

О СОСРЕДОТОЧЕННОМ МОМЕНТЕ В УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ (ПОЛУПЛОСКОСТИ)

А.В. Архангельская

*Санкт-Петербургский Государственный Университет, Россия,
198904 Старый Петергоф, Библиотечная площадь д.2,
July @ www.spectec.ru*

Статья посвящена инвариантному и неинвариантному методам решения задачи плоской теории упругости для сосредоточенного момента, приложенного в бесконечной (полубесконечной) пластине, основанным на двух различных определениях сосредоточенного момента, широко известных в научной литературе. Решение получено в комплексных потенциалах. В работе приведен численный анализ компонентов тензоров напряжений, соответствующих рассматриваемым функциям Г.В. Колосова.

Исследования прочности и надежности тонкостенных элементов конструкций, нагруженных сосредоточенными усилиями, представляют большой интерес для различных отраслей современного машиностроения. Для проведения этих исследований решающее значение имеет получение аналитических решений плоской задачи линейной теории упругости.

В плоской теории упругости места приложения сосредоточенных сил и моментов принято рассматривать как изолированные особые точки [1]. Аналитические выражения для этих особенностей получены в двух классических задачах: о силе в неограниченном теле и о полуплоскости, загруженной на границе. Решение первой задачи было дано Кельвином в 1848 году [2]. Решение второй, - для силы, перпендикулярной границе полуплоскости, получил Фламан [2]; обобщение этого решения на случай наклонной силы принадлежит Буссинеску [2]. В иной форме решение данной проблемы предложено Мичелом [3]; он же распространил его на задачи о силах и моментах в круговом диске, об изолированной силе в анизотропной пластине в вершине угла и т.д. Решение Фламана легко распространить на полуплоскость, на прямолинейной границе которой действует сосредоточенный момент (пара сил). Если, однако, попытаться применить, такой же формальный подход к задаче Кельвина, то найденное таким путем решение для момента в бесконечной плоскости [4] оказывается обладающим иными особенностями по сравнению с теми, которые приведены в монографии [5]. Это связано с тем, что в указанных работах момент вводится путем разных предельных переходов. А именно, в [5] в бесконечной плоскости рассматривается круговое отверстие радиуса R , к краю которого приложено касательное напряжение $T = \text{const}$, напряженное состояние на бесконечности отсутствует. Введя очевидное обозначение $TR(2\pi R) = M$ и устремляя затем $R \rightarrow 0$, при этом увеличивая T так, чтобы величина M оставалась постоянной, в пределе определяется бесконечная плоскость, в которой действует сосредоточенная пара с моментом M , приложенным в начале координат. Функ-

ции Г.В. Колосова $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ и напряжения σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{r\varphi}$ (в полярных координатах) в этом случае оказываются равными:

$$\Phi(z) = 0, \Psi(z) = -\frac{iM}{2\pi} \frac{1}{z^2}, \sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = 0, \sigma_{r\varphi} = -\frac{M}{2\pi} \frac{1}{r^2}. \quad (1)$$

Данное решение не зависит от упругих постоянных, а также от выбора системы координат, иными словами оно является инвариантным.

В монографии [4] сосредоточенный момент M определяется путем следующего предельного перехода:

$$\lim_{e \rightarrow 0} (P \cdot e) = M, \quad (2)$$

где P – модуль сосредоточенных сил, действующих в направлении оси y и приложенных соответственно в точках $x = 0$, $x = -e$; e – расстояние между приложенными силами P (см. рис. 1).

