

## АНАЛИЗ СТРУКТУРНО-ВРЕМЕННОГО КРИТЕРИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ С ПОЗИЦИЙ ЭНДОХРОННОЙ, НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ТРАКТОВОК

Г.Д. Федоровский

*Санкт-Петербургский государственный университет,  
198504, Ст. Петергоф, Библиотечная пл., 2, НИИ математики и механики*

Предложенный Н.Ф. Морозовым, Ю.В. Петровым и А.А. Уткиным [1] структурно-временной критерий динамической прочности (СВК) при монотонном и немонотонном растяжении имеет вид [1, 2]:

$$\frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \sigma(\rho) d\rho \leq \sigma_c, \quad (1)$$

где  $\tau$  – структурное (инкубационное) время;  $t$  – время разрушения;  $\sigma$  – напряжение;  $\sigma_c$  статическая прочность (временное сопротивление). При детальном рассмотрении этого критерия видно, что при его построении авторы исходили из трех соображений.

1) В соответствии с современной концепцией о временном характере разрушения при динамическом нагружении - потребности учета времени  $t$  в соотношении прочности.

2) Необходимости учета структурного (масштабного) уровня процесса в данной среде, путем введения характерного «времени»  $\tau$ , исходя из представлений Г. Нейбера - В.В. Новожилова [2] о том, что для всякого материала существует некоторый характерный пространственный, структурный размер, масштаб (ячейка разрушения)  $d$ , и тогда, в первом приближении, как один из вариантов,  $\tau = d/C$ , где  $C$  – скорость продольной динамической волны (например, по предложению Н.Ф. Морозова [2],  $d = (2K_{lc}^2)/(\pi\sigma_c^2)$ , где  $K_{lc}$  – коэффициент интенсивности напряжения в вершине трещины в среде).

3) Требования совпадения (1) со статическим (силовым) критерием прочности:  $\sigma(t) \leq \sigma_c$  при переходе в статический режим, в случае  $\sigma(t) = H(t)\sigma^0$ , где  $H(t)$  единичная функция Хэвисайда, а  $\sigma^0 = const$ . По структуре (инварианту прочности) критерий относится к «импульсному» типу, т. к. его можно представить в виде

$$\int_{t-\tau}^t \sigma(\rho) d\rho \leq \sigma_c \tau = const; \text{ при } t \leq \tau \text{ он совпадает с импульсным критерием В.С. Никифоро-$$

ровского-Е.И. Шемякина [3].

Простота (1) и попытка учета при его построении указанных трех соображений являются достоинствами критерия. СВК применим к различным, в том числе, нелинейным вязкоупругим средам, позволяет качественно объяснить различные эффекты динамики, в частности, запаздывание разрушения, и удобен для оценки прочности тел с трещинами. Процедура нахождения определяющих параметров  $\tau$  и  $\sigma_c$  относительно

проста, однако требует проведения динамического и квазистатического опытов. Критерий обеспечивает удовлетворительное описание процесса разрушения в определенном ограниченном интервале монотонного и немонотонного динамического нагружения и дает не всегда адекватную оценку в переходной и статической области, что связано, с конструкцией критерия, выбором определяющих параметров и опорной кривой. Ведь обычно используемая для весьма приближенных технических оценок характеристика статической прочности  $\sigma_c = const$  весьма условна (не случайно  $\sigma_c$  называют временным сопротивлением), на статической ветви длительной прочности ее значение может изменяться очень сильно (см. ниже и рис.), а  $\tau$  находится с учетом значения  $\sigma_c$ .

При оценке преимуществ критерия (1) в отношении учета времени в [2], в основном, проводится сравнение с тривиальным, вырожденным (см. выше) силовым критерием, критериями импульсного вида, например [3], и критерием повреждаемости Л. М. Качанова [4]. О других критериях, литературных ссылок на которые почти не приводится, преимущественно лишь сделано замечание о существовании подходов с учетом сложной нелинейной реологии и микроструктуры, слишком сложных, «реально доступных лишь их авторам».

