р – радиус кривизны

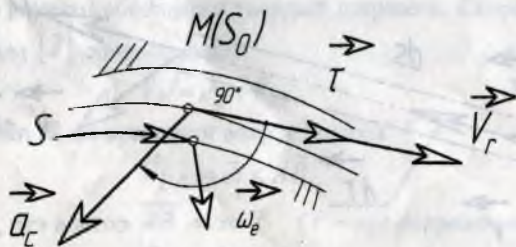


Рис. 3.7. Кориолисово ускорение

Если длина стержня AB изменяется, например, при нагреве, к сумме (3.4) прибавится скорость $\Delta \dot{x} \vec{\tau}$ (точкой обозначено дифференцирование по времени):

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + (\vec{\omega} \times \vec{\tau}) \Delta x + \Delta \dot{x} \vec{\tau},$$

откуда

$$\frac{\Delta \vec{V}}{\Delta x} = \frac{\vec{V}_B - \vec{V}_A}{\Delta x} = \vec{\omega} \times \vec{\tau} + \frac{\Delta \dot{x}}{\Delta x} \vec{\tau}. \quad (3.5)$$

Переходя к рассмотрению элемента растяжимой нити (рис. 3.3), найдем соотношение, аналогичное соотношению (3.5), где продольная скорость точки M_1 относительно точки M (аналогичная скорости $\Delta \dot{x} \vec{\tau}$ на рис. 3.2) равна $(\partial \lambda / \partial s) ds \vec{\tau}$, т.е.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial s} = \vec{\omega} \times \vec{\tau} + \frac{\partial \lambda}{\partial s} \vec{\tau}. \quad (3.6)$$

Геометрическое соотношение для скоростей (3.6) можно получить и формальным дифференцированием суммы (3.3):

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial s} \vec{\tau} + \lambda \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial s},$$

или, при учете формулы (3.2),

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial s} = \left(\frac{\partial \vec{\tau}}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial s} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial s} \vec{\tau}.$$

Выражение в скобках, согласно правилу (2.15) и формуле (2.16), равно векторному произведению $\vec{\omega} \times \vec{\tau}$, что возвращает нас к соотношению (3.6).

3.3. Ускорение точки нити

Продифференцируем скорость (3.3) по времени: согласно правилу (2.15) ускорение

$$\begin{aligned} \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} &= \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \vec{V}}{\partial s} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial t} \vec{\tau} + \lambda \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial t} + \\ &+ \lambda \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial s} \vec{\tau} + \lambda \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial s} \right], \end{aligned} \quad (3.7)$$

или ускорение

$$\vec{a} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial s} \right) \vec{\tau} + \lambda^2 \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial s} + 2\lambda \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial t}. \quad (3.8)$$

Здесь учтена формула (3.2).

3.4. Ускорение точки нити как результат теоремы о сложении ускорений

По теореме о сложении ускорений [2] ускорение точки равно сумме переносного, относительного и кориолисова (поворотного) ускорений.

Переносное ускорение точки нити - ускорение той точки подвижной системы отсчета (здесь трубки), с которой в данный момент совпадает движущаяся точка, т.е. переносное ускорение (рис. 3.4).

$$\vec{a}_e = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2}. \quad (3.9)$$

В относительном движении точка нити движется вдоль криволинейной трубки. Относительное ускорение складывается из касательного и нормального ускорений.

Величина касательного относительного ускорения получается дифференцированием величины относительной скорости (рис. 3.1): согласно правилу (1.6)

$$a_r^{\tau} = \frac{dV_r}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial s},$$

вектор касательного относительного ускорения (рис. 3.5)

$$\vec{a}_r^{\tau} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial s} \right) \vec{\tau}. \quad (3.10)$$

Величина нормального относительного ускорения (рис. 3.6)

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{\rho} = \frac{\lambda^2}{\rho},$$

где кривизна трубки дается проекцией вектора Дарбу (2.8) на главную нормаль к траектории - трубке, т.е. $1/\rho = \Omega_3$. Вектор нормального относительного ускорения

$$\vec{a}_r^n = \lambda^2 \Omega_3 \vec{\nu}. \quad (3.11)$$

Прибегая к дифференцированию орта касательной $\vec{\tau}$ (2.16) и записывая векторное произведение вектора Дарбу (2.8) на дифференцируемый вектор определителем вида (2.5), найдем:

$$\frac{\partial \vec{\tau}}{\partial s} = \vec{\Omega} \times \vec{\tau} = \begin{vmatrix} \vec{\tau} & \vec{\nu} & \vec{\beta} \\ \Omega_1 & 0 & \Omega_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \Omega_3 \vec{\nu}.$$

Вектор (3.11) запишется в виде

$$\vec{a}_r^n = \lambda^2 \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial s}. \quad (3.12)$$

Кориолисово ускорение (рис. 3.7)

$$\vec{a}_c = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r) = 2(\vec{\omega}_e \times \lambda \vec{\tau}),$$

но векторное произведение $\vec{\omega}_e \times \vec{\tau}$ дает (2.16) производную $\partial \vec{\tau} / \partial t$, т.е. кориолисово ускорение

$$\vec{a}_c = 2\lambda \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial t}. \quad (3.13)$$

Сумма ускорений (3.9, 3.10, 3.12, 3.13) возвращает нас к формуле (3.8), полученной формальным дифференцированием скорости (3.3).

Лекция 4. Уравнения движения нити

4.1. Второй закон динамики в приложении к нити

Мысленно выделим элемент нити постоянной массой $\mu_0 ds_0$, где μ_0 — линейная плотность нерастянутой нити. На элемент нити (рис. 4.1) действуют (со стороны отброшенных частей нити) натяжения $\vec{T}_l + (\partial \vec{T}_l / \partial s_0) ds_0$ и $-\vec{T}_l$ и заданная сила $\vec{F}_l \mu_0 ds_0$, где $\vec{F}_l$ — плотность силы (сила, действующая на единицу массы). Вторым (основным) закон Ньютона [2] дает в лагранжевых координатах уравнение

$$-\vec{T}_l + \left(\vec{T}_l + \frac{\partial \vec{T}_l}{\partial s_0} ds_0 \right) + \vec{F}_l \mu_0 ds_0 = (\mu_0 ds_0) \vec{a}_l,$$

или (ускорение $\vec{a}_l = d\vec{V}_l / dt$) уравнение

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \vec{T}_l}{\partial s_0} + \vec{F}_l = \frac{d\vec{V}_l}{dt}. \quad (4.1)$$

Используя правило (2.14) и формулу (3.7) для скорости, перейдем в уравнении (4.1) к эйлеровым координатам:

$$\frac{f}{\mu_0} \frac{\partial \vec{T}}{\partial s} + \vec{F} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \vec{V}}{\partial s}. \quad (4.2)$$

Желая ввести в уравнение (4.2) локальные производные (2.12-2.13), запишем производные в уравнении (4.2) в виде (2.3; 2.16):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial s} &= \frac{\partial \tilde{T}}{\partial s} + \vec{\Omega} \times \vec{T}, \\
\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} &= \frac{\partial \tilde{\vec{V}}}{\partial t} + (\vec{\omega} - \lambda \vec{\Omega}) \times \vec{V}, \\
\frac{\partial \vec{V}}{\partial s} &= \frac{\partial \tilde{\vec{V}}}{\partial s} + \vec{\Omega} \times \vec{V}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Векторные произведения в этих формулах выразим определителями вида (2.5) и подставим производные (4.3) в уравнение (4.2):

$$\frac{f}{\mu_0} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial s} + \begin{vmatrix} \vec{\tau} & \vec{v} & \vec{\beta} \\ \Omega_1 & 0 & \Omega_3 \\ T & 0 & 0 \end{vmatrix} \right) + \vec{F} = \frac{\partial \tilde{\vec{V}}}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \tilde{\vec{V}}}{\partial s} + \begin{vmatrix} \vec{\tau} & \vec{v} & \vec{\beta} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}. \tag{4.4}$$

Уравнение (4.4) дает уравнения в проекциях на оси натурального трехгранника нити (рис.2.3)

$$\begin{aligned}
\frac{f}{\mu_0} \frac{\partial T}{\partial s} + F_1 &= \frac{\partial V_1}{\partial t} + \lambda \frac{\partial V_1}{\partial s} + \omega_2 V_3 - \omega_3 V_2, \\
\frac{f}{\mu_0} \Omega_3 T + F_2 &= \frac{\partial V_2}{\partial t} + \lambda \frac{\partial V_2}{\partial s} + \omega_3 V_1 - \omega_1 V_3, \\
F_3 &= \frac{\partial V_3}{\partial t} + \lambda \frac{\partial V_3}{\partial s} + \omega_1 V_2 - \omega_2 V_1.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

4.2. Уравнение Дарбу в проекциях на оси натурального трехгранника

Введем в уравнение Дарбу (2.22)

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial s} - \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = \vec{\Omega} \times \vec{\omega} + \frac{\partial}{\partial s} (\lambda \vec{\Omega})$$

производные

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial s} &= \frac{\partial \tilde{\vec{\omega}}}{\partial s} + \vec{\Omega} \times \vec{\omega}, \\
\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} &= \frac{\partial \tilde{\vec{\Omega}}}{\partial t} + (\vec{\omega} - \lambda \vec{\Omega}) \times \vec{\Omega}, \\
\frac{\partial (\lambda \vec{\Omega})}{\partial s} &= \frac{\partial (\lambda \tilde{\vec{\Omega}})}{\partial s} + \vec{\Omega} \times \lambda \vec{\Omega}.
\end{aligned}$$