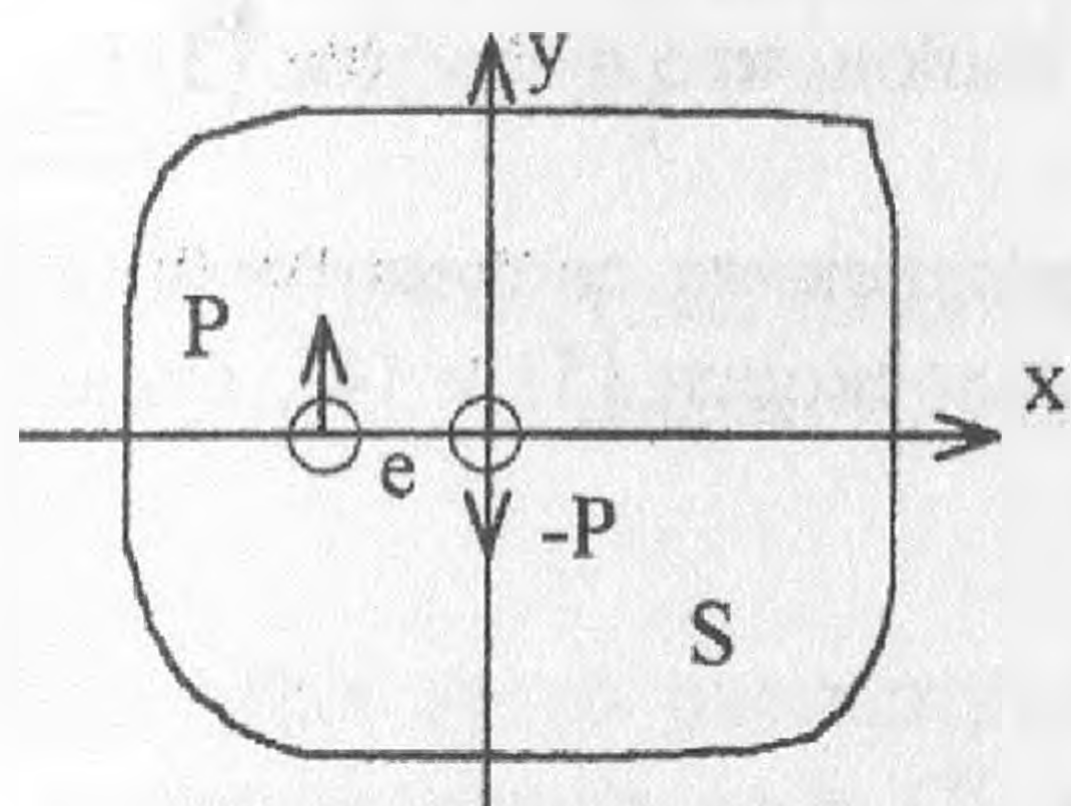


Рис. 1 Бесконечная плоскость, в которой действует сосредоточенная пара с моментом M , приложенным в начале координат.

Автор [4] приводит (без вывода) функцию Эри $F(\varphi)$ и соответствующие ей компоненты тензора напряжений σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{r\varphi}$ в следующем виде:

$$F(\varphi) = \frac{M}{2\pi} \varphi, \quad (3)$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = 0, \sigma_{r\varphi} = \frac{M}{2\pi} \frac{1}{r^2}. \quad (4)$$

Следуя указаниям [4], выполним последовательность действий для нахождения этих функций, тогда найденное решение окажется следующим:

$$F(\varphi) = -\frac{M}{2\pi} \varphi + \frac{M}{2\pi(1+k)} \sin 2\varphi; \quad (5)$$

$$\sigma_{rr} = -\frac{2M}{\pi(1+k)} \frac{\sin 2\varphi}{r^2}, \sigma_{\varphi\varphi} = 0, \sigma_{r\varphi} = -\frac{M}{2\pi} \frac{1}{r^2} + \frac{M}{\pi(1+k)} \frac{\cos 2\varphi}{r^2}, \quad (6)$$

где $k = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{— для обобщенного плоского напряженного состояния} \\ 3-4\nu & \text{— для плоской деформации} \end{cases}$

ν – коэффициент Пуассона материала бесконечной плоскости.

Противоречия между формулами (3), (4) и (5), (6) обуславливают необходимость решить эту задачу методом комплексных потенциалов [5]. Будем искать функции Г.В. Колосова $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ в следующем виде:

$$\Phi(z) = \lim_{e \rightarrow 0} (\Phi_1(z) + \Phi_2(z, e)), \quad \Psi(z) = \lim_{e \rightarrow 0} (\Psi_1(z) + \Psi_2(z, e)), \quad (7)$$

где $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z, e)$, $\Psi_1(z)$, $\Psi_2(z, e)$ - функции Г.В. Колосова [5] для бесконечной плоскости, нагруженной сосредоточенной силой в точке $(0,0)$ и в точке $(-e,0)$ соответственно.

