

УСИЛЕНИЕ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ С ПОМОЩЬЮ СОСТАВНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ КОНЦЕНТРАТОРОВ

Степаненко Д.А.

Белорусский национальный технический университет
г. Минск, Беларусь, E-mail: stepd@tut.by

Концентраторы являются важнейшим элементом ультразвуковых колебательных систем технологического и медицинского назначения и обычно выполняются в виде стержней с уменьшающейся площадью поперечного сечения. Помимо стержневых концентраторов могут использоваться концентраторы на основе кольцевых упругих элементов [1, 2], основными преимуществами которых являются простота изготовления, малые габаритные размеры и масса. Одним из типов кольцевых концентраторов являются концентраторы с переменной площадью поперечного сечения [1]. Как и в случае стержневых концентраторов, усиление колебаний такими кольцевыми концентраторами основано на изменении площади поперечного сечения. В то же время известны конструкции стержневых концентраторов, обеспечивающие усиление колебаний за счет изменения упругих свойств материала [3, 4], в частности, конструкция, состоящая из двух соединенных между собой четвертьволновых стержней с различным модулем упругости [4]. Основываясь на вышесказанном, можно предположить, что усиление колебаний по амплитуде может быть достигнуто с помощью составных кольцевых упругих элементов, состоящих из двух кольцевых сегментов с различным модулем упругости. Для проверки этого предположения был проведен теоретический анализ.

Рассмотрим составное полукольцо, состоящее из двух сегментов с модулями упругости E_1 и E_2 и плотностями ρ_1 и ρ_2 (рис. 1).

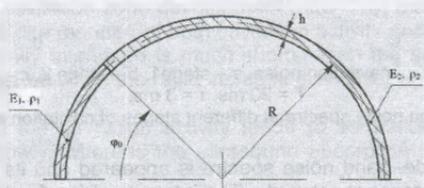


Рисунок 1 – Составной кольцевой упругий элемент

Колебания однородного кольцевого сегмента описываются уравнениями [5]

$$L_1 V - L_2 W = 0, \quad L_2 V - L_3 W = 0, \quad (1)$$

где V – амплитуда тангенциальных колебательных смещений, W – амплитуда радиальных колебательных смещений, L_1, L_2, L_3 – линейные дифференциальные операторы, определяемые выражениями

$$L_1 = (1+p) \frac{d^2}{d\varphi^2} + p\xi, \quad L_2 = -p \frac{d^3}{d\varphi^3} + \frac{d}{d\varphi}, \quad L_3 = p \frac{d^4}{d\varphi^4} + 1 - p\xi,$$

$p = J/SR^2$ – безразмерный геометрический параметр, J – осевой момент инерции поперечного сечения сегмента, S – площадь поперечного сечения сегмента, R – радиус средней линии сегмента, $\xi = \omega^2/\rho\omega_0^2$ – безразмерный частотный параметр, ω – круговая частота колебаний, $\omega_0 = (1/R)\sqrt{E/\rho}$.

Уравнения (1) имеют решения, вид которых зависит от характера корней кубического уравнения

$$\zeta^3 + (2 + p\xi)\zeta^2 + (1 - \xi - p\xi)\zeta + \xi(1 - p\xi) = 0.$$

Величины ξ_L , ξ_M , ξ_U частотного параметра ξ , при которых происходит перемена характера корней, зависят от геометрического параметра p .

Решения уравнений (1) представляют собой линейную комбинацию шести базисных функций, причем коэффициенты при этих функциях в решении $W(\varphi)$ могут быть выражены через соответствующие коэффициенты в решении $V(\varphi)$. С учетом граничных условий на концах полукольца решение $V(\varphi)$ при $\xi_M < \xi \leq \xi_U$ принимает вид

$$V_1(\varphi_1) = A_1 \sin(d_1 \varphi_1) + A_2 \operatorname{sh}(e_1 \varphi_1) + A_3 \operatorname{sh}(f_1 \varphi_1), \quad (2)$$

$$V_2(\varphi_2) = A_4 \sin(d_2 \varphi_2) + A_5 \operatorname{sh}(e_2 \varphi_2) + A_6 \operatorname{sh}(f_2 \varphi_2), \quad (3)$$

то есть в силу симметрии сохраняются только три базисные функции.

Индексы «1» и «2» у амплитуд колебательных смещений и угловых координат указывают на их отношение к соответствующим сегментам полукольца. При этом координата φ_1 отсчитывается от сечения $\varphi = 0$ по часовой стрелке, а координата φ_2 – от сечения $\varphi = \pi$ против часовой стрелки.

Подстановка решений (2)–(3) и выражаемых через них решений $W_1(\varphi_1)$ и $W_2(\varphi_2)$ в кинематические и силовые условия непрерывности решений в сечении $\varphi = \varphi_0$ дает для определения коэффициентов A_i систему однородных линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{M}(\omega)\mathbf{A} = 0, \quad (4)$$

где \mathbf{M} – матрица размером 6×6 , вид которой зависит от соотношения частотных параметров ξ_1 и ξ_2 и величин ξ_L , ξ_M , ξ_U ; $\mathbf{A} = (A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4 \ A_5 \ A_6)^T$ – вектор неизвестных коэффициентов.