Целью настоящей работы является подробное рассмотрение структурно-временного критерия, в том числе, с позиций «других» подходов, позволяющее более полно оценить его особенности и возможности. Широко известны концепции, охватывающие динамическое и статическое разрушение линейных и нелинейных вязкоупругих, изотропных и анизотропных сред, например, линейная и нелинейная теория накопления повреждений [4, 5], когда в качестве инварианта прочности, опорной кривой, используется кривая долговечности (длительной прочности  $\sigma_r(t_r)$ ); известны энергетический [6] и энтропийный [7] критерии. Такого рода критерии, принципиально более универсальны и применимы и для случая сложного напряженно-деформированного состояния. Они являются самодостаточными при нахождении определяющих параметров (для оценки прочности в динамическом диапазоне параметры могут быть также определены в этом диапазоне). Вряд ли следует полностью согласиться с мнением авторов [2] о праве на использование лишь простых, «инженерных», как (1), критериев. Ведь существует множество задач, в которых требуется рассмотрение различных видов сред и чередующихся динамических и статических, длительных нагружений. Для них простые соотношения прочности неприменимы. При решении особо ответственных задач и проблем необходимо, целесообразно и окупаемо использование любых, ведущих к успеху, схем. Тем более, что соотношение (1), при определенном выборе параметров, является следствием некоторых из них. Покажем, что критерий (1) может быть представлен с позиций эндохронного [8 - 11], накопления повреждений [4, 5] и энергетического [6] подходов, с определенным видом параметров, определяющих эти подходы.

Необходимо отметить, что, в отличие от (1), большинство критериев динамической и статической прочности интегрального вида [2 - 7] имеет интервал интегрирования, равный всему периоду приложения нагрузки, для учета полной «истории» нагружения; т.е. - нижний предел интегрирования равен нулю, а верхний -  $t$ . Для сравнения с другими теориями приведем нижний предел СВК к нулю, путем замены переменной интегрирования:  $\rho = a + b\varphi$  (при  $\rho = t - \tau$ ,  $\varphi = 0$ , а при  $\rho = t$ ,  $\varphi = t$ ). Кроме того, представим (1) и интересующие нас другие теории в нормированном, безразмерном виде - повреждаемости [4, 5]. Тогда (1) примет форму

$$\omega(t) = \overline{\omega}_{\tau, \sigma_c}^s t = \frac{1}{t \cdot \sigma_c} \int_0^t \sigma(\zeta) d\varphi \leq 1. \quad (2)$$

Здесь  $\omega$  - повреждаемость;  $\bar{\omega}_{\tau, \sigma_c}^{\zeta}$  - оператор повреждаемости;  $\varphi$  - переменная интегрирования;  $\zeta = a + b\varphi$ ,  $a = t - \tau$ ,  $b = \tau/t$ . Можно сказать, что (2) - это эндохронная [8], с собственным, внутренним временем  $\zeta$ , форма структурно-временного критерия (1). Изменив  $\zeta$ , а также выражение перед знаком интеграла, можно произвести дальнейшую определенную модернизацию структурно-временного критерия. Например, заменив времена  $t$ ,  $\tau$ ,  $\varphi$  и  $\zeta$ , на соответствующие трансформированные (собственные) времена, учитывающие влияние температуры, влажности, изменения структуры, механической нелинейности, и т.п., по физико-химико-механо-временным аналогия [5, 11, 12], можно получить более универсальный вариант СВК, определяющие параметры которого  $\sigma_c$  и  $\tau$  могут быть принятыми едиными, устанавливаемыми по предложенным авторами СВК методам, в шкале обобщенных по влияниям опорных кривых прочности.

