

## ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ, СОЕДИНЕННОЙ С ПОЛОСКОЙ

М.А. Греков, Н.Б. Еременко

Санкт-Петербургский государственный университет  
e-mail: mikhail@MG2307.spb.edu, nn@kong.spb.ru

Для упругого композита полоса-полуплоскость построены периодические функции Грина, отвечающие действию периодической системы сосредоточенных сил в полуплоскости. Найдены условия, при выполнении которых решение соответствующего интегрального уравнения с заданной точностью совпадает с первой гармоникой ряда Фурье. В этом простейшем случае получены зависимости входящих в решение коэффициентов от геометрических параметров задачи.

В данной работе для композита полоса-полуплоскость реализован метод построения фундаментального периодического решения уравнений теории упругости, отвечающего действию периодической системы сосредоточенных сил в полуплоскости. Для этого использован метод суперпозиции решений двух задач, представленных в работах [1, 2], который приводит к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно фиктивных усилий, действующих на границе полосы. Решение уравнения ищется в виде отрезка ряда Фурье. Это позволяет приближенно записать решение исходной задачи (функции Грина) в аналитическом виде и свести нахождение содержащихся в нем неизвестных коэффициентов к решению двух независимых систем линейных алгебраических уравнений. Построены простейшие решения интегрального уравнения в виде одной первой гармоники и определены условия, при выполнении которых достигается заданная точность.

Рассмотрим двухкомпонентную упругую среду, состоящую из полуплоскости  $\Omega_1 = \{z : \text{Im } z < 0, \text{Re } z \in R^1\}$  и полосы  $\Omega_2 = \{z : 0 < \text{Im } z < h, \text{Re } z \in R^1\}$ , где  $z = x_1 + ix_2$ .

Считаем, что в точках  $z_k = x_{1k} + ix_{2k} = z_0 + ak$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  ( $z_0 \in \Omega_1, a > 0$ ) действуют силы  $P = (P_1, P_2)$ , а на границе контакта полосы с полуплоскостью  $\Gamma = \{z : \text{Im } z = 0, \text{Re } z \in R^1\}$  выполняются условия идеального сцепления:

$$\sigma^- = \sigma^+, u^- = u^+, z \in \Gamma, \quad (1)$$

где  $\sigma^\pm = \lim_{x_2 \rightarrow \pm 0} \sigma(z)$ ,  $u^\pm = \lim_{x_2 \rightarrow \pm 0} u(z)$ ,  $\sigma = \sigma_{22} - i\sigma_{12}$ ,  $u = u_1 + iu_2$ ,  $\sigma_{ij}$  – компоненты напряжений;  $u_1, u_2$  – компоненты вектора перемещений соответственно вдоль осей  $x_1$  и  $x_2$ .

На границе среды  $\Gamma_0 = \{z : \text{Im } z = h, \text{Re } z \in R^1\}$  заданы усилия:

$$\sigma = p_{22}^0 - ip_{12}^0 = p_0(x_1), z \in \Gamma_0, \quad (2)$$

причем функция  $p_0(x_1)$  удовлетворяет условию Гельдера почти всюду на  $\Gamma_0$  и соответственно условиям периодичности и самоуравновешенности нагрузки

$$p_0(x_1) = p_0(x_1 + a), \quad \int_{-a/2}^{a/2} p_0(t) dt = 0, \quad (3)$$

а на бесконечности

$$\sigma_j(z) \rightarrow \sigma_j^\infty, \quad \omega(z) \rightarrow \omega^\infty, \quad x_2 \rightarrow -\infty, \quad (4)$$

где  $\omega$  – угол поворота материальной частицы,  $\sigma_j$  – главные напряжения,  $\sigma_1^\infty$  действует под углом  $\chi$  к оси  $x_1$ .

Решение поставленной задачи запишем для каждой области в виде [3]:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + i \frac{8\mu_j}{\kappa_j + 1} \omega = 4[\Phi_j(z) + \Phi_j^*(z)], \quad (5)$$

$$\sigma = \Phi_j(z) - \Phi_j(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_j'(z)} + \Sigma_j(z, \bar{z}),$$

$$2\mu_j u = \kappa_j \int \Phi_j(z) dz + \int \Phi_j(\bar{z}) d\bar{z} - (z - \bar{z})\overline{\Phi_j'(z)} + U_j(z, \bar{z}). \quad (6)$$