Для того, чтобы система (4) имела нетривиальное решение, необходимо, чтобы выполнялось условие резонанса

$$\det \mathbf{M}(\omega) = 0,$$

из которого определяются резонансные частоты колебаний кольца.

Отыскание вектора \mathbf{A} и зависящих от его значения собственных форм колебаний затрудняется тем, что матрица $\mathbf{M}(\omega)$ в окрестности точек резонанса является плохо обусловленной. В связи с этим решение системы (4) производится методом сингулярного разложения (SVD–разложения). Правые сингулярные векторы, соответствующие нулевым или близким к нулю сингулярным числам матрицы $\mathbf{M}(\omega)$, будут являться линейно независимыми нетривиальными решениями системы (4).

В качестве примера был рассмотрен расчет составного кольцевого концентратора со следующими параметрами: радиус средней линии $R = 29$ мм, толщина в радиальном направлении $h = 2$ мм, модули упругости материалов $E_1 = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па (сталь) и $E_2 = 1,3 \cdot 10^{11}$ Па (бронза), плотности материалов $\rho_1 = 7800$ кг/м³ и $\rho_2 = 8300$ кг/м³, центральный угол первого сегмента $\varphi_0 = \pi/4$. Были рассмотрены частоты колебаний f в диапазоне от 20 до 25 кГц. На рисунке 2 приведена резонансная кривая концентратора, представляющая собой график зависимости $\lg(|\det \mathbf{M}(f)|)$ от частоты f . Точки, в которых $\lg(|\det \mathbf{M}(f)|) \rightarrow -\infty$, соответствуют резонансным частотам. Одной из резонансных частот является частота $f_{\text{рез}} = 22,75$ кГц, для которой с помощью метода сингулярного разложения была рассчитана собственная форма колебаний, распределение амплитуды радиальных колебательных смещений $W(\varphi)$ для которой приведено на рисунке 3. Из множества линейно зависимых нетривиальных решений системы (4) было выбрано решение, удовлетворяющее условию $\|\mathbf{A}\| = 1$.

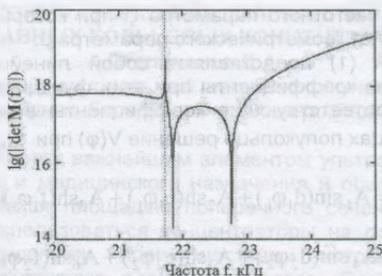


Рисунок 2 – Резонансная кривая кольцевого концентратора

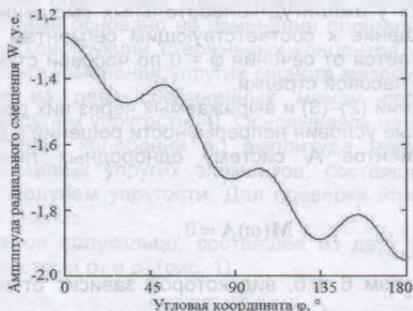


Рисунок 3 – Собственная форма колебаний концентратора для частоты $f = 22,75$ кГц

Как видно из рисунка 3, рассматриваемая собственная форма колебаний характеризуется наличием усиления колебаний по амплитуде с коэффициентом усиления

$$K = |W(\pi)/W(0)| = 1,53.$$

Таким образом, теоретический анализ показывает возможность усиления ультразвуковых колебаний по амплитуде с помощью составных кольцевых концентраторов.

Список литературы:

1. Степаненко, Д.А. Влияние формы кольцевого концентратора ультразвуковой системы на коэффициент усиления амплитуды колебаний / Д.А. Степаненко, И.В. Луговой, В.П. Луговой // Наука и техника. – 2016. – № 3. – С. 209–215.
2. Степаненко, Д.А. Разработка и исследование нового типа концентраторов ультразвуковых колебаний на основе кольцевых упругих элементов / Д.А. Степаненко, В.Т. Минченя, В.П. Луговой, И.В. Луговой // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2013. – Т. 18, № 2. – С. 90–94.
3. Степаненко, Д.А. Методика расчета и возможные применения функционально-градиентных ультразвуковых волноводов / Д.А. Степаненко, В.Т. Минченя // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – № 5 (22). – С. 19–23.
4. United States Patent Application 2007/0131034 A1, Int. Cl. G01N 29/00. Amplifying ultrasonic waveguides / T.D. Ehler [et al.]. – Appl. No. 13/228985; filed 09.09.2011; pub. date 29.12.2011.
5. Lang, T.E. Vibration of thin circular rings. Part I. Solution for modal characteristics and forced excitation. Jet Propulsion Laboratory Technical Report No. 32–261 / T.E. Lang. – Pasadena, 1962. – 21 p.