Подставляя указанные комплексные потенциалы в (7) и используя предельный переход (2), получим:

$$\Phi(z) = -\frac{iM}{2\pi(1+k)} \frac{1}{z^2}, \quad \Psi(z) = -\frac{iM}{2\pi} \frac{1}{z^2}. \quad (8)$$

Заметим, что для случая, когда силы, составляющие пару с моментом M , параллельны оси абсцисс, комплексные потенциалы равны

$$\Phi(z) = \frac{iM}{2\pi(1+k)} \frac{1}{z^2}, \quad \Psi(z) = -\frac{iM}{2\pi} \frac{1}{z^2}, \quad (8)^*$$

что говорит о том, что указанное решение не является инвариантным.

Найденные с помощью формул Г.В. Колосова и (8) компоненты тензора напряжений полностью совпадают с (6), отсюда можно сделать вывод, что формулы (3) и (4) содержат ошибки.

Таким образом, решения, основанные на разных определениях сосредоточенного момента, приложенного в фиксированной точке упругой плоскости [5] и [4], существенно отличаются (рис.2,3).

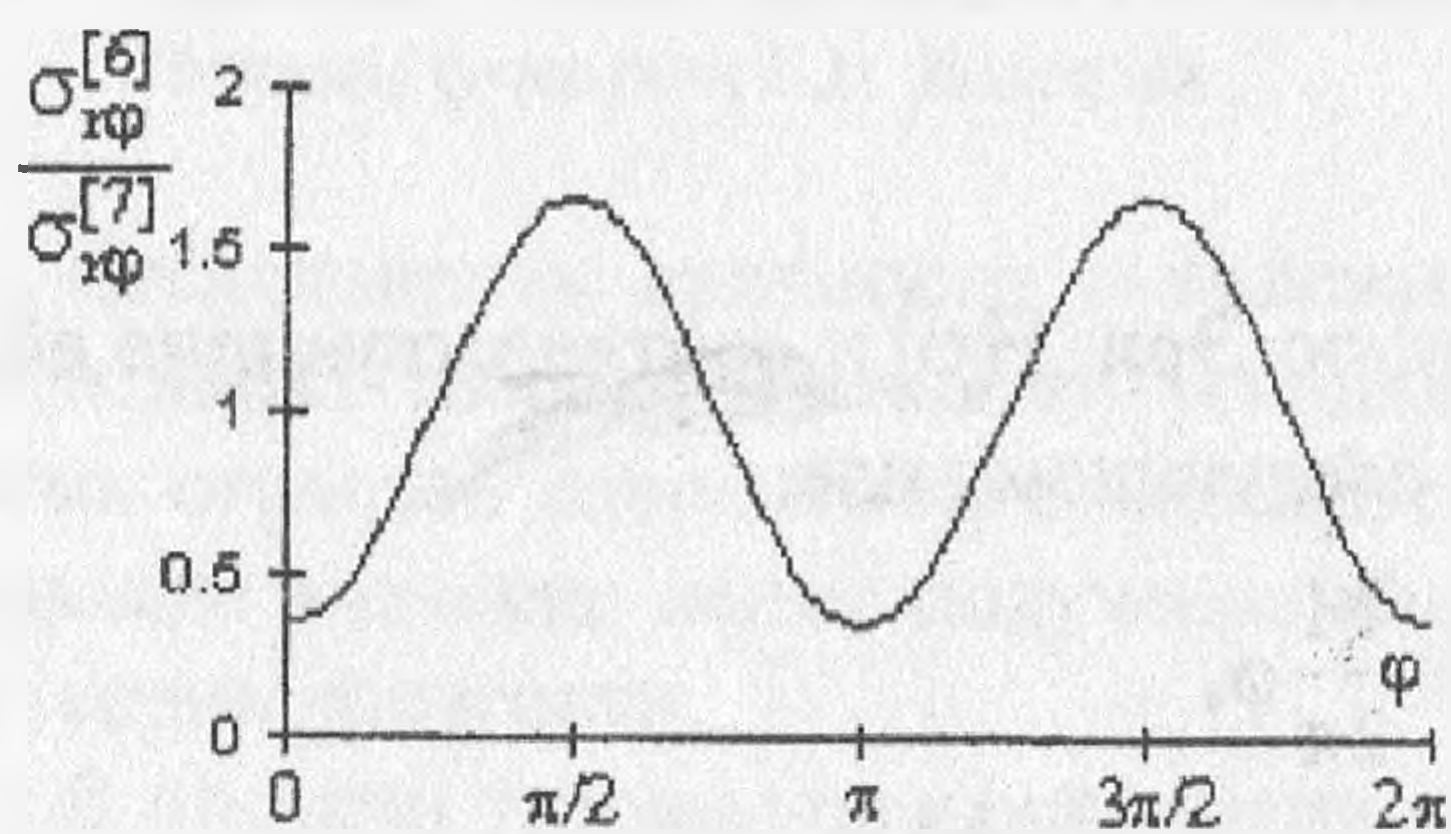


Рис. 2. График отношения касательных напряжений для решений, основанных на определениях моментов в монографиях [5] и [4].

