УДК 62-507

# СВОЙСТВА ПОЛИЦИКЛИЧЕСКИХ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

Бром Е.Л.

Определение 1. Полициклическим автоматом называется конечный автомат, описываемый усеченным открытым деревом, состояния которого, находящиеся в выходных вершинах, совпадают с начальным или ему эквивалентным. Содержательно это означает, что автомат состоит из циклов с одним и тем же начальным состоянием.

Под циклом понимается последовательность тактов от первого до последнего, после которого процесс начинается сначала. Если перенумеровать такты в том порядке, в котором они находятся в цикле, то наибольший номер будет совпадать с длиной цикла.

Такт, как обычно, характеризуется периодом времени, в течении которого сохраняются неизменными состояние входа и выхода и внутреннее состояние автомата.

Цикл, в котором все состояния, за исключением начального и последнего различимы, называется элементарным.

Циклу в дереве соответствует путь соединяющий входную вершину дерева с одной из выходных.

Пусть для некоторой входной последовательности $X_1, X_2,\ldots,X_n$ и для состояния $p=g_1$, мы имеем $\varphi(X_1,g_1)=g_2$, $\varphi(X_2,g_2)=g_3,\ldots, \varphi(X_n,g_n)=g_{n+1}=r$.

В таком случае будем говорить, что входная последовательность $X_1, X_2,\ldots,X_T$ переводит состояние P в состояние r, или что r достижимо из P посредством последовательности значений входа $X_1, X_2,\ldots,X_n$.

Отметим, что в полициклическом автомате любое состояние достижимо из начального.

Определение 2. Автомат M с множеством состояний $Q=\{g_0,g_1,\ldots,g_n\}$ называют сильносвязным, если для любых двух состояний $g_i$ и $g_j$ существует входная последовательность, переводящая $g_i$ в $g_j$, причем i может равняться j [2].

Теорема 1. Полициклический автомат M является сильносвязным.

Действительно в полициклическом автомате всегда можно из любого состояния, которым оканчивается цикл, перейти в начальное; кроме того, любое состояние достижимо из начального. Но в таком случае всегда найдется такая подходящая входная последовательность, которая переведет любое состояние $g_i$ автомата M в любое другое состояние $g_j$ этого же автомата.

Обратное утверждение не имеет места, т.е. не всякий сильносвязный автомат будет полициклическим.

Одновременно мы показали, что все состояния полициклического автомата возвратны, т.е. если какое-нибудь состояние достижимо из $g_i$, то и $g_j$ достижимо из $g_i$.

Определение 3. Степенью достижимости автомата M, обозначим ее $\alpha(M)$, назовем такое наименьшее число $\alpha$, что посредством входной последовательности длиною $\le\alpha$ можно перевести любое состояние $g_i$ во всякое другое состояние, в которое оно вообще переводимо.

Пусть $n_1$ и $n_2$ - наибольшие по порядку длины циклов. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2. $\alpha(M)= n_1+n_2$

Рассмотрим вначале случай, когда оба состояния $g_i$ и $g_j$ находятся в одном цикле. Тогда очевидно, $\alpha(M)\le n_1$ .

Пусть теперь $g_i$ и $g_j$ находятся в разных циклах. Степень достижимости, очевидно, будет наибольшей, когда $g_j$ находится в цикле с длиной входной последовательности, равной $n_1$ и притом из начального состояния $g_o$ в $g_i$ можно перейти всего лишь за один такт; а состоянием $g_j$ заканчивается цикл, которому соответствует последовательность длиною $n_r$.

Из состояния $g_i$ состояние, которым оканчивается соответствующий цикл, достигается посредством входной последовательности длиною равной $n_1$-1, а из этого состояния в начальное можно перейти за один такт. Состояние $g_j$ достигается из $g_o$ посредством входной последовательности длиною $n_2$.

Следовательно, $\alpha(M)= n_1- 1+1+n_2= n_1+ n_2$.