Здесь

$$\Sigma_1(z, \bar{z}) = \Phi_1^*(z) + \overline{\Phi_1^*(z)} + z\overline{\Phi_1'^*(z)} + \Psi_1^*(z), \quad (7)$$

$$U_1(z, \bar{z}) = \kappa_j \int \Phi_j(z) dz - z\overline{\Phi_1^*(z)} - \int \overline{\Psi_1^*(z)} d\bar{z},$$

$$\Phi_1^*(z) = -H \operatorname{ctg} \frac{\pi(z - z_0)}{a}, \quad (8)$$

$$\Psi_1^*(z) = (\kappa_1 \bar{H} + H) \operatorname{ctg} \frac{\pi(z - z_0)}{a} - \frac{\pi H}{a} [z - (z_0 - \bar{z}_0)] \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi(z - z_0)}{a},$$

$$\Sigma_2(z, \bar{z}) = \Phi_2^*(w) - \Phi_2^*(\bar{w}) + (w - \bar{w})\overline{\Phi_2'^*(w)}, \quad (9)$$

$$\frac{dU_2}{dx_1}(z, \bar{z}) = \kappa_2 \Phi_2^*(w) + \Phi_2^*(\bar{w}) - (w - \bar{w})\overline{\Phi_2'^*(w)},$$

$$\Phi_2^*(w) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(t)}{t - w} dt, \quad w = z - ih, \quad (10)$$

$$H = \frac{P_1 + iP_2}{2a(\kappa_1 + 1)}, \quad \kappa_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j) \text{ при плоском напряженном состоянии, } \kappa_j = 3 - 4\nu_j$$

при плоской деформации;  $\nu_j$ ,  $\mu_j$  – коэффициент Пуассона и модуль сдвига компонента среды  $\Omega_j$ . Черта сверху над переменными величинами означает комплексное сопряжение.

Соотношения (9), (10) описывают решение плоской задачи для упругой однородной полуплоскости  $\operatorname{Im} z < 0$ , на границе которой действуют усилия:

$$p(x_1) = p_{22}(x_1) - ip_{12}(x_1). \quad (11)$$

Таким образом, смысл выражений (5), (6) состоит в представлении решения исходной задачи для двухкомпонентной полуплоскости в виде суперпозиции решений трех задач: задачи для однородной плоскости с упругими постоянными  $\nu_1$ ,  $\mu_1$ , в которой действует периодическая система сосредоточенных сил, задачи для однородной полу-

плоскости с граничными условиями (11), нулевыми условиями на бесконечности и упругими постоянными  $\nu_2, \mu_2$ , и задачи для двухкомпонентной плоскости, напряженно-деформированное состояние которой определяется функциями  $\Phi_j(z)$ . При этом предполагаем, что функция  $p(x_1)$  обладает теми же свойствами, что и функция  $p_0(x_1)$ .

Решение задачи ищем при условии, что

$$\sigma^\infty = -2iH(\kappa_1 + 1), \quad \sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty + i \frac{8\mu_1}{\kappa_1 + 1} \omega^\infty = -8iH. \quad (12)$$

Согласно [1], равенства (12) отвечают действию самоуравновешенной периодической нагрузки на границе среды и условию периодичности перемещений.

Граничное условие (2) преобразуется в интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно неизвестной функции  $p$ :

$$p(x_1) + \tilde{K}_2 \Phi_2^*(w_2) - \tilde{K}_1 \Phi_2^*(\bar{w}_2) + 2ih\tilde{K}_2 \left[ \overline{\Phi_2'^*(w_2)} + \overline{\Phi_2'^*(\bar{w}_2)} \right] + 4h^2 \tilde{K}_2 \Phi_2^{**}(\bar{w}_2) = p_0(x_1) - g(w_0),$$

$$x_1 \in (-\infty; +\infty) \quad (13)$$

где

$$w_0 = x_1 + ih, \quad w_2 = x_1 + 2ih,$$

$$g(z) = \Sigma_1(z, \bar{z}) - K_1 \Phi_1^*(z) - K_2 \left[ \overline{\Phi_1^*(z)} + \overline{z \Phi_1'^*(z)} + \Psi_1^*(z) \right] - K_1 (z - \bar{z}) \overline{\Phi_1'^*(z)} +$$

$$+ iH [K_1 - 1 + \kappa_1 (K_2 - 1)],$$

$$\tilde{K}_1 = \frac{\mu_2 \kappa_1 - \mu_1 \kappa_2}{\mu_1 + \mu_2 \kappa_1}, \quad \tilde{K}_2 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1 \kappa_2}, \quad K_1 = \frac{\mu_1 \kappa_2 - \mu_2 \kappa_1}{\mu_2 + \mu_1 \kappa_2}, \quad K_2 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2 \kappa_1}.$$

Для решения уравнения (13) введем следующую аппроксимацию функции  $p(x_1)$ , удовлетворяющую условию (3):

$$p(x_1) \approx \sum_{n=1}^N [C_n E_n(x_1) + C_{-n} E_n(-x_1)], \quad (14)$$

где  $E_n(x_1) = \exp(2\pi i n x_1 / a)$ ,  $C_n = A_n + iB_n$  — комплексные постоянные.