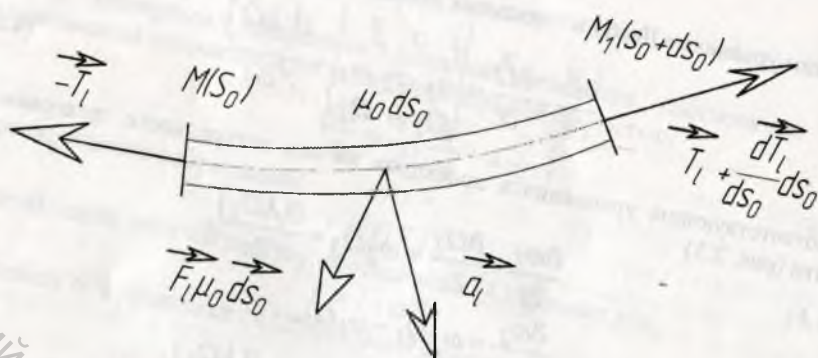


Рис. 4.1. Силы, действующие на элемент нити

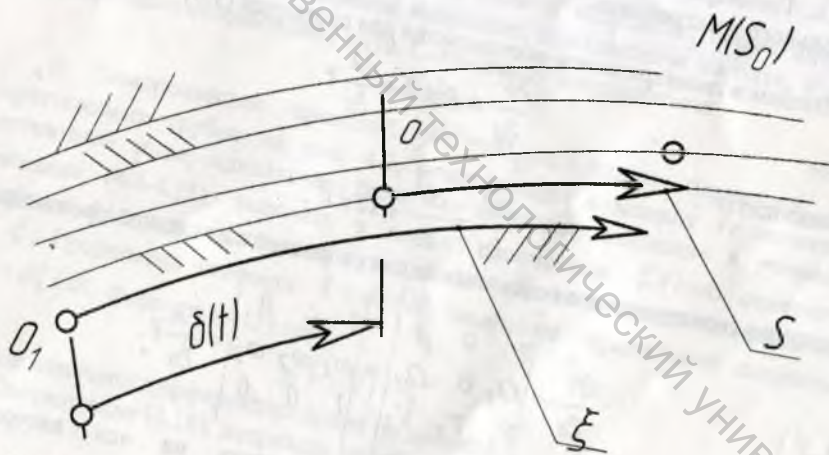


Рис. 4.2. Движение относительно нити начала отсчета дуговой координаты

получим уравнение Дарбу в локальных производных

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial s} - \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial t} = \begin{vmatrix} \tilde{\tau} & \tilde{\nu} & \tilde{\beta} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \Omega_1 & 0 & \Omega_3 \end{vmatrix} + \frac{\partial(\lambda \tilde{\Omega})}{\partial y_i}. \quad (4.6)$$

Соответствующие уравнения в проекциях на оси натурального трехгранника нити (рис. 2.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_1}{\partial s} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial t} &= \omega_2 \Omega_3 + \frac{\partial(\lambda \Omega_1)}{\partial s}, \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial s} &= \omega_3 \Omega_1 - \omega_1 \Omega_3, \\ \frac{\partial \omega_3}{\partial s} - \frac{\partial \Omega_3}{\partial t} &= -\omega_2 \Omega_1 + \frac{\partial(\lambda \Omega_3)}{\partial s}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

4.3. Геометрическое соотношение для скоростей в проекциях на оси натурального трехгранника

Введем в геометрическое соотношение для скоростей (3.6)

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial s} = \vec{\omega} \times \vec{\tau} + \frac{\partial \lambda}{\partial s} \vec{\tau}$$

производную

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial s} = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial s} + \tilde{\Omega} \times \tilde{V},$$

получим геометрическое соотношение для скоростей с локальной производной

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial s} + \begin{vmatrix} \tilde{\tau} & \tilde{\nu} & \tilde{\beta} \\ \Omega_1 & 0 & \Omega_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{\tau} & \tilde{\nu} & \tilde{\beta} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \frac{\partial \lambda}{\partial s} \tilde{\tau}. \quad (4.8)$$

Соответствующие уравнения в проекциях на оси натурального трехгранника нити (рис. 2.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial s} - \Omega_3 V_2 &= \frac{\partial \lambda}{\partial s}, \\ \frac{\partial V_2}{\partial s} + \Omega_3 V_1 - \Omega_1 V_3 &= \omega_3, \\ \frac{\partial V_3}{\partial s} + \Omega_1 V_2 &= -\omega_2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

4.4. Скалярные уравнения

К скалярным уравнениям движения относятся соотношение (1.8), связывающее относительную длину с продольной скоростью,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial s} = \frac{1}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \lambda \frac{\partial f}{\partial s} \right) \quad (4.10)$$

и реологическое соотношение

$$f = f(T, t). \quad (4.11)$$

В случае нити, упругой по Гуку, соотношение (4.11) имеет вид

$$f = l + \alpha T. \quad (4.12)$$

Константа α в уравнении (4.12) называется растяжимостью нити.

4.5. Случай подвижного относительно нити начала отсчета дуговой координаты

На рис. 4.2 показаны два начала отсчета координат: общее начало O отсчета лагранжевой и эйлеровой координат, неподвижное на нити, и начало O_I , подвижное относительно нити. Связь между координатами

$$\xi = \delta(t) + s. \quad (4.13)$$

В "замороженном времени" $d\xi = ds$, т.е. длины элементов двух нерастяжимых трубок на рис. 4.2, совпадающих в момент t с элементом растяжимой нити, одинаковы. Если все функции, входящие в уравнение движения (4.4-4.11), выразить в новых переменных ξ, t (что отмечается индексом s), производные этих функций по s можно заменить производными по ξ . Продольная скорость $\lambda = ds/dt$ заменяется продольной скоростью $u_s = d\xi/dt$. Формула (4.13) дает

$$u = \dot{\delta}(t) + \lambda \quad (4.14)$$

(точкой отмечено дифференцирование по времени).

Соотношение (4.10), например, приобретает вид

$$\frac{\partial u_s}{\partial \xi} = \frac{1}{f_s} \left(\frac{\partial f_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial f_s}{\partial \xi} \right).$$

Лекция 5. Плоская задача

5.1. Уравнения плоской задачи

11 уравнений (4.5), (4.7), (4.9), (4.10-4.11) содержат 11 неизвестных функций: проекции скорости $\vec{V}(V_1, V_2, V_3)$, проекции угловой скорости $\vec{\omega}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, проекции вектора Дарбу $\vec{\Omega}(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$, натяжение T , относительную длину f и продольную скорость λ .

Если нить движется в заданной неподвижной плоскости (рис. 5.1), орты касательной и главной нормали $\vec{\tau}$ и $\vec{\nu}$ нити во всякой ее точке и во всякий момент времени принадлежат указанной плоскости: проекция скорости $\vec{V}$ на бинормаль $V_3 = 0$; нить не вращается вокруг касательной и главной нормали, т.е. $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$; кручение нити $\Omega_1 = 0$. Из трех уравнений (4.5) остаются первые два, из уравнений (4.7) - одно третье, из уравнений (4.9) - первые два. Добавляя к ним два соотношения (4.10-4.11), получим систему 7 дифференциальных уравнений, содержащую 7 неизвестных функций.

Эти уравнения удобно получить из векторных уравнений (4.4), (4.6), (4.8), записывая соответствующие уравнения в проекциях на оси натурального трехгранника нити, т.е. из уравнений

$$\frac{f}{\mu_0} \left(\frac{\partial \vec{T}}{\partial s} + \begin{vmatrix} \vec{\tau} & \vec{\nu} & \vec{\beta} \\ 0 & 0 & \Omega \\ T & 0 & 0 \end{vmatrix} \right) + \vec{F} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \vec{V}}{\partial s} + \begin{vmatrix} \vec{\tau} & \vec{\nu} & \vec{\beta} \\ 0 & 0 & \omega \\ V_1 & V_2 & 0 \end{vmatrix}, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial s} - \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s}(\lambda \Omega), \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial s} + \begin{vmatrix} \vec{\tau} & \vec{\nu} & \vec{\beta} \\ 0 & 0 & \Omega \\ V_1 & V_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\tau} & \vec{\nu} & \vec{\beta} \\ 0 & 0 & \omega \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \frac{\partial \lambda}{\partial s} \vec{\tau}, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial s} = \frac{1}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \lambda \frac{\partial f}{\partial s} \right), \quad (5.4)$$

$$f = f(T, t), \quad (5.5)$$

где положено $\omega_3 = \omega$, $\Omega_3 = \Omega$.

5.2. Уравнения задачи Эйлера

На рис. 5.2 изображена нерастяжимая нить, покоящаяся на шероховатом шкиве. На нить действуют натягивающие ее силы $\vec{T}_A$ и $\vec{T}_B$, и эти силы таковы,

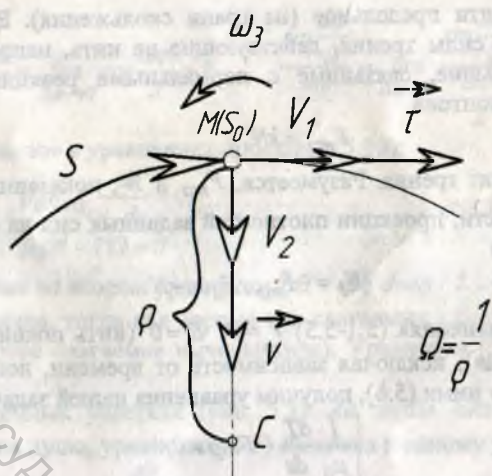


Рис. 5.1. Нить в плоском движении

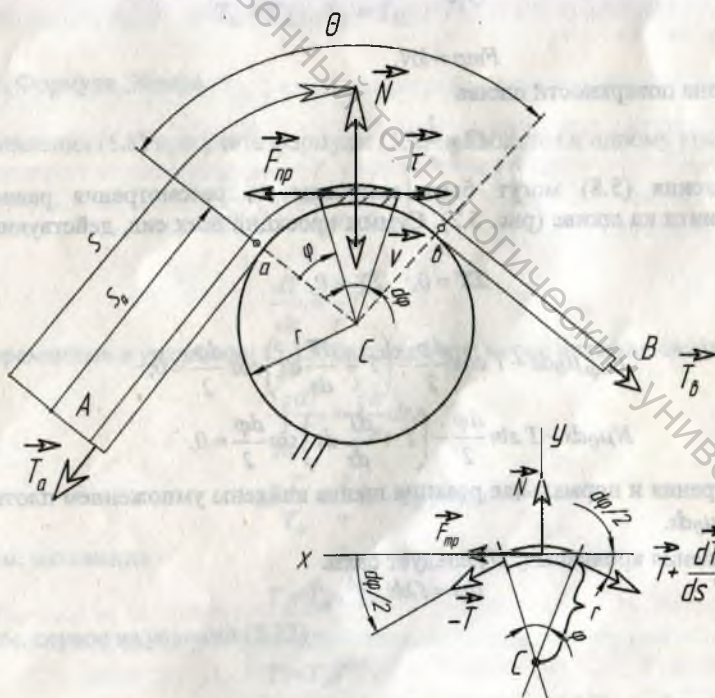


Рис. 5.2. Равновесие нити на шероховатом шкиве

что равновесие нити предельное (на грани скольжения). Если нить начнет скользить вправо, силы трения, действующие на нить, направлены влево, их величины наибольшие, связанные с нормальными реакциями поверхности шкива законом Амонтона

