УДК 539.3

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ПОЛОСТЬЮ

С.А. Кабриц, Л.В. Слепнева, В.А. Шамина

СПбГУ, 199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7.9.

Изучается осесимметричное напряженно-деформированное состояние неограниченного тела с замкнутой полостью. На бесконечности тело растянуто равномерно во всех направлениях, а его внутренняя граница свободна от нагрузки. Основные уравнения представлены в напряжениях. Обсуждаются некоторые методы их решения.

Рассматривается линейная задача о напряженно-деформированном состоянии неограниченного упругого тела с замкнутой полостью. Граница полости, являющаяся поверхностью вращения, свободна от нагрузки. На бесконечности рассматриваемое тело равномерно растянуто во всех направлениях.

Основные уравнения задачи состоят из двух уравнений равновесия, двух уравнений сплошности и соотношений обобщенного закона Гука [1]. Они записаны в сферических координатах.

1. В задачах определения осесимметричного напряженно-деформированного состояния удобно использовать цилиндрические координаты ρ, φ, z с ортами $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{k}$. В плоскости $\varphi = \mathrm{const}$ координаты ρ, z можно рассматривать как прямоугольные декартовы, а сферические координаты r, θ - как полярные, но полярный угол θ отсчитывается от оси z. Орты сферических координат $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$ (символика очевидна; $\mathbf{e}_\varphi$-тот же, что и в цилиндрических координатах).

Полагая в соотношениях (2.1), (2.6)-(2.8), (3.1) работы [1]

$$\alpha_1 = r,\quad \alpha_2 = \theta,\quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_r,\quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\theta,\quad A_1 = 1,\quad A_2 = r,\quad \rho = r\sin\theta, \tag{1}$$

записываем основные уравнения рассматриваемой задачи в сферических координатах. При этом массовые силы полагаем равными нулю.

Деформация тела описывается вектором перемещения

$$\mathbf{u} = u_\rho\,(r,\theta)\,\mathbf{e}_\rho + u_z\,(r,\theta)\,\mathbf{k} \tag{2}$$

и тензором деформации

$$\boldsymbol{\varepsilon} = e_{11}\,\mathbf{e}_\rho\,\mathbf{e}_\rho + e_{22}\mathbf{e}_\theta\,\mathbf{e}_\theta + e_{33}\,\mathbf{e}_\varphi\,\mathbf{e}_\varphi + e_{12}\,(\mathbf{e}_r\,\mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta\,\mathbf{e}_r), \tag{3}$$

которые связаны следующими соотношениями:

$$\frac{\partial u_z}{\partial r} = (e_{11} - e_{22})\cos\theta - 2e_{12}\sin\theta + \frac{\partial e_{33}\sin\theta}{\partial\theta},$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial \theta} = r(e_{11} - e_{22})\sin\theta + 2e_{12}r\cos\theta - r\sin\theta\frac{\partial re_{33}}{\partial r}; \tag{4}$$

$$u_\rho = e_{33}r\sin\theta\,. \tag{5}$$

Напряженное состояние среды определяем тензором напряжений

$$\sum = \sigma_{11}\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + \sigma_{22}\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\theta + \sigma_{33}\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi + \sigma_{12}(\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_r), \tag{6}$$

компоненты которого удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\theta} + \frac{2\sigma_{12} - \sigma_{22} - \sigma_{33}}{r} + \frac{\sigma_{12}}{r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = 0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\theta} + \frac{3\sigma_{12}}{r} + \frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = 0\,. \tag{7}$$

Чтобы система уравнений для определения напряженно-деформированного состояния рассматриваемого тела была замкнутой, к уравнениям (4), (5), (7) следует присоединить условия сплошности (см.[1], (2.6), (2.8))

$$\sin\theta\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2(e_{11} - e_{22} - r\frac{\partial e_{33}}{\partial r})\right] + r(2\frac{\partial e_{12}}{\partial\theta} - \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial\theta^2})\right\} +$$

$$+\cos\theta\left[2\frac{\partial e_{12}r^2}{\partial r} - r\frac{\partial}{\partial\theta}(e_{11} - e_{22} + 2e_{33})\right] = 0,$$

$$\sin^2\theta(e_{11} - e_{22} - r\frac{\partial e_{33}}{\partial r}) + \sin\theta\cos\theta(2e_{12} - \frac{\partial e_{33}}{\partial\theta}) + e_{22} - e_{33} = 0 \tag{8}$$