Тогда на основании свойств интеграла типа Коши из (9) получим:

$$\Phi_2^*(w) = \begin{cases} -\sum_{n=1}^N C_n E_n(w), & \text{Im } w > 0, \\ \sum_{n=1}^N C_{-n} E_n(-w), & \text{Im } w < 0. \end{cases} \quad (15)$$

Учитывая (14) и (15), приводим интегральное уравнение (13) к следующему функциональному равенству, содержащему  $2N$  неизвестных комплексных, постоянных

$$\sum_{k=1}^{2N} [C_k R_k(w_0) + \bar{C}_k S_k(w_0)] = p_0(x_1) - g(w_0), \quad x_1 \in (-\infty; +\infty), \quad (16)$$

где  $C_k, C_{N+k}$  соответствуют постоянным  $C_{-n}, C_n$  в (14) при  $k = n = 1, 2, \dots, N$ ,

$$R_k(z) = E_k(-w) - \left[ \tilde{K}_1 - \tilde{K}_2 \frac{8i\pi^2 k^2 h}{a^2} (z - \bar{z}) \right] E_k(-\bar{w}_1), \quad R_{N+k}(z) = E_k(\bar{w}) - \tilde{K}_2 E_k(w_1),$$

$$S_k(z) = \frac{2i\pi k}{a} [(w - \bar{w}) E_k(\bar{w}) + 2ih \tilde{K}_2 E_k(w_1)], \quad S_{N+k}(z) = \frac{2i\pi k}{a} \tilde{K}_2 (z - \bar{z}) E_k(-\bar{w}_1),$$

$$w_1 = z + ih, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Введение симметризации позволяет свести равенство (16) к двум независимым друг от друга равенствам, отвечающим симметричной и антисимметричной нагрузке [3]. Каждое из этих равенств содержит по  $2N$  вещественных постоянных  $A_k$  или  $B_k$ . Эти постоянные находим методом коллокаций, удовлетворяя каждому равенству в  $N$  точках  $x_1^m \in [0, a/2]$ ,  $m = 1, 2, \dots, N$ .

Величину  $N$ , т. е. число слагаемых в (14), определяем из условия

$$|I_N - I| < \varepsilon |I|, \quad (17)$$

где  $\varepsilon$  – малая величина, характеризующая относительную погрешность аппроксимации (14) в смысле условия (17), и

$$I_N = \int_0^{a/2} \sum_{k=1}^{2N} [C_k R_k(w_0) + \bar{C}_k S_k(w_0)] dx_1, \quad I = \int_0^{a/2} [p_0(x_1) - g(w_0)] dx_1. \quad (18)$$

Таким образом, условие (17) служит критерием точности решения интегрального уравнения и позволяет найти наименьшее число гармоник ряда Фурье, отвечающее заданному значению  $\varepsilon$ .

При  $p_0(x_1) \equiv 0$  интегралы в (18) выражаются через элементарные функции, а именно:

$$I_N = \sum_{k=1}^{2N} [A_k I_k^+ + iB_k I_k^-],$$

$$I_k^{\pm} = \left\{ \left[ 1 - \left( \tilde{K}_1 + \tilde{K}_2 \frac{16\pi k^2 h^2}{a^2} \right) E(2ih) \right] \frac{ia}{2\pi k} \pm 2ih \tilde{K}_2 E(2ih) \right\} [E(a/2) - 1],$$

$$I_{N+k}^{\pm} = \left\{ \left[ \tilde{K}_2 E(2ih) - 1 \right] \frac{ia}{2\pi k} \mp 2ih \tilde{K}_2 E(2ih) \right\} [E(a/2) - 1], \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

$$I = \frac{Ha}{\pi} [K_1(K_2 - 1) + 1 - K_1] \ln(\operatorname{ch} v) - 2\bar{H} [y_0(K_2 - 1) + h(1 - K_1)] \frac{2\operatorname{sh}(2v)}{1 - \operatorname{ch}^2(2v)}, \quad v = \frac{\pi(h - y_0)}{a}.$$

Численные эксперименты, проведенные при  $p_0(x_1) \equiv 0$ , показали, что одна первая гармоника обеспечивает точность  $\varepsilon = 0,01$ , если  $y_0 \leq h - a$ , и  $\varepsilon = 0,001$ , если  $y_0 \leq h - 1,3a$ . Так как  $y_0 \leq 0$ , то первое условие всегда выполняется при  $h \geq a$ , а второе – при  $h \geq 1,3a$ .