$$F_{mp} = kN, \quad (5.6)$$

где k – коэффициент трения. Разумеется, F_{mp} и N , показанные на рис. 5.2, не силы, а их плотности, проекции плотностей заданных сил на оси натурального трехгранника нити

$$F_1 = -F_{mp}, \quad F_2 = -N. \quad (5.7)$$

Полагая в уравнениях (5.1-5.5) $\vec{V} = 0$, $\vec{\omega} = 0$ (нить покоится); $f = 1$, $\lambda = 0$ (нить нерастяжимая); исключая зависимость от времени, используя проекции (5.7) и связь между ними (5.6), получим уравнения нашей задачи:

$$\begin{cases} \frac{1}{\mu_0} \frac{dT}{ds} - F_{mp} = 0, \\ \frac{1}{\mu_0} \Omega T - N = 0, \end{cases} \quad (5.8)$$

$$F_{mp} = kN,$$

где кривизна поверхности шкива

$$\Omega = \frac{1}{r}. \quad (5.9)$$

Уравнения (5.8) могут быть получены из рассмотрения равновесия элемента нити на шкиве (рис. 5.2). Суммы проекций всех сил, действующих на элемент,

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0,$$

т.е.

$$\begin{aligned} F_{mp} \mu_0 ds + T \cos \frac{d\varphi}{2} - \left(T + \frac{dT}{ds} ds \right) \cos \frac{d\varphi}{2} &= 0, \\ N \mu_0 ds - T \sin \frac{d\varphi}{2} - \left(T + \frac{dT}{ds} ds \right) \sin \frac{d\varphi}{2} &= 0, \end{aligned} \quad (5.10)$$

где сила трения и нормальная реакция шкива найдены умножением плотностей на массу $\mu_0 ds$.

Из определения кривизны (2.7) следует связь

$$d\varphi = \Omega ds,$$

пределы

$$\cos \frac{d\varphi}{2} = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \cos \frac{\Delta\varphi}{2} = 1, \quad \frac{\sin \frac{d\varphi}{2}}{\frac{d\varphi}{2}} = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} = 1.$$

Используем написанное в уравнениях проекций (5.10):

$$\begin{aligned} \mu_0 F_{mp} - \frac{dT}{ds} &= 0, \\ \mu_0 N - T\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

(четвертое слагаемое во втором уравнении $(dT/ds) ds d\varphi / 2$ - бесконечно малая величина 2-го порядка, тогда как первые три слагаемых - бесконечно малые 1-го порядка, четвертое слагаемое вычеркиваем). Уравнения (5.11) совпадают с уравнениями (5.8).

На прямолинейных участках (рис. 5.2) Aa и Bb сил F_{mp} и N нет, кривизна (5.9) равна нулю, уравнения (5.8) сводятся к одному уравнению

$$\frac{dT}{ds} = 0,$$

откуда следует, что натяжение прямолинейных участков нити $T = const$, или

$$T_a = T_A, \quad T_b = T_B. \quad (5.12)$$

5.3. Формула Эйлера

Уравнения (5.8) при учете формулы (5.9) приводятся к одному уравнению

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{dT}{ds} - k \left(\frac{1}{\mu_0 r} T \right) = 0,$$

или

$$\frac{dT}{ds} = \frac{k}{r} T. \quad (5.13)$$

Переменные в уравнении (5.13) разделяются: после интегрирования

$$\begin{aligned} \int_{T_a}^T \frac{dT}{T} &= \int_{s_a}^s \frac{k}{r} ds, \\ \ln \frac{T}{T_a} &= \frac{k}{r} (s - s_a) = k\varphi \end{aligned}$$

находим: натяжение

$$T = T_a e^{k\varphi},$$

или - см. первое из условий (5.12) -

$$T = T_A l^{k\varphi}. \quad (5.14)$$

Используя в решении (5.14) второе из условий (5.12), найдем условия предельного равновесия на грани скольжения вправо

$$T_B = T_A l^{k\theta}, \quad (5.15)$$

где θ – угол обхвата шкива (рис. 5.2). Если натяжение T_B больше значения (5.15), нить начнет скользить вправо.

5.4. Условие равновесия нити на шкиве

Если нить находится на грани скольжения влево, силу трения следует направить вправо, что можно учесть, изменяя знак коэффициента трения в законе (5.6) и в формуле Эйлера (5.15). Условие предельного равновесия на грани скольжения влево

$$T_B = T_A e^{-k\theta}. \quad (5.16)$$

Если натяжение T_B меньше значения (5.16), начнется скольжение нити влево.

Условие равновесия нити на шкиве

$$T_A e^{-k\theta} \leq T_B \leq T_A e^{k\theta}. \quad (5.17)$$

Лекция 6. Скольжение нерастяжимой нити по шероховатому шкиву

6.1. Уравнения скольжения нерастяжимой нити по неподвижному шкиву (рис. 6.1)

Пусть условие равновесия нити нарушено ($T_B > T_A e^{k\theta}$); учтем в уравнениях (5.1-5.3) скорость скольжения нити $\vec{V}$ ($V_1 = V$, $V_2 = 0$), угловую скорость $\vec{\omega}$, кривизну $\Omega = 1/r$, относительную длину $f = l$ и продольную скорость $\lambda = 0$, соответствующие уравнения движения в проекциях на оси натурального трехгранника нити

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial T}{\partial s} - F_{mp} = \frac{\partial V}{\partial t}, \quad (6.1)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{T}{r} - N = \omega V, \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial s} = 0, \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = 0, \quad (6.4)$$

$$\frac{V}{r} = \omega. \quad (6.5)$$

Из уравнений (6.3-6.4) следует, что угловая скорость ω и скорость V – функции только времени, частная производная $\partial V / \partial t$ в уравнении (6.1) равна производной dV / dt . Используя в уравнении (6.2) уравнение (6.5) и закон Амонтона

$$F_{mp} = kN,$$

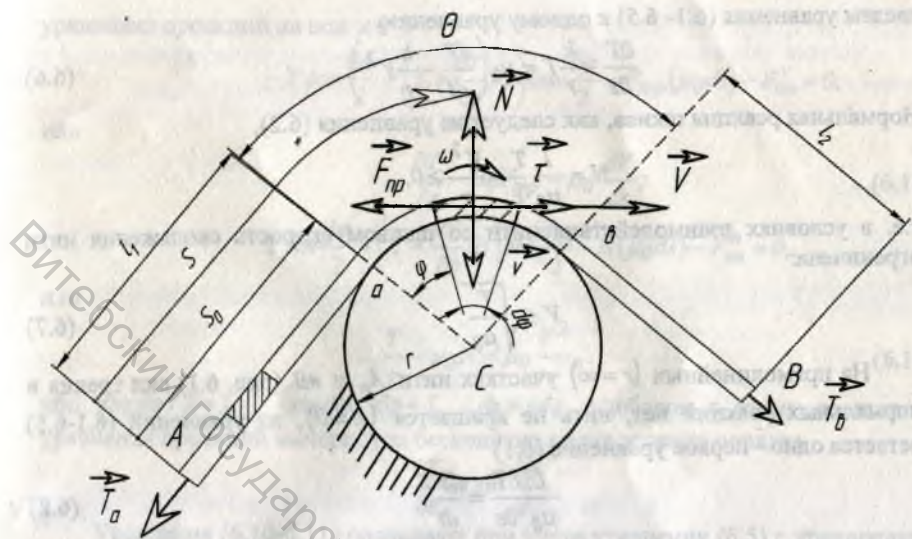


Рис. 6.1. Скольжение нерастяжимой нити по шкиву

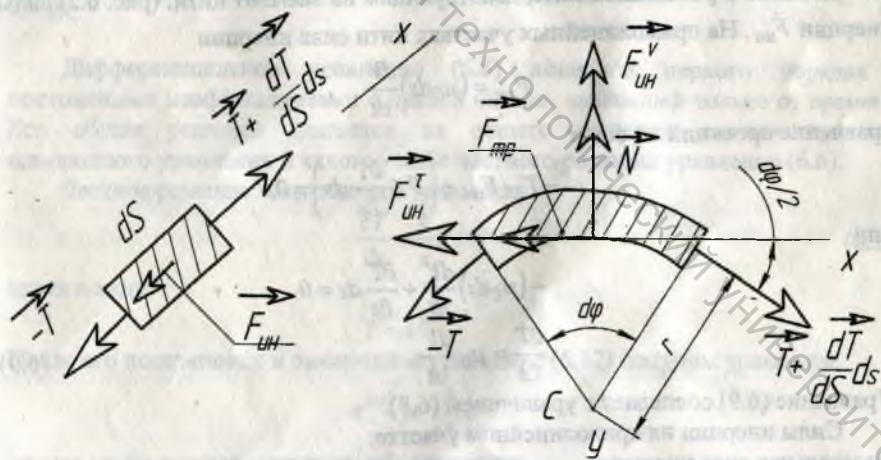


Рис. 6.2. Принцип Даламбера в приложении к нити

сведем уравнения (6.1- 6.5) к одному уравнению

$$\frac{\partial T}{\partial s} - \frac{k}{r} T = \mu_0 \left(\frac{dV}{dt} - \frac{k}{r} V^2 \right). \quad (6.6)$$