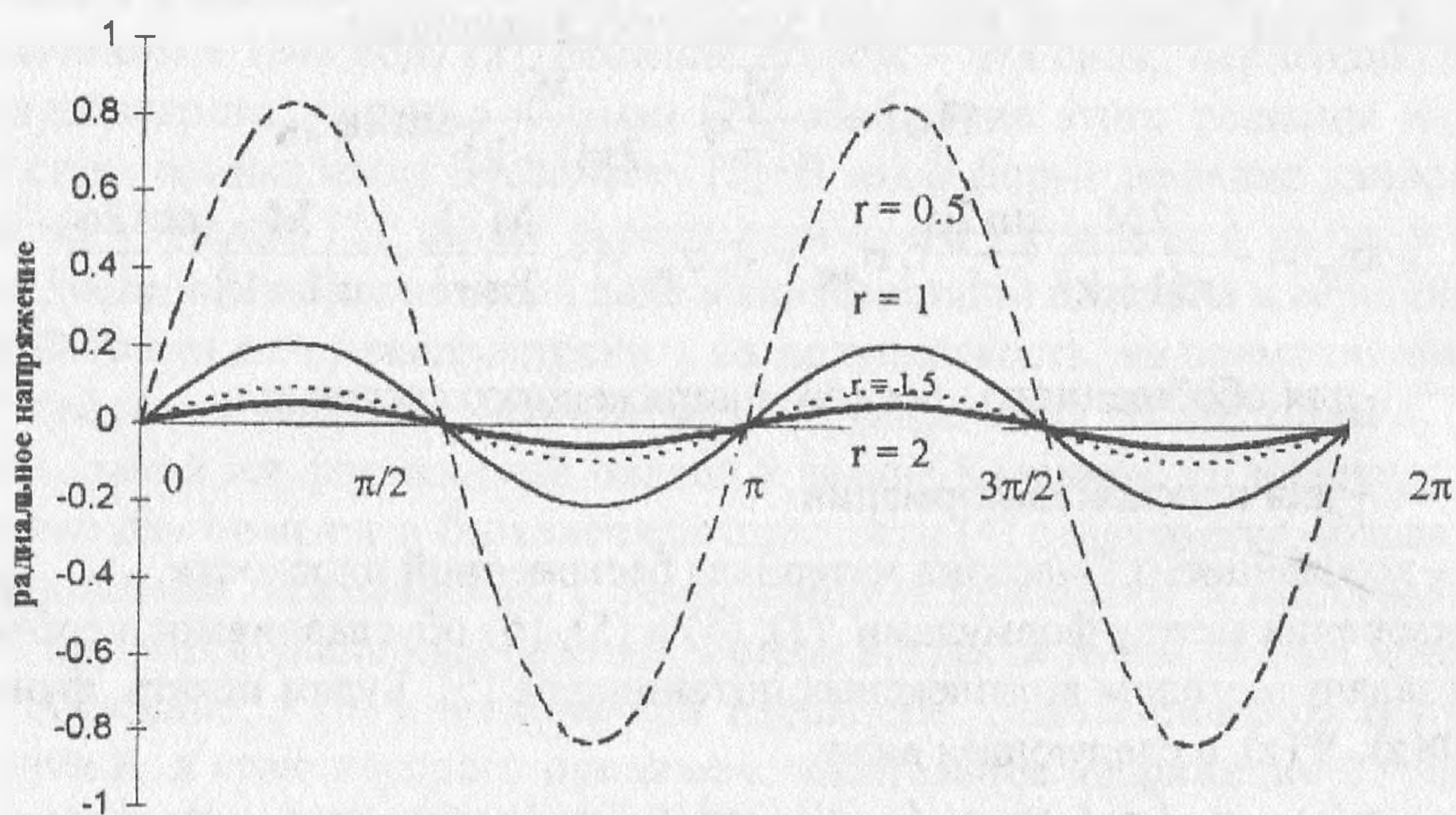


Рис. 3 График распределения радиального напряжения $\sigma_r(\varphi)$ по окружностям радиусов 0.5; 1; 1.5; 2.