В этих случаях при любом фиксированном значении  $y_0$  решение интегрального уравнения можно записать в виде

$$p(x_1) = a_1 \cos(2\pi x_1 / a) - ia_2 \sin(2\pi x_1 / a) \quad (19)$$

при действии вертикальных сил ( $P_1 = 0$ ) и

$$p(x_1) = a_1 \sin(2\pi x_1 / a) - ia_2 \cos(2\pi x_1 / a) \quad (20)$$

при действии горизонтальных сил ( $P_2 = 0$ ).

Соотношения (19), (20) полностью согласуются с отмеченным в работе [4] характером распределения напряжений в соединенных разномодульных полуплоскостях при действии периодической системы сил на достаточном удалении от линии раздела.

На рисунках 1, 2 представлены зависимости коэффициентов  $a_1, a_2$  от  $y_0$  при значениях  $h = 0; 0,1; 0,2; 0,3$ , которым соответствуют цифры 0, 1, 2, 3. При этом принято  $\mu_1 / \mu_2 = 3$ .

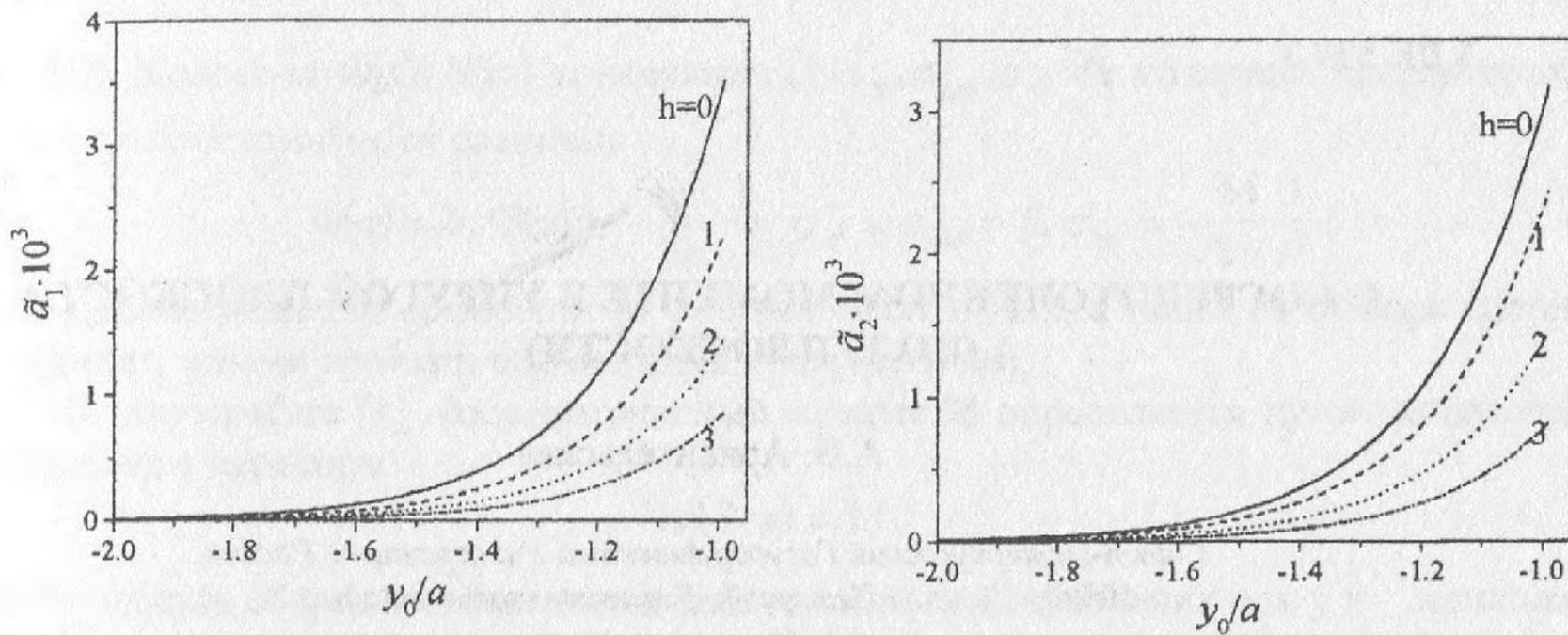


Рис.1. Коэффициенты  $\tilde{\alpha}_j = a_j \cdot a / P_1$  при действии периодической системы горизонтальных сил  $P_1$  в точках  $z_k = ak + iy_0$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