Нормальная реакция шкива, как следует из уравнения (6.2),

$$N = \frac{1}{\mu_0} \frac{T}{r} - \frac{V^2}{r} \geq 0,$$

т.е. в условиях взаимодействия нити со шкивом скорость скольжения нити ограничена:

$$V \leq \sqrt{\frac{T}{\mu_0}}. \quad (6.7)$$

На прямолинейных ($r = \infty$) участках нити A_a и B (рис. 6.1) сил трения и нормальных реакций нет, нить не вращается ($\omega = 0$), из уравнений (6.1-6.5) остается одно - первое уравнение (6.1)

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial T}{\partial s} = \frac{dV}{dt}. \quad (6.8)$$

6.2. Принцип Даламбера в приложении к нерастяжимой нити

Добавим к реальным силам, действующим на элемент нити, (рис. 6.2) силы инерции $\vec{F}_{ин}$. На прямолинейных участках нити сила инерции

$$F_{ин} = (\mu_0 ds) \frac{dV}{dt},$$

уравнение проекций на ось x

$$-T - F_{ин} + \left(T + \frac{\partial T}{\partial s} ds \right) = 0,$$

или

$$\begin{aligned} -(\mu_0 ds) \frac{dV}{dt} + \frac{\partial T}{\partial s} ds &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial s} &= \mu_0 \frac{dV}{dt}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Уравнение (6.9) совпадает с уравнением (6.8).

Силы инерции на криволинейном участке:
касательная сила инерции

$$F_{ин}^{\tau} = (\mu_0 ds) \frac{dV}{dt},$$

нормальная сила инерции

$$F_{ин}^{\nu} = (\mu_0 ds) \frac{V^2}{r};$$

уравнения проекций на оси x и y

$$-T \cos \frac{d\varphi}{2} + \left(T + \frac{\partial T}{\partial s} ds \right) \cos \frac{d\varphi}{2} - F_{mp}(\mu_0 ds) - F_{\text{ин}}^{\tau} = 0,$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial s} - \mu_0 F_{mp} = \mu_0 \frac{dV}{dt}; \quad (6.10)$$

$$T \sin \frac{d\varphi}{2} + \left(T + \frac{\partial T}{\partial s} ds \right) \sin \frac{d\varphi}{2} - N(\mu_0 ds) - F_{\text{ин}}^n = 0,$$

или

$$\frac{T}{r} - \mu_0 N = \mu_0 \frac{V^2}{r}, \quad (6.11)$$

ибо $\cos d\varphi/2 = 1$, $\sin d\varphi/d\varphi = 1$, $ds = r d\varphi$, вдобавок к этому из второго уравнения проекций вычеркнуто бесконечно малая второго порядка

$$\frac{\partial T}{\partial s} ds \sin \frac{d\varphi}{2}.$$

Уравнения (6.10-6.11) совпадают при учете уравнения (6.5) с уравнениями (6.1, 6.2).

6.3. Интегро - дифференциальное уравнение скольжения нерастяжимой нити

Дифференциальное уравнение (6.6) линейное первого порядка с постоянными коэффициентами с правой частью, зависящей только от времени. Его общее решение складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения и какого - либо частного решения уравнения (6.6).

Частное решение однородного уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial s} - \frac{k}{r} T = 0 \quad (6.12)$$

ищем в виде

$$T = e^{\mu s}.$$

После его подстановки в однородное уравнение (6.12) получим уравнение

$$e^{\mu s} \left(\mu - \frac{k}{r} \right) = 0,$$

откуда следует характеристическое уравнение

$$\mu - \frac{k}{r} = 0$$

с корнем $\mu = k/r$. Общее решение однородного уравнения (6.12)

$$T = C(t) e^{\frac{k}{r}s}, \quad (6.13)$$

где $C(t)$ – произвольная функции времени.

Частное решение уравнения (6.6) с правой частью, зависящей только от времени, ищем как функцию только времени $T(t)$. Уравнение (6.6) дает

$$-\frac{k}{r}T = \mu_0 \left(\frac{dV}{dt} - \frac{k}{r}V^2 \right),$$

откуда

$$T(t) = -\mu_0 \frac{r}{k} \left(\frac{dV}{dt} - \frac{k}{r}V^2 \right). \quad (6.14)$$

Суммируя решение (6.13) и (6.14), найдем общее решение уравнения (6.6)

$$T(s, t) = C(t)e^{\frac{k}{r}s} - \mu_0 \frac{r}{k} \left(\frac{dV}{dt} - \frac{k}{r}V^2 \right). \quad (6.15)$$

Функцию $C(t)$ найдем, если найдем натяжение нити в точке a с координатой

$$s_a = l_1 - \int_0^t V dt. \quad (6.16)$$

Решим уравнение (6.8):

$$T = \mu_0 \frac{dV}{dt} s + D_1(t),$$

где произвольная функция времени $D_1(t)$ находится из краевого условия $T(s=0) = T_A$, искомое решение

$$T = \mu_0 \frac{dV}{dt} s + T_A;$$

натяжение в точке a

$$T_a = \mu_0 \frac{dV}{dt} s_a + T_A,$$

или, если учесть формулу (6.16),

$$T_a = \mu_0 \frac{dV}{dt} \left(l_1 - \int_0^t V dt \right) + T_A. \quad (6.17)$$

Если теперь найти натяжение в точке b , получим уравнение относительно скорости скольжения нити.

Координата точки b (рис. 6.1)

$$s_b = s_a + r\theta = l_1 + r\theta - \int_0^t V dt, \quad (6.18)$$

решение уравнения (6.8)

$$T = \mu_0 \frac{dV}{dt} s + D_2(t),$$

где произвольная функция времени $D_2(t)$ находится из краевого условия $T(s=l_1+r\theta+l_2)=T_B$, искомое решение

$$T = \mu_0 \frac{dV}{dt} (s - l_1 - l_2 - r\theta) + T_B,$$

натяжение в точке θ

$$T_\theta = -\mu_0 \frac{dV}{dt} \left(l_2 + \int_0^t V dt \right) + T_B. \quad (6.19)$$

Используя натяжения (6.17, 6.19) в решении (6.15), получим интегро-дифференциальное уравнение относительно скорости скольжения

$$T_\theta = \frac{T_a + \mu_0 \frac{r}{k} \left(\frac{dV}{dt} - \frac{k}{r} V^2 \right)}{\frac{k}{e^r s_a}} e^{\frac{k}{r} s_a} - \mu_0 \frac{r}{k} \left(\frac{dV}{dt} - \frac{k}{r} V^2 \right). \quad (6.20)$$

Действительно, уравнение (6.20) содержит интеграл

$$\int_0^t V dt,$$

входящий в формулы для натяжений T_a и T_θ (6.17, 6.19), а также в формулы для координат s_a и s_θ (6.16, 6.18), производную dV/dt и квадрат скорости V^2 .

6.4. Режим постоянной скорости

Пусть скорость скольжения $V = \text{const} (dV/dt = 0)$. Формулы (6.16) и (6.18) для координат точек a и θ приобретают вид

$$s_a = l_1 - Vt,$$

$$s_\theta = l_1 + r\theta - Vt;$$

$$s_\theta - s_a = r\theta,$$

$$\frac{k}{e^r} (s_\theta - s_a) = e^{k\theta},$$

уравнение (6.20) - вид

$$T_\theta - T_a e^{k\theta} = \mu_0 V^2 (1 - e^{k\theta}).$$

Так как натяжения T_a (6.17) и T_θ (6.19) становятся равными T_A и T_B , скорость скольжения

$$V^2 = \frac{T_B - T_A e^{k\theta}}{\mu_0 (1 - e^{k\theta})}.$$

Натяжение в произвольной точке дуги обхвата получается из уравнения (6.20) заменой натяжения T_s и координаты s_s натяжением T и координатой s :

$$T = (T_A - \mu_0 V^2) e^{k\varphi} + \mu_0 V^2,$$

ибо (рис. 6.1) $(s - s_a)/r = \varphi$. Если $T_A = \mu_0 V^2$, $T_a = \mu_0 V^2 = \text{const}$. Нормальная реакция шкива - см. уравнения (6.2) и (6.5) - равна в этом случае нулю - нить не взаимодействует со шкивом, но сохраняет круговую форму. Устойчивость круговой формы нити при натяжении $T = \mu_0 V^2$ называется кажущейся вязкостью нити (эффект Эткина - Радингера). Скорость скольжения нити при этом - предельная скорость (6.7).