Рассмотрим один из вариантов линейной теории (критерия) накопления повреждений (КНП) [5], в виде интеграла Бейли [13],

$$\omega(t) = \bar{\omega}^{t_r} = \int_0^t \mathcal{F}_r[\sigma(\varphi)] d\varphi = \int_0^t \frac{d\varphi}{t_r[\sigma(\varphi)]} \leq 1, \quad (3)$$

где  $\bar{\omega}^{t_r}$  - оператор;  $\mathcal{F}_r = 1/t_r$ ;  $t_r$  - время разрушения в функции напряжения  $\sigma$ . Нетрудно заметить, что при выполнении для данной среды соотношений (2) и (3), СВК можно представить в форме (3), при

$$\mathcal{F}_r[\sigma(\varphi)] = \frac{\sigma(\zeta)}{t \cdot \sigma_c}, \quad t_r[\sigma(\varphi)] = \frac{t \cdot \sigma_c}{\sigma(\zeta)} = \frac{t \cdot \sigma_c}{\sigma(t - \tau + \frac{\tau}{t} \varphi)}. \quad (4)$$

В случае  $\sigma(t) = H(t)\sigma^0$  (1), как и (2), принимает вырожденный вид:

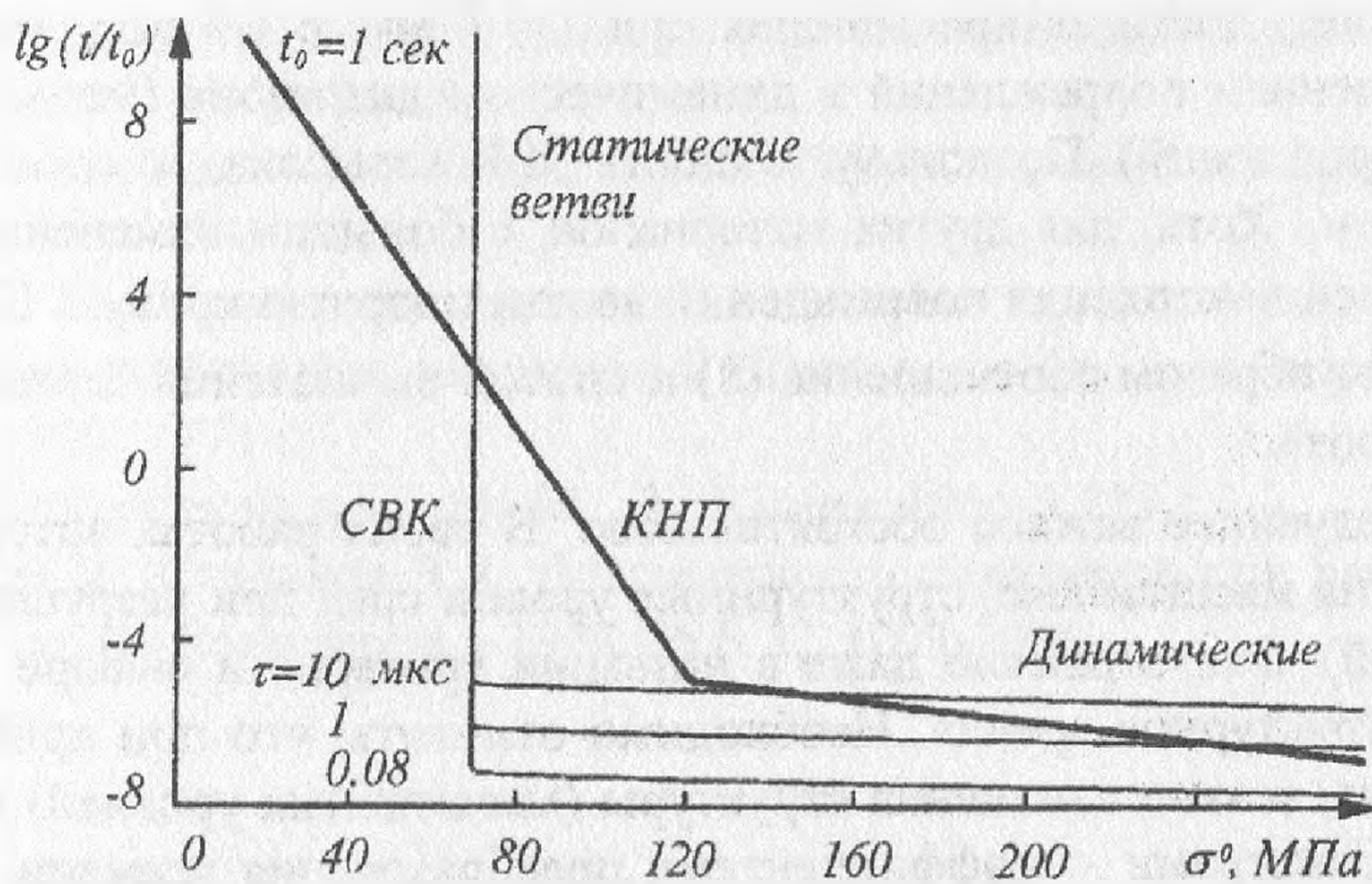
$$\sigma^0 \left\{ \frac{t}{\tau} [H(t) - H(t - \tau)] + H(t - \tau) \right\} \leq \sigma_c, \quad (5)$$

