

## СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ ПЛАСТИН ПО ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ

Саркисян А.А., Саркисян С.О.

Гюмрийский государственный педагогический институт им. М. Налбандяна  
г. Гюмри, Армения, E-mail: armenuhis@mail.ru

Рассматриваются микрополярные пластинки, упругие прогибы которых сравнимы с их толщиной и вместе с тем малы по отношению к характерным размерам в плане, одновременно малы как углы поворота нормалей к срединной поверхности до деформации, так и их свободные повороты, а также, в тензоре деформации и тензоре изгиба-кручения учитываются нелинейные слагаемые в градиентах перемещения. На основе прикладной модели геометрически нелинейных пластин решена конкретная задача свободных колебаний для микрополярных упругих гибких прямоугольных пластин, когда края их шарнирно оперты. На основе численного анализа устанавливаются некоторые эффективные проявления микрополярного материала по сравнению с соответствующим классическим материалом.

Рассмотрим пластинку постоянной толщины  $2h$  как трёхмерное упругое микрополярное изотропное тело.

Основные уравнения геометрически нелинейных динамических изгибных колебаний микрополярных упругих тонких пластин со свободным вращением с учетом всех вращательно-сдвиговых деформаций имеют вид [1]:

Уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial S_{ji}}{\partial x_j} &= 2\rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial M_{ji}}{\partial x_j} - N_{3i} = \frac{2\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ T_{11} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{1}{2} (S_{12} + S_{21}) \frac{\partial w}{\partial x_2} \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{1}{2} (S_{12} + S_{21}) \frac{\partial w}{\partial x_1} + T_{22} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right] = 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial L_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial L_{ji}}{\partial x_j} + (-1)^j (N_{j3} - N_{3j}) &= 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{23}}{\partial x_2} + (S_{12} - S_{21}) = 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2} \\ L_{33} - \frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial x_1} - \frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial x_2} - (M_{12} - M_{21}) + \frac{2Jh^3}{3} \frac{\partial^2 \iota}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Соотношения упругости

$$\begin{aligned} T_{ii} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} [\Gamma_{ii} + \nu \Gamma_{jj}], \quad M_{ii} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} [K_{ii} + \nu K_{jj}], \\ M_{ij} &= \frac{2h^3}{3} [(\mu + \alpha) K_{ij} + (\mu - \alpha) K_{ji}], \quad S_{ij} = 2h [(\mu + \alpha) \Gamma_{ij} + (\mu - \alpha) \Gamma_{ji}] \\ N_{i3} &= 2h [(\mu + \alpha) \Gamma_{i3} + (\mu - \alpha) \Gamma_{3i}], \quad N_{3i} = 2h [(\mu + \alpha) \Gamma_{3i} + (\mu - \alpha) \Gamma_{i3}] \\ L_{ii} &= 2h [(\beta + 2\gamma) \kappa_{ii} + \beta (\kappa_{jj} + \iota)], \quad L_{33} = 2h [(\beta + 2\gamma) \iota + \beta (\kappa_{11} + \kappa_{22})], \\ L_{ij} &= 2h [(\gamma + \varepsilon) \kappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon) \kappa_{ji}], \quad L_{i3} = 2h \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \kappa_{i3}, \quad \Lambda_{i3} = \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \iota_{i3} \end{aligned} \quad (2)$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_i} \right)^2, \quad \Gamma_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - (-1)^j \Omega_3 + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2},$$

$$\Gamma_{i3} = \frac{\partial w}{\partial x_i} + (-1)^j \Omega_j, \Gamma_{3i} = \psi_j - (-1)^j \Omega_j, K_{ii} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}, K_{jj} = \frac{\partial \psi_j}{\partial x_j} - (-1)^j l, \\ \kappa_{ii} = \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_i}, \kappa_{33} = l, \kappa_{ij} = \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_i}, \kappa_{i3} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_i}, l_{i3} = \frac{\partial l}{\partial x_i} \quad (3)$$

Рассмотрим граничные условия шарнирного опирания:

$$T_{ii} = 0, u_j = 0, M_{ii} = 0, \psi_j = 0, w = 0, L_{ij} = 0, \Omega_i = 0, \Lambda_{j3} = 0 \text{ при } x_i = 0; a \quad (4)$$

К системе основных уравнений микрополярных пластин со свободным вращением и граничным условиям (4) нужно присоединить также соответствующие начальные условия для  $w, \partial w / \partial t, \psi_j, \partial \psi_j / \partial t, \Omega_i, \partial \Omega_i / \partial t, l, \partial l / \partial t$  (которые, конечно, в случае свободных колебаний не используются).

Будем пренебрегать всеми инерционными членами в уравнениях движения, кроме  $2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ .

Решение граничной задачи (1)–(4) при изучении собственных колебаний представим в виде:

$$w(x_1, x_2, t) = w(t) \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b} \\ u_1(x_1, x_2, t) = u_1(t) \cos \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b}, \quad u_2(x_1, x_2, t) = u_2(t) \sin \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi x_2}{b} \\ \psi_1(x_1, x_2, t) = \psi_1(t) \cos \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b}, \quad \psi_2(x_1, x_2, t) = \psi_2(t) \sin \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi x_2}{b} \quad (5) \\ \Omega_1(x_1, x_2, t) = \Omega_1(t) \sin \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi x_2}{b}, \quad \Omega_2(x_1, x_2, t) = \Omega_2(t) \cos \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b} \\ \Omega_3(x_1, x_2, t) = \Omega_3(t) \cos \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi x_2}{b}, \quad l(x_1, x_2, t) = l(t) \cos \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi x_2}{b}$$

Решение (5) уже удовлетворяет граничным условиям (4). Поставим эти представления в геометрические соотношения (3). Получившиеся выражения для деформаций и изгибов–кручений поставим в физические соотношения, получим выражения для усилий, моментов и гипермоментов. Применим метод Галеркина для систем уравнений движения (1). Выполним интегрирование, далее функции  $w(t), u_1(t), u_2(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \Omega_1(t), \Omega_2(t), \Omega_3(t), l(t)$  представим виде:

$$w(t) = W \cos(pt), \quad u_1(t) = U_1 \cos(pt), \quad u_2(t) = U_2 \cos(pt) \\ \psi_1(t) = \Psi_1 \cos(pt), \quad \psi_2(t) = \Psi_2 \cos(pt), \quad \Omega_1(t) = O_1 \cos(pt) \quad (6) \\ \Omega_2(t) = O_2 \cos(pt), \quad \Omega_3(t) = O_3 \cos(pt), \quad l(t) = I \cos(pt)$$

Поставим эти функции в полученные уравнения, умножим их на  $\cos(pt)$  и интегрируем по  $t$  от 0 до  $\frac{\pi}{2p}$ . В результате получим систему алгебраических уравнений

относительно коэффициентов  $W, U_1, U_2, \Psi_1, \Psi_2, O_1, O_2, O_3, I$ . Из этой системы можно получить зависимость  $W - p$ .

Эта задача решена также по соответствующей линейной модели микрополярных упругих тонких пластин. Введем безразмерный прогиб  $A = W/h$ , а также обозначение отношения величины  $p$  к соответствующей частоте линейных колебаний  $p_0$ :  $\eta = p/p_0$ .

Численные расчеты выполнены для квадратной пластинки  $b = a = 0,005$  м и примем для относительной толщины  $\delta$ , следующую величину  $\delta = \frac{h}{a} = \frac{1}{100}$ . Для физических постоянных примем значения [2]  $\alpha = 0,115 \cdot 10^9$  Па,  $\mu = 1,033 \cdot 10^9$  Па,  $\lambda = 2,1951 \cdot 10^9$  Па,  $\gamma = 4,1$  Н,  $\varepsilon = 0,13$  Н,  $\beta = -2,34$  Н,  $\rho = 590 \text{ м}^3$ ,  $J = 5,31 \cdot 10^6 \text{ кг/м}$ . На рисунке 1 приведена зависимость  $(\eta, A)$ , эта линия называется скелетной кривой, которая отражает основные свойства деформируемой системы [3]. Кривая  $(\eta, A)$  представляет линию жесткого типа, т.е. с увеличением амплитуды частота возрастает. При весьма малых амплитудах имеем  $\eta \rightarrow 1$ . С увеличением амплитуды частота колебаний возрастает и притом все более и более резко.

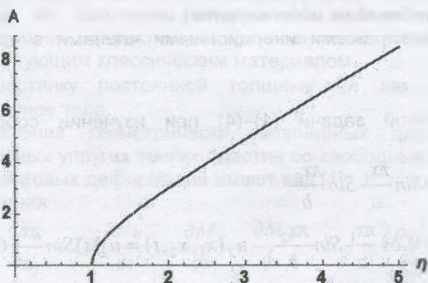


Рисунок 1 – Зависимость безразмерного прогиба  $A$  от величины  $\eta$

Отметим, что величина низкой частоты по микрополярной теории всегда мала по сравнению с величиной низкой частоты по геометрически нелинейной классической теории. Кроме того, анализ полученных численных результатов устанавливает повышенные жесткостные и устойчивые свойства микрополярных пластин по сравнению с классическим случаем.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 15T–2C138.

**Список литературы:**

1. Саркисян А. А., Саркисян С. О. Динамическая модель микрополярных пологих оболочек при больших перемещениях. / Труды IV международной конференции Актуальные проблемы механики сплошной среды, Цахкадзор, Армения, 21–26 сентября 2015 года. С. 357–361.
2. Lakes R. Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua// Continuum models for materials with micro-structure/ Ed. By H. Muhlihaus, J. Wiley. N. Y.: J. Wiley and sons, Ltd., 1995. Ch. 1. P. 1–22.
3. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука. 1972. 432 с.