Лекция 7. Нить в декартовых координатах

7.1. Уравнения движения в декартовых координатах

В уравнении основного закона динамики нити (4.1-4.2)

$$\frac{f}{\mu_0} \frac{\partial \vec{T}}{\partial s} + \vec{F} = \vec{a}, \quad (7.1)$$

где натяжение (рис. 7.1)

$$\vec{T} = T \vec{\tau}, \quad (7.2)$$

ускорение (3.8)

$$\vec{a} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial s} \right) \vec{\tau} + \lambda^2 \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial s} + 2\lambda \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial t}. \quad (7.3)$$

Используя в выражениях (7.2.-7.3) орт касательной (3.2)

$$\vec{\tau} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s},$$

напишем уравнение (7.1):

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right) + \vec{F} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial s} \right) \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} + \lambda^2 \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial s^2} + 2\lambda \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t \partial s}. \quad (7.4)$$

Уравнение (7.4) в проекциях на оси x, y, z декартовой системы координат (рис. 7.1):

$$\frac{f}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial x}{\partial s} \right) + F_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial s} \right) \frac{\partial x}{\partial s} + \lambda^2 \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + 2\lambda \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s},$$

$$\frac{f}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial y}{\partial s} \right) + F_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial s} \right) \frac{\partial y}{\partial s} + \lambda^2 \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + 2\lambda \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s}, \quad (7.5)$$

$$\frac{f}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial z}{\partial s} \right) + F_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial s} \right) \frac{\partial z}{\partial s} + \lambda^2 \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + 2\lambda \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial s}.$$

Дополним эти уравнения геометрическим соотношением (теоремой Пифагора)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)^2 = 1, \quad (7.6)$$

уже известным соотношением (1.8)

$$\frac{\partial \lambda}{\partial s} = \frac{1}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \lambda \frac{\partial f}{\partial s} \right) \quad (7.7)$$

и реологическим уравнением

$$f = f(T, t). \quad (7.8)$$

Шесть уравнений движения нити (7.5-7.8) содержат шесть неизвестных функций: координаты точки нити $x(s, t)$, $y(s, t)$, $z(s, t)$; относительную длину $f(s, t)$, продольную скорость $\lambda(s, t)$ и натяжение $T(s, t)$.

В случае подвижного на нити начала отсчета дуговых координат вместо скорости $\lambda(s, t)$ используем скорость $u_s(\xi, t)$, обозначения всех перечисленных функций снабжаем индексом s - в знак того, что они выражаются через новую дуговую координату (4.13).

7.2. Нерастяжимая нить в потоке воздуха

Реологическое уравнение (7.8) в случае нерастяжимой нити

$$f = 1, \quad (7.9)$$

что дает - см. соотношение (7.7) -

$$\frac{\partial u_s}{\partial \xi} = 0, \quad u_s = u_s(t); \quad (7.10)$$

в то же время продольная скорость (7.10, 4.14)

$$u = \frac{d\delta(t)}{dt} \quad (7.11)$$

(ибо скорость λ в нерастяжимой нити равна нулю).

Из геометрического соотношения (7.6) следует:

$$\frac{\partial x_s}{\partial \xi} = 1, \quad x_s = \xi + C(t), \quad (7.12)$$

где произвольная функция времени $C(t)$ находится из условия $x_s(\xi = 0) = 0$: $C(t) = 0$, - декартова координата места, где находится точка

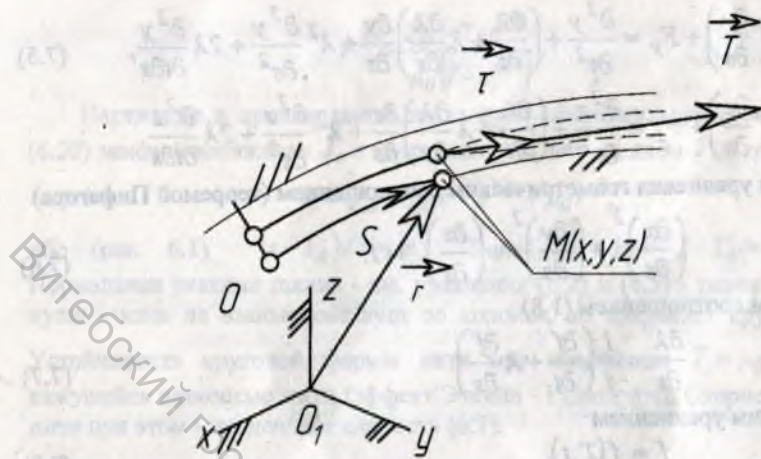


Рис. 7.1. Нить в декартовых координатах

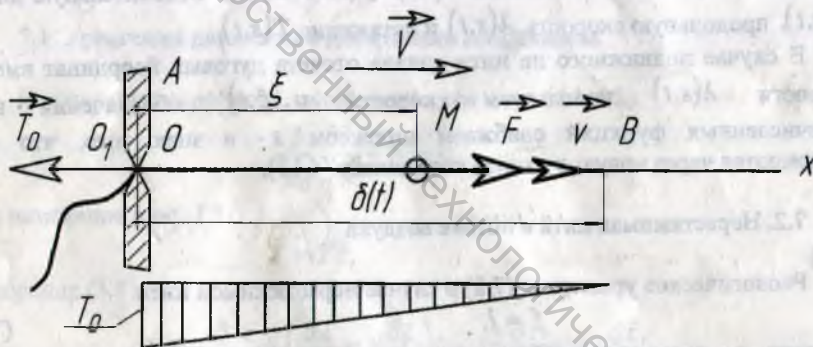


Рис. 7.2. Нерастяжимая нить в воздушном потоке

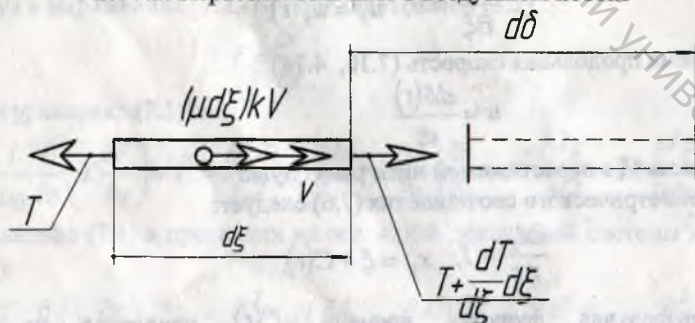


Рис. 7.3. Элемент нерастяжимой нити в воздушном потоке

нити, (7.12) и ее дуговая координата ξ совпадают. Частные производные, как следует из равенства (7.12),

$$\frac{\partial x_s}{\partial \xi} = 1, \quad \frac{\partial^2 x_s}{\partial \xi^2} = 0, \quad \frac{\partial x_s}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 x_s}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 x_s}{\partial t \partial \xi} = 0;$$

частная производная скорости (7.10, 7.11)

$$\frac{\partial u_s}{\partial \xi} = 0.$$

Первое из уравнений (7.5) при учете соотношения (7.9) приобретает вид

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial T_s}{\partial \xi} + F_x = \frac{du}{dt}, \quad (7.13)$$

причем, как следует из определения скорости точки нити (3.1),

$$v_s = \frac{\partial x_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial x_s}{\partial \xi} = u_s, \quad (7.14)$$

т.е. скорость u в уравнении (7.13) может быть заменена скоростью v (7.14).

Плотность силы, действующей на нить в потоке (рис. 7.2), считаем пропорциональной относительной скорости потока, т.е. в воздухе, движущемся с постоянной скоростью V , плотность

$$F_x = k(V - v); \quad (7.15)$$

постоянное начальное натяжение нити, созданное тормозным устройством A (рис. 7.2),

$$T_0 < \mu \delta_0 k V \quad (7.16)$$

(скорость нити в начальный момент $v = 0$) - в противном случае поток не увлечет нить. Величина $\mu \delta_0$ в условии (7.16) - масса начального отрезка нити длиной δ_0 . Используя скорость (7.15) в уравнении (7.13), получим уравнение

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial T_s}{\partial \xi} = -k(V - v) + \frac{dv}{dt}, \quad (7.17)$$

где правая часть зависит только от времени.

Следовательно, натяжение

$$T_s = \mu \left[-k(V - v) + \frac{dv}{dt} \right] \xi + D(t),$$

но при $\xi = 0$ начальное натяжение $T_s = T_0$, т.е. натяжение

$$T_s = \mu \left[-k(V - v) + \frac{dv}{dt} \right] \xi + T_0 \quad (7.18)$$

изменяется вдоль нити по линейному закону (рис. 7.2).

7.3. Скорость нерастяжимой нити в воздушном потоке (рис. 7.2)

Полагая в выражении (7.18) $\xi = \delta$ и $T_s = 0$, получим уравнение

$$\frac{dv}{dt} + kv = kV - \frac{T_0}{\mu\delta} \quad (7.19)$$

относительно скорости нити v .

Ограничимся рассмотрением достаточно малого промежутка времени, в течение которого скорость нити много меньше скорости воздушного потока ($v \ll V$), что дает возможность взять плотность (7.15) в виде $F_x \approx kV$ и в уравнениях (7.17, 7.19) пренебречь слагаемым kv . Используя определение (7.11), преобразуем в уравнении (7.19) производную dv/dt :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\delta} \cdot \frac{d\delta}{dt} = v \frac{dv}{d\delta} = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{d\delta};$$

интегрирование уравнения

$$\frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{d\delta} = kV - \frac{T_0}{\mu\delta}$$

дает скорость нити:

$$v^2 = 2kV(\delta - \delta_0) - \frac{2T_0}{\mu} \ln \frac{\delta}{\delta_0}. \quad (7.20)$$

7.4. Теорема об изменении кинетической энергии в приложении к нити на рис. 7.2.

Приращение кинетической энергии элемента нити (рис. 7.3) постоянной массы $\mu d\xi$

$$d \left[(\mu d\xi) \frac{v^2}{2} \right] = [(\mu d\xi) kV] d\delta + \left(\frac{\partial T_s}{\partial \xi} d\xi \right) d\delta,$$

где $d\delta$ — перемещение элемента за время dt (равное приращению длины нити), равно (см. правую часть уравнения) сумме работ сил, действующих на элемент. Переходя к кинетической энергии единицы массы, получим уравнение

$$d \left(\frac{v^2}{2} \right) = kV d\delta + \frac{1}{\mu} \frac{\partial T_s}{\partial \xi} d\delta. \quad (7.21)$$

Скорость в уравнении (7.21), равная скорости (7.11), зависит только от времени, или (через посредство времени) от изменяющейся длины нити $\delta(t)$; следовательно, частная производная $\partial T / \partial \xi$ зависит только от времени (не зависит от координаты ξ).

Рис. 7.2 дает искомую производную:

$$\frac{\partial T_s}{\partial \xi} = \frac{-T_0}{\delta(t)}. \quad (7.22)$$

Используя значение (7.22) в уравнении (7.21) и интегрируя его, найдем решение (7.20).