Рассмотрим упругую изотропную полуплоскость $S^-(y \leq 0)$, в произвольной точке z_0 которой действует сосредоточенный момент M (рис. 4,а). Кромка $y=0$ предполагается свободно опертой. Требуется определить напряжения, действующие в этой полуплоскости, используя предельный переход (2), и сравнить их с решением, основанном на определении момента [5].

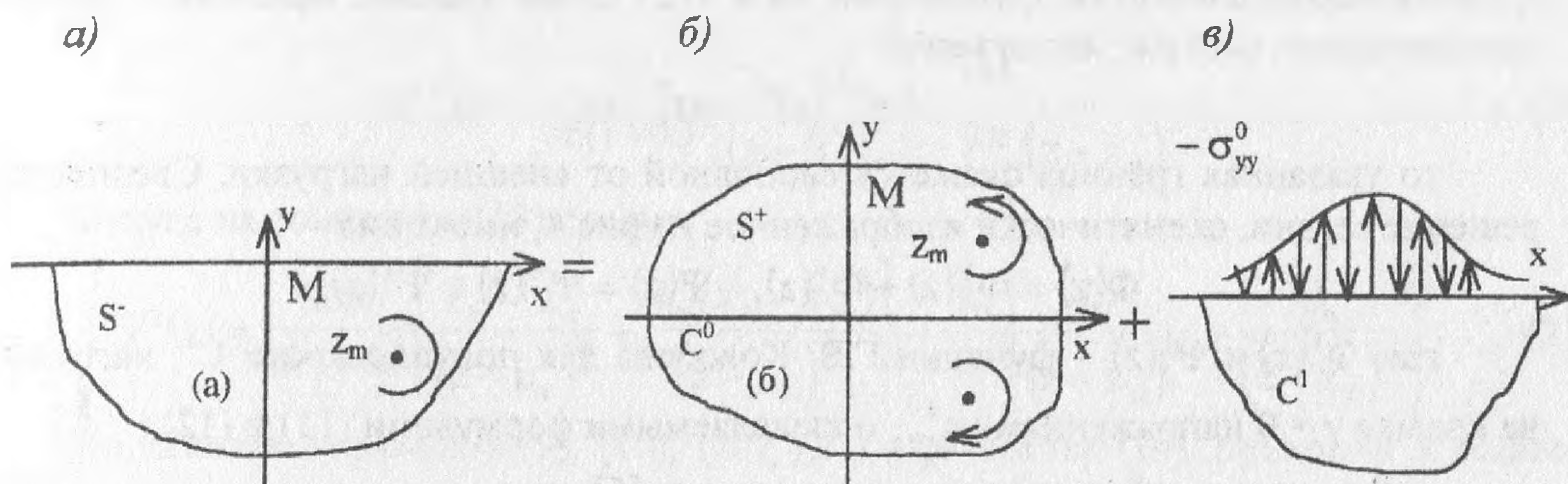


Рис. 4 Схема решения задачи об изотропной полуплоскости, в произвольной точке z_0 которой действует сосредоточенный момент M .

Для этого рассмотрим вспомогательную задачу плоской теории упругости для неограниченного тела C^0 , загруженного в точках z_m и \bar{z}_m сосредоточенными моментами M и $-M$ (рис.4,б). Используя комплексные потенциалы (8) и формулы для преобразования координат [5], имеем

$$\Phi^0(z) = -\frac{iM}{2\pi(1+k)} \left(\frac{1}{(z-z_m)^2} - \frac{1}{(z-\bar{z}_m)^2} \right), \quad (9)$$

$$\Psi^0(z) = -\frac{iM}{2\pi} \left(\frac{1}{(z-z_m)^2} - \frac{1}{(z-\bar{z}_m)^2} \right) - \frac{iM}{\pi(1+k)} \left(\frac{\bar{z}_m}{(z-z_m)^3} - \frac{z_m}{(z-\bar{z}_m)^3} \right). \quad (10)$$

Согласно формулам Г.В. Колосова, касательное напряжение $\sigma_{xy}^0(x,y)$ имеет следующий вид:

$$\sigma_{xy}^0(x,y) = \frac{iM}{\pi(1+k)} \left(\frac{y}{(z-z_m)^3} - \frac{y}{(z-\bar{z}_m)^3} \right). \quad (11)$$