Полициклический автомат полностью обратим в том смысле, что все, что делается им благодаря некоторой входной последовательности, всегда можно уничтожить, применяя другую подходящую входную последовательность.

Преходящим подавтоматом называют такой подавтомат, который можно перевести, по крайней мере, в один другой подавтомат, но который не может быть достигнут после того, как оставлен; тупиковый подавтомат, может быть, достигнут, по крайней мере, из одного другого подавтомата, но не может быть покинут после того, как он достигнут, изолированный подавтомат не может быть достигнут ни из какого другого подавтомата и из него нельзя перейти ни в какой другой подавтомат [2].

Полициклические автоматы, являясь сильносвязанными, не содержат в себе никаких преходящих, тупиковых или изолированных подавтоматов.

С увеличением числа состояний сложность и цена многих автоматов представляющих собой устройства управления, возрастает. Учитывая это, в автоматах стараются избегать наличия преходящих и изолированных подавтоматов, в связи с недостижимостью их состояний. Поэтому, а также в силу цикличности большинства современных технологических операций, полициклические автоматы представляют собой класс автоматов, которые часто встречаются в практической деятельности.

_Определение 4._ Автоматы $M_1$ и $M_2$ называются эквивалентными ($M_1 \sim M_2$) тогда и только тогда, когда для каждого состояния $g_i$ автомата $M_1$ существует, по крайней мере, одно эквивалентное ему состояние $g_J$ автомата $M_2$ и для каждого состояния $P_j$ автомата $M_2$ существует, по крайней мере, одно эквивалентное состояние автомата $M_1$. Если автоматы $M_1$ и $M_2$ не эквивалентны, то они различимы ($M_1 \sim M_2$)[1].

Для того чтобы автоматы $M_1$ и $M_2$ были различимы, достаточно наличия хотя бы одного состояния автомата $M_1$, не являющегося эквивалентным никакому состоянию автомата $M_2$, или одного состояния в $M_2$, которое не является эквивалентным никакому состоянию в $M_1$.

Наряду с понятием эквивалентности автоматов существует понятие неотличимости (слабой эквивалентности) [1]. Два конечных автомата $M_1$ и $M_2$ называются неотличимыми, если при подаче на входы $M_1$ и $M_2$ одинаковой входной последовательности каждому состоянию g автомата $M_1$ ,будет соответствовать хотя бы одно состояние P автомата $M_2$ и, наоборот, каждому состоянию P автомата $M_2$ соответствует хотя бы одно состояние g такое, что автоматы $M_1$ и $M_2$, поставленные в состояния g и p ($M_1|g\ M_2|p$), произведут одинаковые выходные последовательности. Здесь соответствие состояний автоматов $M_1$ и $M_2$, вообще говоря, зависит от входной последовательности. Для некоторых входных последовательностей некоторым состояниям автомата $M_1$ могут соответствовать одни состояния автомата $M_2$, а для других входных последовательностей тем же состояниям автомата $M_1$ могут соответствовать другие состояния автомата $M_2$ (и наоборот). Требуется лишь, чтобы для любой входной последовательности такое взаимнооднозначное соответствие существовало.

Свойство неотличимости слабее эквивалентности; неотличимые конечные автоматы лишь тогда будут взаимозаменяемы, если по условиям функционирования заранее известна вся входная последовательность.

<u>Теорема 3.</u> Если два полициклических автомата $M_1$ и $M_2$ неотличимы, то они эквивалентны.

Пусть $Q = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$ множество состояний автомата $M_1$, а $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ множество состояний автомата $M_2$. В [1] доказано, что в неотличимых автоматах $M_1$ и $M_2$ всегда существует хотя бы одна пара $g_i$, $p_j$ эквивалентных состояний.