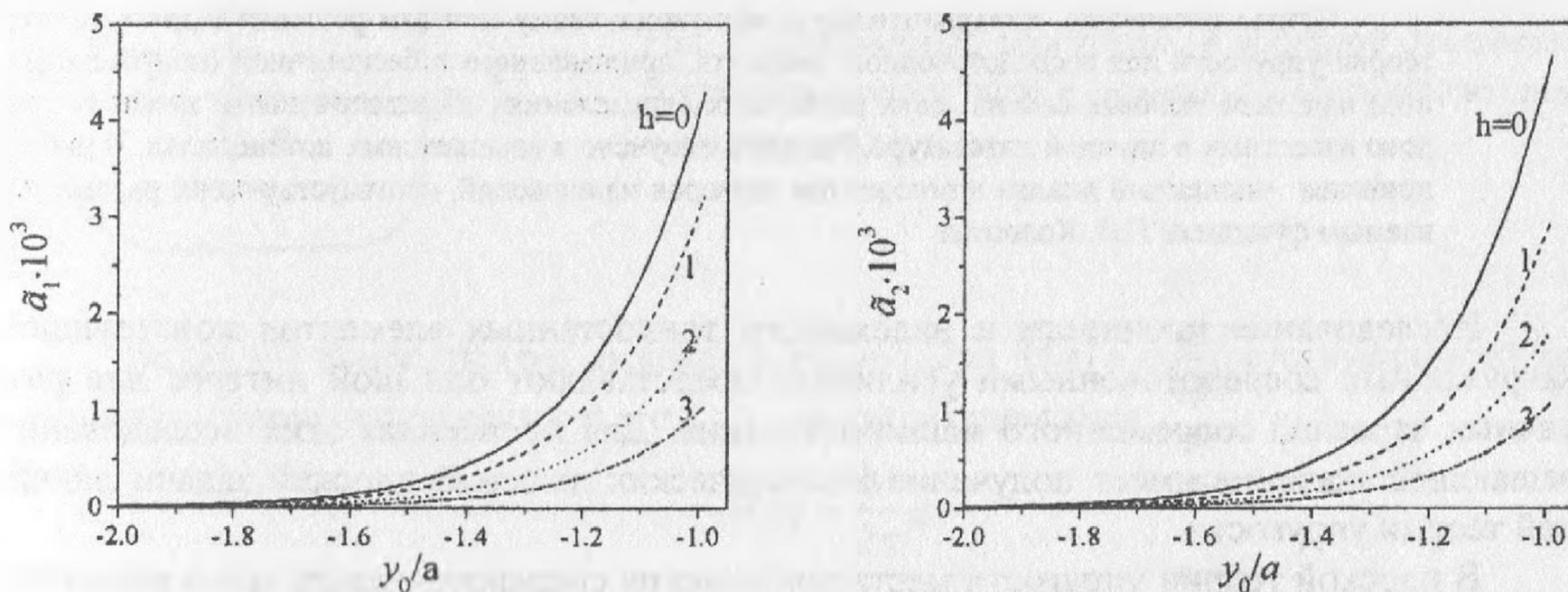


Рис.2. Коэффициенты  $\tilde{\alpha}_j = a_j \cdot a / P_2$  при действии периодической системы вертикальных сил  $P_2$  в точках  $z_k = ak + iy_0$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00673) и программы “Государственная поддержка ведущих научных школ РФ” (00-15-96027).

**Список литературы.**

1. Греков М.А., Моисеева Н.Б. Фундаментальные периодические решения уравнений теории упругости для соединенных разномодульных полуплоскостей // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 1998. Вып. 4 (22). С. 72–75.
2. Греков М.А., Курочкин В.А. Задача контакта упругой полосы с полуплоскостью при сосредоточенных воздействиях // Вопросы механики и процессов управления, вып. 19. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та. 2000.
3. Греков М.А., Моисеева Н.Б. Периодические системы сил и дислокаций в полуплоскости, соединенной с полосой // Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого тела / Под ред. К.Ф.Черных. СПб.: С.-Петербур. гос. ун-т., 1998. С. 118–127.
4. Еременко Н.Б. Напряженное состояние вблизи межфазной границы при действии периодических сосредоточенных сил // Механизмы деформации и разрушения перспективных материалов. Труды XXXV семинара “Актуальные проблемы прочности”. Ч. 1. Псков. 1999. С. 36–41.