7.5. Уравнение Мещерского в приложении к нити на рис. 7.2

Масса нити на рис. 7.2 переменная - за счет частиц, "приходящих" из питателя А. Уравнение Мещерского [2] в приложении к рассматриваемой нити имеет вид

$$M \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{R}_{внеш} + \frac{dM}{dt} \bar{v}_{прих}, \quad (7.23)$$

где масса нити в момент t

$$M = \mu \delta(t),$$

проекция главного вектора внешних сил на ось x

$$R_{внеш} = -T_0 + [\mu \delta(t)] kV,$$

проекция скорости приходящих частиц относительно нити $v_{прих} = 0$, т.е. уравнение (7.23) в проекциях на ось x принимает вид

$$\mu \delta \frac{dv}{dt} = -T_0 + (\mu \delta) kV,$$

или - см. преобразование производной dv/dt в уравнении (7.19) -

$$\frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{d\delta} = -\frac{T_0}{\mu \delta} + kV. \quad (7.24)$$

Интегрирование уравнения (7.24) дает решение (7.20).

Лекция 8. Малые свободные поперечные колебания нити

8.1. Волновое уравнение

В свободных колебаниях нити заданных сил нет, т.е. проекции плотности заданных сил $F_x = F_y = F_z$ в уравнениях (7.5) равны нулю.

В малых колебаниях (рис. 8.1) около положения равновесия стрела прогиба нити $\Delta \ll l$, частная производная $\partial y / \partial s$ порядка

$$\frac{\Delta}{l} \ll 1,$$

из геометрического соотношения (7.6) следует

$$\frac{\partial x}{\partial s} \approx 1, \quad (8.1)$$

или декартова координата $x \approx s + C(t)$, где произвольная функция времени находится из условия $x(s=0)=0$: $C(t)=0$, и $x \approx s$, т.е. дуговая координата s в уравнениях (7.5) может быть заменена абсциссой x .

С другой стороны производная (8.1)

$$\frac{\partial x}{\partial s} \approx \frac{l_p}{l},$$

или

$$\frac{l_p}{l} = \frac{l_p}{l_0} \frac{l_0}{l} = \frac{f_p}{f} \approx 1,$$

$$l_p \approx l, \quad f = f_p = \text{const.} \quad (8.2)$$

Используем равенство (8.2) в законе Гука

$$f = l + \alpha T \quad (8.3)$$

(α – растяжимость нити): получим равенство

$$T \approx T_p = \text{const.} \quad (8.4)$$

Относительная длина нити (8.2) и натяжение (8.4) в малых колебаниях близки к относительной длине $f_p = l_p / l_0$ и натяжению T_p в равновесии нити (l_0 – длина не растянутой нити). Поэтому, как следует из соотношения (7.7), продольная скорость $\lambda \approx 0$, второе из уравнений (7.5) принимает вид

$$\frac{f_p T_p}{\mu_0} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (8.5)$$

где величина

$$a = \sqrt{\frac{f_p T_p}{\mu_0}} \quad (8.6)$$

с размерностью скорости равна скорости распространения поперечных волн в нити. Перепишем волновое уравнение (8.5):

$$a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (8.7)$$

Если нить слабо растяжима, закон Гука (8.3) дает

$$f \approx l \quad (8.8)$$

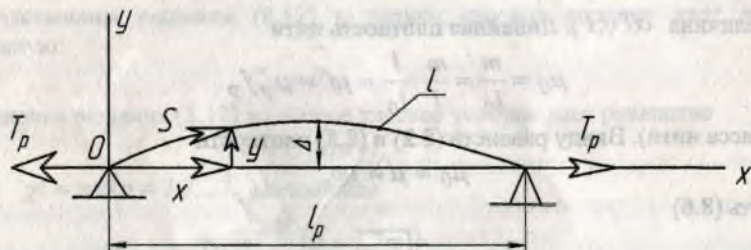
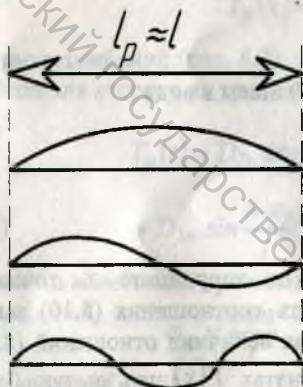


Рис. 8.1. Малые свободные поперечные колебания нити



$$n=1$$

$$\omega_1 = \frac{\pi a}{l_p}$$

$$n=2$$

$$\omega_2 = 2\omega_1$$

$$n=3$$

$$\omega_3 = 3\omega_1$$

Рис. 8.2. Формы колебаний (8.13), происходящих с частотами (8.15)

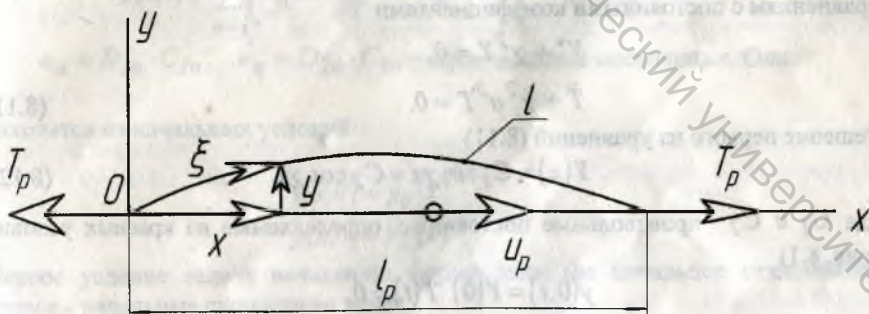


Рис. 8.3. Протягиваемая нить

(ибо величина $\alpha T \ll l$). Линейная плотность нити

$$\mu_0 = \frac{m}{l_0} = \frac{m}{l} \cdot \frac{l}{l_0} = \mu f = \mu_p f_p$$

(m – масса нити). Ввиду равенств (8.2) и (8.8) плотности

$$\mu_0 \approx \mu \approx \mu_p,$$

скорость (8.6)

$$a = \sqrt{\frac{T_p}{\mu_p}}.$$

8.2. Метод Фурье

Частные решения волнового уравнения (8.7) ищем в виде

$$y(x, t) = Y(x) \cdot T(t), \quad (8.9)$$

волновое уравнение дает соотношение

$$\frac{Y''}{Y} = \frac{1}{a^2} \frac{\ddot{T}}{T}, \quad (8.10)$$

где штрихами отмечено дифференцирование по координате x , точками – дифференцирование по времени t . Левая часть соотношения (8.10) зависит только от x , правая часть – только от t , общая величина отношений (8.10) – постоянная. Так как при положительных ординатах $Y(x)$ нить выпукла вверх (рис. 8.1), знак второй производной $Y''(x)$, совпадающий со знаком кривизны нити, отрицательный, – общая величина отношений (8.10) равна – χ^2 . Отношения (8.10) приводят к обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} Y'' + \chi^2 Y &= 0, \\ \ddot{T} + \chi^2 a^2 T &= 0. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Решение первого из уравнений (8.11)

$$Y(x) = C_1 \sin \chi x + C_2 \cos \chi x, \quad (8.12)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, определяемые из краевых условий (рис. 8.1)

$$\begin{aligned} y(0, t) &= Y(0) T(t) = 0, \\ y(l, t) &\approx y(l, t) = Y(l) T(t) = 0, \end{aligned}$$

или из условий

$$Y(0) = 0, \quad Y(l) = 0,$$

где учтено первое из равенств (8.2).

Подстановка решения (8.12) в первое краевое условие дает вторую постоянную:

$$C_2 = 0.$$

Подстановка решения (8.12) во второе краевое условие дает равенство

$$0 = C_1 \sin \chi^l,$$

откуда $\chi^l = n\pi (n = 1, 2, \dots)$, постоянные

$$\chi_n = \frac{n\pi}{l} (n = 1, 2, \dots)$$

- получаем набор частных решений первого из уравнений (8.11) вида (8.12)

$$Y_n(x) = C_{1n} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (8.13)$$

- формы колебаний (рис. 8.2).

Решения второго из уравнений (8.11)

$$\begin{aligned} T_n(t) &= D_{1n} \sin \chi_n a t + D_{2n} \cos \chi_n a t = \\ &= D_{1n} \sin \frac{n\pi a}{l} t + D_{2n} \cos \frac{n\pi a}{l} t \quad (n = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (8.14)$$

где частота колебаний, происходящих с формой (8.13),

$$\omega_n = \frac{n\pi a}{l} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (8.15)$$

a – скорость (8.6).

Произвольные колебания вида (8.9) – результат наложения колебаний вида (8.9), где используются решения (8.13) и (8.14):

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sin \frac{n\pi a}{l} t + e_n \cos \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$a_n = D_{1n} \cdot C_{1n}$, $e_n = D_{2n} \cdot C_{1n}$ – произвольные постоянные. Они

находятся из начальных условий

$$y(x, 0) = y_0(x),$$

$$\dot{y}(x, 0) = V_0(x).$$

Первое условие задает начальную форму нити (ее начальное отклонение), второе – начальные скорости ее точек.

8.3. Колебания протягиваемой нити

Пусть (рис. 8.3) натянутая нить протягивается со скоростью u_p . Начало отсчета 0 дуговой координаты ξ подвижно на нити. В малых колебаниях продольная скорость точки нити $u_s \approx u_p = \text{const}$.

Заменяя в уравнениях (7.5) эйлерову координату s на координату ξ , продольную скорость λ на скорость u_p , получим вместо волнового уравнения (8.7) более общее уравнение

$$a^2 \frac{\partial^2 y_s}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 y_s}{\partial t^2} + u_p^2 \frac{\partial^2 y_s}{\partial \xi^2} + 2u_p \frac{\partial^2 y_s}{\partial \xi \partial t},$$

или (опуская индекс s) уравнение

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2u_p \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial t} - (a^2 - u_p^2) \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} = 0, \quad (8.16)$$

где скорость a дается формулой (8.5).