т.е. при  $t \leq \tau$  разрушение наступит при напряжении  $\sigma^0 = (\tau \cdot \sigma_c)/t = k/t$  - гиперболической зависимости от времени разрушения, а при  $t > \tau$   $\sigma^0 = \sigma_c$  - параллельной оси  $t$  прямой. В отмеченном случае, (3) при разрушении может иметь зависимость  $t = t_r(\sigma^0)$  (кривой длительной прочности (долговечности)), или  $\sigma^0 = \sigma^0(t_r)$ . Из экспериментальных данных широко известно [14 - 17], что в первом приближении, последняя зависимость имеет вид прямых динамической и статической ветвей в шкале логарифма времени, поэтому (3) принимает вид:

$$\sigma^0 \leq (a_d + b_d \lg t) [H(t) - H(t - t_{d,s})] - (a_s + b_s \lg t) H(t - t_{d,s}), \quad (6)$$

где  $a_i$  и  $b_i$  - коэффициенты для динамической ( $d$ ) и статической ( $s$ ) ветвей;  $t_{d,s}$  - граница перехода. Анализ экспериментальных данных наших и иных [14 - 17] работ по откольному разрушению при  $\sigma(t) = [H(t) - H(t - t_1)]\sigma^0$  и статическому растяжению при  $\sigma(t) = H(t)\sigma^0$  показал, что для многих материалов, в частности для ПММА (полиметилметакрилата),  $\lg(t_{d,s}/t_0) \approx -5$ , при  $t_0 = 1$  сек. Для динамической ветви ПММА в интервале  $\lg(t/t_0)$  (-6.5, -5)  $\sigma^0$  изменяется в пределах (240, 120) МПа, а для статической, - в интервале  $\lg(t/t_0)$  (-5, 10),  $\sigma^0$  - (120, 15) МПа. При  $\lg(t/t_0) = 2$

$\sigma^0 = 70$  МПа. Из сравнения равенств (5) и (6) видно, что, определяющая СВК (1), сконструированная опорная кусочная гиперболо-линейная кривая (5) может, при соответствующем выборе параметров  $\tau$  и  $\sigma_c$ , пересекаться с полученной в экспериментах ступенчато-логарифмической кривой КНП в заданных точках. В других точках она может существенно отличаться. Вот один из вариантов определения параметров критерия (1) для ПММА. В литературных источниках обычно принимаются значения  $\sigma_c = 70$  МПа,  $K_{Ic} = 1.1$  МПа м<sup>1/2</sup> и  $C = 1970$  м/с. Тогда, если воспользоваться приведенными в начале формулами, получим  $\tau = d / C = (2K_{Ic}^2) / (\pi\sigma_c^2 C) = 0.08$  мкс ( $\lg(\tau / t_0) = -7.1$ ). На рис. приведены опорные кривые ПММА (6) (жирная линия КНП, осредненная по многим данным опытов) - для критерия (3); и (5) (тонкие линии СВК) - для критерия (1), при  $\sigma_c = 70$  МПа и различных значениях  $\tau$ . Обе функции кусочные, со статической и динамической ветвями. Границы перехода от одной ветви к другой соответствуют временам для КНП -  $t_{0,s}$ , а для СВК -  $\tau$ . В обычной шкале времени  $t$  переход функции СВК (как и КНП) плавный. Видны места совпадения (пересечения), где выполняется равенство (4), и отличий опорных кривых. Последние весьма существенны и могут составлять сотни и более процентов.