Из (11) видно, что функция $\sigma_{xy}^0(x,y)$ на оси $y=0$ тождественно равна нулю, а нормальное напряжение $\sigma_{yy}^0(x,0)$ определяется выражением

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^0(x,0) = & -\frac{iM}{\pi(1+k)} \left(\frac{x}{(x-\bar{z}_m)^3} - \frac{x}{(x-z_m)^3} + \frac{1}{(x-z_m)^2} - \frac{1}{(x-\bar{z}_m)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\bar{z}_m}{(x-z_m)^3} - \frac{z_m}{(x-\bar{z}_m)^3} \right) - \frac{iM}{2\pi} \left(\frac{1}{(x-z_m)^2} - \frac{1}{(x-\bar{z}_m)^2} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что в первой скобке формулы (12) содержится сумма разностей, а во второй разность двух комплексно сопряженных переменных. Обе скобки умножены на

чисто мнимые числа, поэтому правая часть формулы (12) является вещественной функцией. Целесообразность такого представления выяснится ниже при вычислении интегралов типа Коши в формуле (19).

Мысленно представим теперь тело S^0 в виде суммы двух полуплоскостей: нижней S^1 и верхней S^2 . Очевидно, что граница $y=0$ полуплоскости S^1 будет тогда загружена нормальными напряжениями вида (12). Если, однако, приложить на ней дополнительную систему напряжений

$$\sigma_{yy}^1(x) = -\sigma_{yy}^0(x), \quad (13)$$

то указанная граница окажется свободной от внешней нагрузки. Следовательно, решение задачи, схематически изображенное на рис.4, имеет вид

$$\Phi(z) = \Phi^0(z) + \Phi^1(z), \quad \Psi(z) = \Psi^0(z) + \Psi^1(z) \quad (14)$$

где $\Phi^1(z)$ и $\Psi^1(z)$ - функции Г.В. Колосова для полуплоскости S^1 , нагруженной на кромке $y=0$ напряжениями σ_{yy}^1 , определяемыми формулами (13) и (12).

Для сплошной полуплоскости, согласно [5], имеем

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N - iT}{t - z} dt, \quad (15)$$

$$\Psi(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{T}{t - z} dt - z\Phi'(z), \quad (16)_1$$

или

$$\Psi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N + iT}{t - z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N - iT}{(t - z)^2} t dt, \quad (16)_2$$

где N и T - соответственно нормальные и касательные усилия на границе $y=0$. Отсюда для нашего случая находим

$$\Phi^1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_{yy}^0(x)}{x - z} dx, \quad (17)$$

$$\Psi^1(z) = -z \frac{d\Phi^1(z)}{dz}. \quad (18)$$

В результате подстановки (12) в (17) получаем

$$\begin{aligned} \Phi^1(z) = & -\frac{iM}{\pi(1+k)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{x}{(x - \bar{z}_m)^3} - \frac{x}{(x - z_m)^3} + \frac{1}{(x - z_m)^2} - \frac{1}{(x - \bar{z}_m)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\bar{z}_m}{(x - z_m)^3} - \frac{z_m}{(x - \bar{z}_m)^3} \right] \frac{dx}{x - z} - \frac{iM}{2\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{(x - z_m)^2} - \frac{1}{(x - \bar{z}_m)^2} \right) \frac{dx}{x - z}, \end{aligned} \quad (19)$$

где выражения

$$\frac{x}{(x - \bar{z}_m)^3}, \frac{1}{(x - \bar{z}_m)^2}, \frac{z_m}{(x - \bar{z}_m)^3},$$

суть граничные значения функций

$$\frac{z}{(z - \bar{z}_m)^3}, \frac{1}{(z - \bar{z}_m)^2}, \frac{z_m}{(z - \bar{z}_m)^3},$$

голоморфных в C^1 и обращающихся в нуль на бесконечности; здесь речь идет о граничных значениях при $z \rightarrow x$ из C^1 . Остальные подынтегральные слагаемые в (19) являются предельными значениями функций, голоморфных в C^2 и исчезающих на бесконечности; для них предельные значения находятся когда $z \rightarrow x$ из C^2 .