Частные решения уравнения (8.16) ищем в виде

$$y(\xi, t) = Y(\xi) e^{ipt}, \quad (8.17)$$

где p — частота колебаний, $Y(\xi)$ — комплексная форма колебаний. Подстановка функции (8.17) в уравнение (8.16) дает обыкновенное линейное дифференциальное уравнение с постоянными (комплексными) коэффициентами

$$Y'' - \frac{2ipu_p}{a^2 - u_p^2} Y' + \frac{p^2}{a^2 - u_p^2} Y = 0, \quad (8.18)$$

где штрихами отмечено дифференцирование по координате ξ .

Частное решение уравнения (8.18) ищется в виде

$$Y(\xi) = e^{k\xi}. \quad (8.19)$$

Дифференцируя функцию (8.19) и подставляя результаты дифференцирования в уравнение (8.18), получим квадратное характеристическое уравнение

$$k^2 - \frac{2ipu_p}{a^2 - u_p^2} k + \frac{p^2}{a^2 - u_p^2} = 0,$$

корни которого

$$k_{1,2} = \frac{ipu_p}{a^2 - u_p^2} \pm \sqrt{-\frac{p^2 u_p^2}{(a^2 - u_p^2)^2} - \frac{p^2}{a^2 - u_p^2}} = \frac{ipu_p}{a^2 - u_p^2} \pm \frac{ipa}{a^2 - u_p^2}. \quad (8.20)$$

Общее решение уравнения (8.18)

$$Y(\xi) = C_1 e^{k_1 \xi} + C_2 e^{k_2 \xi}, \quad (8.21)$$

где произвольные постоянные C_1 и C_2 находятся из краевых условий

$$y(0, t) = 0, \quad y(l, t) = 0,$$

или из условий - см. функцию (8.17) -

$$Y(0) = 0, \quad Y(l) = 0.$$

Подставляя решение (8.21) в эти краевые условия, получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных C_1 и C_2 :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{k_1 l} + C_2 e^{k_2 l} = 0. \end{cases} \quad (8.22)$$

Условие существования ненулевого решения системы (8.22)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{k_1 l} & e^{k_2 l} \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$e^{k_2 l} - e^{k_1 l} = e^{k_1 l} (1 - e^{(k_1 - k_2) l}) = 0,$$

откуда следует условие

$$e^{(k_1 - k_2) l} = 1, \quad (8.23)$$

где разность корней (8.20)

$$k_1 - k_2 = \frac{ip}{a - u_p} - \left(-\frac{ip}{a + u_p} \right) = ip \frac{2a}{a^2 - u_p^2}$$

- мнимое число. Экспонента (8.23) с мнимым показателем

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi = 1,$$

откуда следует

$$\varphi = \frac{2pal}{a^2 - u_p^2} = 2n\pi,$$

и частоты свободных колебаний протягиваемой нити

$$p_n = \frac{n\pi(a^2 - u_p^2)}{al} = \frac{n\pi a}{l} \left(1 - \frac{u_p^2}{a^2} \right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Используя частоты (8.15), напомним

$$p_n = \omega_n \left(1 - \frac{u_p^2}{a^2} \right) \approx \omega_n,$$

поскольку в практике скорость протягивания $u_p \ll a$; влиянием скорости u_p на частоты колебаний нити можно пренебречь.

Лекция 9. Резонанс в вынужденных и параметрических колебаниях нити

9.1. Вынужденные колебания нити при перематке

Пусть конец нити B в нитеводителе перемещается по гармоническому закону

$$OB = l\alpha = lA \sin \Omega t, \quad (9.1)$$

где Ω – частота изменения угла α (рис. 9.1). Перемещение одного из концов нити (B) при другом неподвижном (A) относительно большое. Если, однако, рассматривать колебания нити во вращающейся системе координат xAy , колебания нити можно по-прежнему считать малыми.

Ограничимся рассмотрением малых поперечных колебаний. Добавив в волновом уравнении (8.7) переносные тангенциальные силы инерции (рис. 9.1) с плотностью $Y(x, t)$

$$(\mu_0 dx)Y(x, t) = -(\mu_0 dx)\varepsilon x,$$

где - см. выражение (9.1) -

$$\varepsilon = \ddot{\alpha} = -A\Omega^2 \sin \Omega t$$

- угловое ускорение вращающейся системы координат, напомним дифференциальное уравнение колебаний:

$$a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \varepsilon x = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

(влиянием продольной скорости нити пренебрегаем), или

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -Ax \frac{\Omega^2}{a^2} \sin \Omega t. \quad (9.2)$$

В установившемся режиме вынужденных колебаний нить колеблется с частотой Ω , частное решение уравнения (9.2), описывающее вынужденные колебания нити, ищем в виде

$$y(x, t) = Y(x) \sin \Omega t. \quad (9.3)$$

После подстановки решения (9.3) в уравнение (9.2) получим обыкновенное линейное дифференциальное уравнение относительно формы колебаний $Y(x)$:

$$Y'' + \frac{\Omega^2}{a^2} Y = -Ax \frac{\Omega^2}{a^2}. \quad (9.4)$$

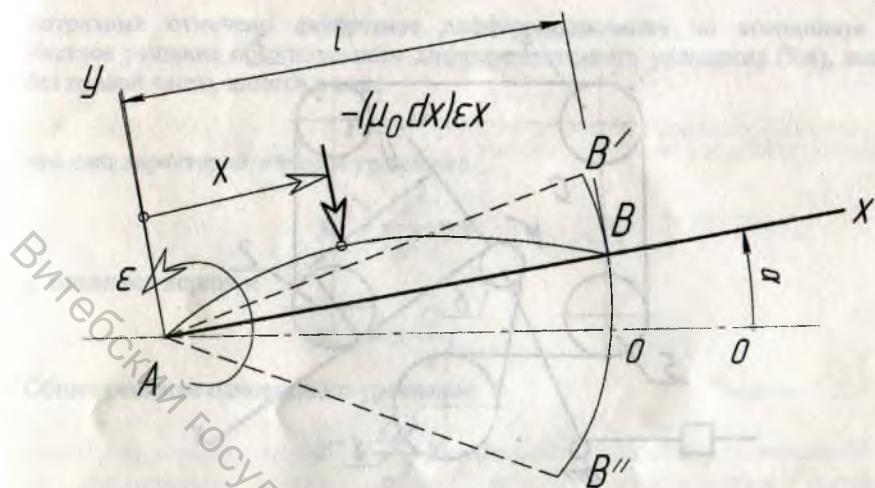


Рис. 9.1. Малые поперечные колебания нити во вращающейся системе координат

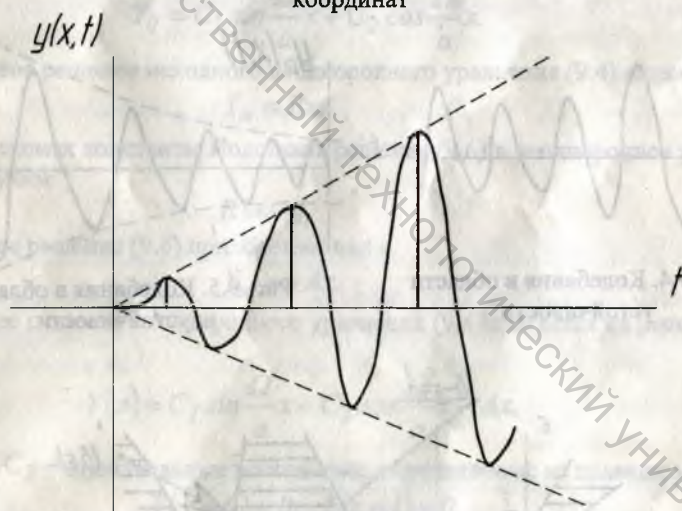


Рис. 9.2. Резонанс: амплитуда колебаний точки нити ~~не~~ растет по закону арифметической прогрессии

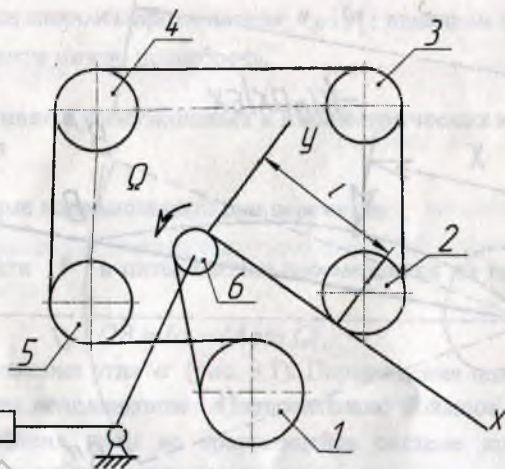


Рис. 9.3. Тесемочная передача прядильной машины

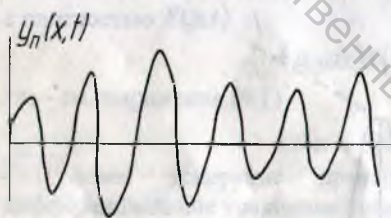


Рис. 9.4. Колебания в области устойчивости

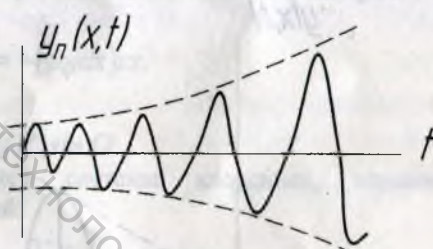


Рис. 9.5. Колебания в области неустойчивости

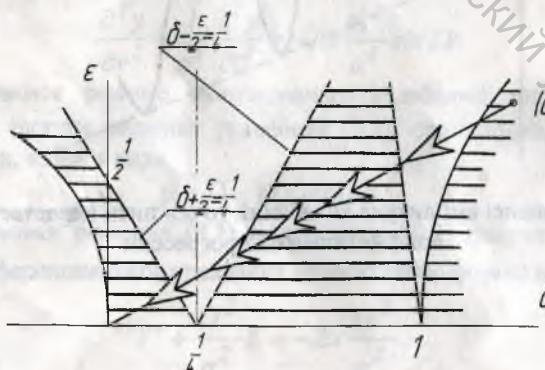


Рис. 9.6. Диаграмма Айнса-Стретта

(штрихами отмечено двукратное дифференцирование по координате x). Частное решение обыкновенного дифференциального уравнения (9.4), взятого без правой части, ищется в виде