При применении структурно-временного критерия, это несоответствию может несколько сглаживаться, за счет интегрального вида критерия. Отмеченное расхождение опорных функций объясняется структурой критерия (1) и слишком малым количеством определяющих параметров (два), идентифицирующих статическую и динамическую ветви. Для критерия (3) каждая ветвь его опорной кривой определяется таким же числом параметров, а всего их четыре. Они имеют другую структуру. Поэтому возможности критерия накопления повреждений шире.

Рассмотрим энергетический критерий прочности, в форме повреждаемости, ограничиваясь постоянным значением (инвариантом) энергии разрушения:

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \bar{\omega} U^{\sigma c} t = \frac{1}{U_*} \int_0^t \sigma(\varphi) d\varepsilon(\varphi) = \frac{1}{U_*} \int_0^t \sigma(\varphi) \frac{d\varepsilon(\varphi)}{d\varphi} d\varphi = \\ &= \bar{\omega} U^\sigma t = \frac{1}{U_*} \int_0^t \sigma(\varphi) \frac{d(\bar{P}\sigma)}{d\varphi} d\varphi = \bar{\omega} U^\sigma t = \frac{1}{U_*} \int_0^t \bar{R}\varepsilon \frac{d\varepsilon(\varphi)}{d\varphi} d\varphi, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $U$ ,  $U_*$  – удельная работа (энергия) деформирования и ее значение при разрушении;  $\bar{\omega}^{U^{kl}}$  – оператор повреждаемости;  $\bar{P}$ ,  $\bar{R}$  – линейные или нелинейные операторы ползучести и деформации ( $\varepsilon(t) = \bar{P}\sigma$ ,  $\sigma(t) = \bar{R}\varepsilon$ ), например, различные интегральные [5, 10 - 12] операторы, в частности, эндохронного [10 - 12] вида. Сравнивая (2) и (7), можно сделать вывод, что структурно-временной критерий (1) можно рассматривать, как вариант энергетического критерия (ЭК) (7), для среды со свойствами, определяемыми соотношением

$$\frac{d(\bar{P}\sigma)}{d\varphi} = \frac{U_*}{t \cdot \sigma_c} \cdot \frac{\sigma(\zeta)}{\sigma(\varphi)} = \frac{U_*}{t \cdot \sigma_c} \cdot \frac{\sigma(t - \tau + \frac{\tau}{l}\varphi)}{\sigma(\varphi)} \quad (8)$$

При  $\sigma(t) = H(t)\sigma^0$  параметр  $U_*$  ЭК можно выразить через опорную функцию КНП следующим образом:  $U_* = \sigma_r(t_r)\varepsilon_r(t_r) = \sigma_r(t_r)\bar{P}\sigma_r$ . И, наоборот, при известном значении  $U_*$ , по последнему соотношению нетрудно определить опорную функцию КНП, а по ней, как показано выше, – функцию СВК, при известных свойствах ползучести (оператора  $\bar{P}$ ) данной среды. Проведенный анализ данных для ПММА показал, что значение  $U_*$  этого полимера в статической области неизменно в пределах 10 %, а в динамической – возрастает, достигая превышения при  $t = 1$  мкс в 1.7 раза, что объясняется меньшим накоплением повреждений в динамическом диапазоне (меньшими временами развития повреждений). Поскольку точность СВК невысока, то таким отклонением можно пренебречь. Хотя, для других материалов, с большим изменением, можно по аналогии с теорией накопления повреждений ввести опорную кривую  $U_r(t_r)$ , изменив соответствующим образом соотношение (8) и способ вычисления параметров СВК по  $U_r(t_r)$  (и наоборот).

