УДК 539.3

ЦИКЛИЧЕСКАЯ СИММЕТИЯ ВО ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Калинин А.А.; Петухов В.В.

Интегральные уравнения второй краевой задачи теории упругости, составленные для тела вращения в цилиндрических координатах по методу бигармонических потенциалов, имеют вид [1]:

$$\mu_{i0}(x)+\lambda\int_s \mu_j(y)\left(\alpha_{\rho o} m_{i\rho}^{\rho}+\alpha_{z0} m_{ij}^{z}\right)ds_y=\xi\, p_{i0}(x); \qquad (1)$$

$$i,j=\rho,v,z.$$

Здесь S - кусочно гладкая по Ляпунову поверхность упругого тела; $\mu(x)$ и $\mu(y)$ - векторы плотности бигармонического потенциала простого слоя в параметрической точке X и переменной при интегрировании точке y, поверхности S; $\rho(x)$ - вектор заданной на поверхности нагрузки;

$$\lambda=\frac{\eta}{4\pi(1-\nu)}; \qquad \xi=\frac{\eta}{4\pi G};$$

ν - коэффициент Пуассона; $\eta=1$ для внутренней задачи,

$\eta=-1$ для внешней.

Ядра m_{ij}^{k} выражаются через направляющие косинусы вектора $r=y-x$, внешней нормали $n(y)$ к поверхности S и координаты ρ_o,ϑ_o,z_o точки X и ρ,ϑ,z точки y.

Выделим систему

$$\mu_{\rho o}+\lambda\int_s\left(\mu_\rho m_{\rho\rho}+\mu_z m_{\rho\rho}\right)ds=\xi\, p_{\rho o}$$

$$\mu_{zo}+\lambda\int_s\left(\mu_\rho m_{z\rho}+\mu_z m_{zz}\right)ds=\xi\, p_{zo} \qquad (2)$$

и рассмотрим случай циклической симметрии плотности.

В уравнениях (2)

$$m_{ij}=\alpha_{\rho o} m_{ij}^{\rho}+\alpha_{zo} m_{ij}^{z};$$

$$ds=d\theta dL;\ \ \theta=\vartheta-\vartheta_o,$$

dL - элемент контура тела вращения.

При циклической симметрии

$$\mu_i=\mu_i^o\cos 2\vartheta=\mu_i^o\cos\left(2\vartheta_o-2\theta\right)=$$

$$=\mu_i^o[2\left(\cos 2\vartheta_o\cos^2\theta-\sin 2\vartheta_o\sin\theta\cos\theta\right)-\cos 2\vartheta_o].$$

Известный закон изменения плотности μ_i по координате ϑ даёт возможность заменить двумерные интегралы уравнений (2) одномерными. Заметим, что ядра m_{ij}^{k} содержат лишь симметричные относительно точки $\theta=0$ слагаемые. Кососимметричные слагаемые в произведениях $\mu_j m_{ij}^k$ (содержащие множитель $\sin\theta$) дают интеграл по области $(0 \div 2\pi)$, равный нулю. Поэтому плотность μ_t можно заменить выражением

$$\mu_t = \mu_t^o(2\cos^2\theta - 1)\cos 2\vartheta_o .$$

Тогда произведение $\mu_j m_{ij}$ представится в виде

$$\mu_j^o(\alpha_{\rho o} b_{ij}^\rho + \alpha_{zo} b_{ij}^\rho),$$

где $b_{ij}^k = m_{ij}^k(2\cos^2\theta - 1)\cos 2\vartheta_o$.

После интегрирования ядер (3) по окружной координате θ уравнения (2) запишутся в виде

$$\mu_{io}^o \cos 2\vartheta_\vartheta + \lambda\int_L \mu_j^o \cos 2\vartheta_o(\alpha_{\rho o}B_{ij}^\rho + \alpha_{zo}B_{ij}^z)dL = \xi p_{io} . \qquad (4)$$

Ядра B_{ij}^k уравнений (4) равны

$$B_{ij}^k = \rho\int_o^{2\pi} m_{ij}^k(2\cos^2\theta - 1)d\theta. \qquad (5)$$

Интегралы (5) выражаются через полные эллиптические интегралы первого и второго рода параметра

$$k^2 = \frac{4\rho_o\rho}{(\rho_o+\rho)^2 + (z-z_o)^2} .$$

Заметим, что представив граничные функции в виде

$$p_{io} = \overset{o}{p}_{io}\cos 2\vartheta_o ,$$

получим уравнения

$$\mu_{io}^o + \lambda\int_L \mu_{io}^o(\alpha_{\rho o}B_{ij}^\rho + \alpha_{zo}B_{ij}^z)dL = \xi \overset{o}{p}_{io} . \qquad (6)$$

Уравнения (4) удовлетворяются если удовлетворяются уравнения (6).

Это говорит о том, что граничные функции p_{io} обладают такой же циклической симметрией, как и плотности μ_{io}.

Литература:

1. Копейкин Ю.Д., Калинин А.А. Прямое ряшенне восесіметричнай другой краявой задачы тэорыі пружасці метадам бігарманичных патэнцыялау. Весці АН БССР, №3, 1972г. стр.85-90.

SUMMARY:

In the work the authors study the cyclic symmetry in the boundary problem of the elasticity theory for a solid of revolution. It is shown that the density of elastopotentials and the boundary functions have similar dependence on the circular coordinate.