$$Y = e^{\mu x},$$

что дает характеристическое уравнение

$$\mu^2 + \frac{\Omega^2}{a^2} = 0$$

с мнимыми корнями

$$\mu_{1,2} = \pm \frac{\Omega}{a} i.$$

Общее решение однородного уравнения

$$Y'' + \frac{\Omega^2}{a^2} Y = 0$$

в соответствии с этим

$$Y_0 = C_1 \sin \frac{\Omega}{a} x + C_2 \cos \frac{\Omega}{a} x. \quad (9.5)$$

Частное решение исходного неоднородного уравнения (9.4) ищем в виде

$$Y_n = Bx, \quad (9.6)$$

где B – искомая константа. Подставив решение (9.6) в неоднородное уравнение (9.4), получим

$$B = -A,$$

т.е. частное решение (9.6) приобретает вид

$$Y_n = -Ax. \quad (9.7)$$

Общее решение неоднородного уравнения (9.4) складывается из решений (9.5) и (9.7):

$$Y(x) = C_1 \sin \frac{\Omega}{a} x + C_2 \cos \frac{\Omega}{a} x - Ax, \quad (9.8)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, определяемые из краевых уравнений

$$Y(x=0) = 0, \quad Y(x=l) = 0. \quad (9.9)$$

Подстановка решения (9.8) в условия (9.9) дает систему линейных алгебраических уравнений

$$C_2 = 0,$$

$$C_1 \sin \frac{\Omega}{a} l + C_2 \cos \frac{\Omega}{a} l - Al = 0$$

относительно постоянных C_1 и C_2 . Ее решение

$$C_1 = \frac{Al}{\sin \frac{\Omega}{a} l}, \quad C_2 = 0,$$

т.е. форма колебаний нити, отвечающая краевым условиям (9.9),

$$Y(x) = Al \left(\frac{\sin \frac{\Omega}{a} x}{\sin \frac{\Omega}{a} l} - \frac{x}{l} \right). \quad (9.10)$$

9.2. Резонанс

Из закона вынужденных колебаний нити (9.3) следует: формула (9.10) дает амплитуду вынужденных колебаний точки нити с координатой x , происходящих с частотой Ω . Амплитуда (9.10) конечная при условии

$$\frac{\Omega}{a} l \neq n\pi \quad (n = 1, 2, \dots),$$

или при условии

$$\Omega \neq \omega_n \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (9.11)$$

где

$$\omega_n = \frac{n\pi a}{l} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

- частота свободных (собственных) колебаний нити. Если условие (9.11) не выполняется, т.е. при условии равенства $\Omega = \omega_n$, возникает резонанс, при котором амплитуда колебаний точек нити нарастает по закону арифметической прогрессии (рис. 9.2). Решение (9.10) теряет смысл - становится бесконечно большим.

9.3. Параметрические поперечные колебания нити

На рис. 9.3. показана приводная тесьма прядильной машины, огибающая барабан 1, блокки веретен 2, 3, 4, 5 и натяжной ролик 6. Если ролик 6 не уравновешен, его "бьет" (он колеблется), длина участка тесьмы, идущей от веретена 2 к натяжному ролику 6, изменяется по закону

$$l = l_p (1 + A \cos \Omega t),$$

где l_p - длина рассматриваемого участка тесьмы в равновесии, Ω - угловая скорость ролика, A - малая постоянная. Относительная длина участка

$$f = \frac{l}{l_0} = \frac{l_p}{l_0} (1 + A \cos \Omega t) = f_p (1 + A \cos \Omega t). \quad (9.12)$$

Если тесьма упругая по Гуку - см. реологическое соотношение (8.3) - и слабо растяжимая ($\alpha T \ll 1$), натяжение тесьмы

$$T = \frac{f - 1}{\alpha} = \frac{f_p (1 + A \cos \Omega t) - 1}{\alpha} = \frac{f_p - 1}{\alpha} + \frac{f_p A}{\alpha} \cos \Omega t,$$

или натяжение

$$T = T_p + \frac{f_p A}{\alpha} \cos \Omega t = T_p \left(1 + \frac{A}{\alpha T_p / f_p} \cos \Omega t \right). \quad (9.13)$$

Так как $\alpha T_p \ll 1$ (тесьма слабо растяжимая), $f_p \approx 1$, коэффициент

$$\Delta = \frac{A}{\alpha T_p / f_p} \gg A,$$

т.е. произведение относительной длины (9.12) и натяжения (9.13), входящее в коэффициент в уравнение колебаний (8.5), может быть написано в виде

$$fT = f_p T_p (1 + \Delta \cos \Omega t).$$

Волновое уравнение (8.7) приобретает вид

$$a^2 (1 + \Delta \cos \Omega t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (9.14)$$

(влиянием продольной скорости тесьмы пренебрегаем), где константа $\Delta \ll 1$.

9.4. Уравнение Матъе

Решение уравнения (9.14) представляется по Галеркину $[l]$ в виде

$$y_n(x, t) = F_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (9.15)$$

где $F_n(t)$ — неизвестная функция времени, а функция

$$Y_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$$

— известная n -ая форма свободных колебаний нити, удовлетворяющая краевым условиям задачи

$$y_n(0, t) = y_n(l, t) = 0.$$

После подстановки решения (9.15) в уравнение (9.14) получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 (1 + \Delta \cos \Omega t) F_n = \ddot{F}_n$$

(точками отмечено двукратное дифференцирование по времени), или

$$\ddot{F}_n + (\omega_n^2 + \Delta \omega_n^2 \cos \Omega t) F_n = 0. \quad (9.16)$$

Периодическая функция $\cos \Omega t$ в уравнении (9.16) называется функцией возбуждения, ее частота Ω — частотой возбуждения (здесь она равна угловой скорости натяжного ролика).

Перейдем в уравнении (9.16) к новой переменной $\tau = \Omega t$:

$$\begin{aligned} \dot{F}_n &= \frac{dF_n}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \Omega \frac{dF_n}{d\tau}, \\ \ddot{F}_n &= \Omega \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dF_n}{d\tau} \right) \cdot \frac{d\tau}{dt} = \Omega^2 \frac{d^2 F_n}{d\tau^2}. \end{aligned}$$

Уравнение (9.16) примет вид уравнения Матье [3]:

$$\frac{d^2 F_n}{d\tau^2} + (\delta + \varepsilon \cos \tau) F_n = 0, \quad (9.17)$$

где параметры

$$\delta = \frac{\omega_n^2}{\Omega^2}, \quad \varepsilon = \Delta \frac{\omega_n^2}{\Omega^2}. \quad (9.18)$$

9.5. Параметрический резонанс

Решения уравнения (9.17) могут быть динамически устойчивыми и динамически неустойчивыми. В первом случае (рис. 9.4) амплитуды колебаний точки тесьмы с абсциссой x , изменяясь во времени остаются ограниченными. Во втором случае (рис. 9.5) амплитуды колебаний нарастают во времени по закону геометрической прогрессии. Характер колебаний определяется параметрами (9.18).

На плоскости параметров $\delta - \varepsilon$ можно построить [3] области устойчивости и неустойчивости — диаграмму Айнса-Стретта. На рис. 9.6 представлена часть диаграммы, отвечающая малым ε . Если точка с координатами (9.18) попадает в область устойчивости (заштрихованы на рис. 9.6), колебания похожи на изображенные на рис. 9.4. Если точка (δ, ε) попадает в область неустойчивости, колебания похожи на изображенные на рис. 9.5 — случай параметрического резонанса.

Если угловая скорость натяжного ролика Ω возрастает, точка (δ, ε) перемещается вдоль прямолинейной траектории - см. формулы (9.18) -

$$\varepsilon = \Delta\delta,$$

стремясь к началу координат. Области устойчивости и неустойчивости чередуются в этом "движении" (рис. 9.6).

Границы главной области неустойчивости (рис. 9.6) описываются уравнениями

$$\delta \pm \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{4}.$$

Используя здесь параметры (9.18), найдем другие уравнения [1]:

$$\Omega = 2\omega_n \sqrt{1 \pm \frac{1}{2}\Delta}, \quad \Delta \ll 1.$$

Если угловая скорость натяжного ролика

$$\Omega \approx 2\omega_n$$

(ω_n - частота свободных (собственных) колебаний тесьмы), ветвь тесьмы, идущая от веретена к ролику (рис. 9.3), может оказаться динамически неустойчивой, а колебания ее значительными.

Литература

1. Якубовский, Ю. В. Основы механики нити / Ю. В. Якубовский [и др.]. – Москва : Легкая индустрия, 1973. – 271 с.
2. Айзерман, М. А. Классическая механика / М. А. Айзерман. – Москва : Наука, 1974. – 367 с.
3. Меркин, Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения / Д. Р. Меркин. – Москва : Наука, 1971. – 312 с.

Учебное издание

Федосеев Гелий Николаевич

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА НИТИ, ТКАНИ И ТРИКОТАЖА

Курс лекций

Редактор Калинин А.А.

Технический редактор Германенко Л.Г.

Корректор Богачёва Е.М.

Компьютерная верстка Германенко Л.Г.

Подписано к печати 06.05.09. Формат 60х84 1/16 . Бумага офсетная № 1.
Гарнитура "Таймс". Усл. печ. листов 3,4 . Уч.-изд. листов 3,6.
Тираж 78 экз. Заказ № 230

Учреждение образования "Витебский государственный технологический университет" 210035, г. Витебск, Московский пр., 72

Отпечатано на ризографе учреждения образования "Витебский государственный технологический университет".
Лицензия № 02330/0494384 от 16 марта 2009 г.