Пусть входная последовательность $X_к$ (к =1,2,...,n) переводит автомат $M_1$ из состояния $g_{k-1}$ в состояние $g_k$ и пусть последовательность $X_0$ переводит $g_i$ в $g_0$ (все такие последовательности существуют, поскольку автомат $M_1$ сильносвязный). Приложим входную последовательность $X_0,X_1,X_2,...,X_n$ $kM_1|g_i$ и $M_2|P_j$. Тогда состояние $g_i$ перейдет в некоторое состояние $g_k$, состояние $p_j$ - в состояние $p_{jk}$. Так как $g_i \sim p_j$, то $g_k \sim p_{jk}$ (k=0,1,2,...,n). Следовательно, для каждого состояния в M существует эквивалентное состояние в $M_2$.

Совершенно аналогично доказывается, что для каждого состояния в $M_2$ существует эквивалентное состояние в $M_1$. Таким образом доказано, что $M_1 \sim M_2$.

*Следствие 1.* Если полициклические автоматы $M_1$ и $M_2$ различимы, то никакие два состояния не будут эквивалентны между собой, если они принадлежат разным автоматам.

При решении задачи распознавания автомата большое значение имеет установление принадлежности его к исключительному классу, т.е. к такому классу автоматов $\{M_1, M_2, ..., M_n\}$, в котором ни одно состояние любого не эквивалентно никакому состоянию автомата $M_j (i \neq J)$.

*Следствие 2.* Различимые полициклические автоматы образуют исключительный класс.

<u>Теорема 4.</u> Полициклический автомат с элементарными циклами одинаковой длины может находиться в эквивалентных состояниях только в тактах с одинаковыми номерами.

Предположим, что эквивалентные состояния находятся в разных тактах. Пусть длина циклов равна n и пусть в некотором k-ом такте автомат M находится в состоянии $g^{(m)}$, эквивалентном некоторому состоянию $g^{(S)}$, в котором этот автомат находится в l-ом такте ($g^{(m)} \sim g^{(S)}$), где $0<k<n$, $0<l<n$, $k<l$.

Возьмем произвольную входную последовательность (из множества допустимых) длиною (n-l). Тогда $M|g^{(S)}$ под воздействием этой последовательности перейдет в некоторое состояние n-го такта $g^{(p)}$, а $M|g^{(m)}$ - в состояние $g^{(r)}$ i-го такта, где $i<n$. Но всякая входная последовательность переводит эквивалентные состояния в эквивалентные.

Следовательно, $g^{(p)} \sim g^{(r)}$. А это противоречит определению полициклического автомата.

Если эквивалентные циклы разной длины, то полициклический автомат может находиться в эквивалентных состояниях в разных тактах.

Не трудно доказать, что в этом случае разность длин минимальных входных последовательностей, переводящих начальное состояние в состояния эквивалентные между собой, кратна разности длин соответствующих циклов.

Действительно, пусть эквивалентные состояния $g_i$ и $g_j$ находятся в циклах длиною $n_1$ и $n_2$, а длины входных последовательностей, переводящих начальное состояние в состояния $g_i$ и $g_j$, соответственно равны $l_1$ и $l_2$. Тогда из эквивалентности состояний $g_i$ и $g_j$ получаем $n_1 - l_1 = n_2 - l_2$. Откуда $l_1 - l_2 = n_1 - n_2$.

В работе [3] показано, как любой полициклический автомат представить композицией двух автоматов, один из которых является своеобразным счетчиком тактов.

**Литература:**

1. Блох А.Ш. Синтез переключательных схем. Минск, изд-во "Наука и техника", 1966 г.
2. Гилл А. Введение в теорию конечных автоматов. М., изд-во "Наука", 1966.
3. Бром Е.Л. Полициклические автоматы Мура. В сб.: "Вычислительная техника в машиностроении". Минск, 1969 г. с.43-49.

**SUMMARY:**

The subclass of final automations, called polycyclic is described. The theorems expressing properties of this subclass final automations are considered and proved.