Отметим следующее важное обстоятельство. В своих работах авторы СВК обращают внимание на масштабные, структурные уровни сред при разрушении (накоплении повреждений). Это отражено даже в названии критерия и выборе одного из его параметров – «структурное время». Необходимо отметить, что при применении эндохронного подхода, всякие изменения структуры (масштабных уровней) автоматически учитываются параметрами – коэффициентами преобразования времени, очень удачно называемыми «масштабами» [11]. Для эндохронного варианта (2) СВК можно рассматривать масштаб времени  $\zeta$  и его модификаций.

По поводу «запаздывания» разрушения. Все рассмотренные здесь интегральные критерии описывают задержку разрушения при снижении нагрузки, по сравнению с моментом времени, когда она максимальна.

### Список литературы

1. Морозов Н.Ф., Петров Ю.В., Уткин А.А. К расчету предельной интенсивности импульсных динамических нагрузок // Механика твердого тела. - 1988, № 5. - С. 181-182.
2. Морозов Н.Ф., Петров Ю.В. Проблемы динамики разрушения твердых тел. - СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997. - 132 с.
3. Никифоровский В.С., Шемякин Е.И. Динамическое разрушение твердых тел. - Новосибирск: Наука, 1979. - 271 с.

4. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. - М.: Наука, 1974. - 312 с.
5. Ильюшин А.А., Победра Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. - М.: Наука, 1970. - 280 с.
6. Разрушение твердых полимеров. - Под. ред. Б. Роузена. Пер. с англ. - М.: Химия, 1971. - 528 с.
7. Гольденблат И.И., Бажанов В.Л. Механика деформируемых сред и термодинамика // Механика полимеров. - 1974, № 6. - С. 1007-1018.
8. Valanis K. C. Proper tensorial formulation of the internal variable theory. The endochronic time spectrum // Arch. Mech. - 1977. - V. 29, № 1. - P.173-185.
9. Ключев В.С., Новожилов В.В. Описание процесса сложного нагружения при помощи эндохронной теории вязкопластичности // Тезисы докладов 6 Всес. съезда по теоретич. и прикладн. механике. Ташкент. 24 - 30 сентября 1986 г. - Ташкент, 1986г. - С. 345.
10. Вакуленко А.А. Термодинамическое время в механике деформированных сред: Дисс. докт. физ.-мат. наук в форме научн. докл.: 01.02.04. - Л.: - 1989. - 42 с.
11. Федоровский Г.Д. Определяющие уравнения реологически сложных полимерных сред // Вестн. Ленингр. ун-та.: Матем., механ., астрон. - 1990. - Вып. 3, № 15. - С. 87-91.
12. Уржумцев Ю.С., Максимов Р.Д. Прогностика деформативности полимерных материалов. - Рига: Зинатне, 1975. - 416 с.
13. Baily J. Attempt to correlate some tensile strength measurements of glass // Glass Industry. -1939. - V. 20, N 1-4. - P. 26-28.
14. Регель В.Р., Слуцкер А.И., Томашевский Э.Е. Кинетическая природа прочности твердых тел. М., 1974. -560 с.
15. Беллендир Э.Н. Экспериментальное исследование хрупкого разрушения твердых тел в волне растягивающих напряжений. Дисс. канд. физ.-мат. наук: 01.04.07. - С.-Петербург, 1990. - 171 с.
16. Гуль В.Е. Прочность полимеров. М., Л.: Химия, 1964. - 228 с.
17. Песчанская Н.Н., Степанов В.А. Долговечность полимеров при растяжении и кручении // Механика полимеров. - 1974, № 6. С. 1003-1006.