Используя формулы Коши для областей S^+ и S^- (см., например, [5] стр. 262), находим

$$\Phi^1(z) = -\frac{iM}{\pi(1+k)} \left\{ \frac{z_m - \bar{z}_m}{(z - \bar{z}_m)^3} \right\} - \frac{iM}{2\pi} \frac{1}{(z - \bar{z}_m)^2}. \quad (20)$$

Откуда на основании (18) следует

$$\Psi^1(z) = \frac{3iM}{\pi(1+k)} \left\{ \frac{\bar{z}_m - z_m}{(z - \bar{z}_m)^3} + \frac{\bar{z}_m(\bar{z}_m - z_m)}{(z - \bar{z}_m)^4} \right\} - \frac{iM}{\pi} \left\{ \frac{1}{(z - \bar{z}_m)^2} + \frac{\bar{z}_m}{(z - \bar{z}_m)^3} \right\}. \quad (21)$$

Подставляя выражения (9), (10), (20), (21) в равенства (14), приходим к окончательным результатам

$$\Phi(z) = -\frac{iM}{2\pi(1+k)} \left(\frac{1}{(z - z_m)^2} - \frac{1}{(z - \bar{z}_m)^2} + \frac{2(z_m - \bar{z}_m)}{(z - \bar{z}_m)^3} \right) - \frac{iM}{2\pi} \frac{1}{(z - \bar{z}_m)^2}, \quad (22)$$

$$\Psi(z) = -\frac{iM}{2\pi} \left(\frac{1}{(z - z_m)^2} + \frac{1}{(z - \bar{z}_m)^2} + \frac{2\bar{z}_m}{(z - \bar{z}_m)^3} \right) - \frac{iM}{\pi(1+k)} \left(\frac{\bar{z}_m}{(z - z_m)^3} + \frac{2z_m - 3\bar{z}_m}{(z - \bar{z}_m)^3} - \frac{3\bar{z}_m(\bar{z}_m - z_m)}{(z - \bar{z}_m)^4} \right) \quad (23)$$

Если в формулах (22) и (23) предположить, что момент приложен на границе полуплоскости, где

$$z_m = \bar{z}_m = a, \quad (24)$$

то функции Г.В. Колосова будут выглядеть следующим образом

$$\Phi(z) = -\frac{iM}{2\pi(1+k)} \frac{1}{(z - a)^2}, \quad (25)$$

$$\Psi(z) = -\frac{iM}{\pi} \left[\frac{1}{(z - a)^2} + \frac{a}{(z - a)^3} \right]. \quad (26)$$

Если при нахождении комплексных потенциалов для полуплоскости, нагруженной сосредоточенным моментом вблизи границе, использовать (8)*, полученные функции будут такими:

$$\Phi(z) = \frac{iM}{2\pi(1+k)} \left(\frac{1}{(z - z_m)^2} - \frac{1}{(z - \bar{z}_m)^2} + \frac{2(z_m - \bar{z}_m)}{(z - \bar{z}_m)^3} \right) - \frac{iM}{2\pi} \frac{1}{(z - \bar{z}_m)^2}, \quad (27)$$

$$\Psi(z) = -\frac{iM}{2\pi} \left(\frac{1}{(z - z_m)^2} + \frac{1}{(z - \bar{z}_m)^2} + \frac{2\bar{z}_m}{(z - \bar{z}_m)^3} \right) + \frac{iM}{\pi(1+k)} \left(\frac{\bar{z}_m}{(z - z_m)^3} + \frac{2z_m - 3\bar{z}_m}{(z - \bar{z}_m)^3} - \frac{3\bar{z}_m(\bar{z}_m - z_m)}{(z - \bar{z}_m)^4} \right). \quad (28)$$

Как видим выражения (27) и (28) отличаются от соответствующих формул (22), (23).

Однако при предположении (24) функции (25) и (26) совпадают с (27) и (28), а также с решением, в котором момент вводится, как в монографии [5].

Таким образом, в проведенных исследованиях доказано, что широко используемое в инженерной практике определение сосредоточенного момента, приложенного в фиксированной точке упругого тела, основанное на предельном переходе (2), противоречит физическому смыслу, который в него вкладывается.

Список литературы

1. Ляв А. Математическая теория упругости. М. - Л.: ОНТИ НК-ИТ СССР, 1935, 674 с.
2. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: "Наука", 1979, 560 с.
3. Michell L.H. Elementary Distributions of Plane Stress. Proc. London Math. Soc., Vol.32, 1900, P. 35-61.
4. Хан Х. Теория упругости. М.: "Мир", 1988, 343 с.
5. Мусхелишвили Н.М. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: "Наука", 1966, 707 с.