и определяющие уравнения. Их принимаем в виде обобщенного закона Гука для однородного изотропного материала:

$$\sigma_{ii} = \frac{E}{(1+\nu)}\left[e_{ii} + \frac{\nu}{1-2\nu}(e_{11} + e_{22} + e_{33})\right],$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{(1+\nu)}e_{12}\,, \quad i = 1,2,3. \tag{9}$$

Сформулируем теперь краевые условия. Так как на бесконечности тело равномерно растянуто во всех направлениях, то

$$\lim_{r\to\infty}\sum = \sum^\circ = \sigma^\circ(\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi), \quad \sigma^\circ = const, \tag{10}$$

где Σ– тензор напряжений (6). Соотношение (10) эквивалентно следующим:

$$\lim_{r\to\infty}\sigma_{ii} = \sigma^\circ, \lim_{r\to\infty}\sigma_{12} = 0\,. \tag{11}$$

В плоскости φ = const меридиан поверхности S , ограничивающей полость, зададим параметрическими уравнениями

$$\rho = r(\theta)\sin\theta, \qquad z = r(\theta)\cos\theta, \qquad 0 \le \theta \le \pi\,. \tag{12}$$

Орт внешней нормали к границе полости

$$\mathbf{n} = (-r\mathbf{e}_r + \frac{dr}{d\theta}\mathbf{e}_\theta)\left[(\frac{dr}{d\theta})^2 + r^2\right]^{-1/2}. \tag{13}$$

Действующее на ней напряжение определяется по формуле

$$\sigma_n = \sum \cdot \mathbf{n} = \left[(\frac{dr}{d\theta})^2 + r^2\right]^{-1/2}\left[\mathbf{e}_r(-\sigma_{11}r + \sigma_{12}\frac{dr}{d\theta}) + \mathbf{e}_\theta(-\sigma_{12}r + \sigma_{22}\frac{dr}{d\theta})\right]. \tag{14}$$

Так как граница полости свободна от нагрузки, то должно быть

$$\left[-\sigma_{11}r + \sigma_{12}\frac{dr}{d\theta}\right]_s = 0, \quad \left[-\sigma_{12}r + \sigma_{22}\frac{dr}{d\theta}\right]_s = 0\,. \tag{15}$$

Напряжения σ_{ii}, возникающие в теле, представим в виде

$$\sigma_{ii} = \sigma^o + \sigma_{ii}^*(r,\theta), \quad i=1,2,3, \tag{16}$$

где $\sigma^o = \text{const}$ – растягивающее напряжение на бесконечности (см.(10)).

При помощи (9) и (16) получаем следующие зависимости:

$$\sigma_{ii}^* = \frac{E}{(1+\nu)}\left[e_{11}^* + \frac{\nu}{1-2\nu}(e_{11}^* + e_{22}^* + e_{33}^*)\right], e_{ii} = e_{ii}^* + e_{ii}^\circ, e_{ii}^\circ = \sigma^\circ\frac{1-2\nu}{E}, i = 1,2,3, \tag{17}$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{(1+\nu)}e_{12}. \tag{18}$$

Подставляя (16) в уравнения равновесия (7) и краевые условия (11),(15), а (18) в условия сплошности (8), получаем следующие зависимости:

$$\frac{\partial\sigma_{11}^*}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\theta} + \frac{2\sigma_{12}^* - \sigma_{22}^* - \sigma_{33}^*}{r} + \frac{\sigma_{12}}{r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = 0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{22}^*}{\partial\theta} + \frac{3\sigma_{12}}{r} + \frac{\sigma_{22}^* - \sigma_{33}^*}{r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = 0; \tag{19}$$

$$\sin\theta\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2(e_{11}^* - e_{22}^* - r\frac{\partial e_{33}^*}{\partial r})\right] + r(2\frac{\partial e_{12}}{\partial\theta} - \frac{\partial^2 e_{33}^*}{\partial\theta^2})\right\} +$$

$$+\cos\theta\left[2\frac{\partial e_{12}r^2}{\partial r} - r\frac{\partial}{\partial\theta}(e_{11}^* - e_{22}^* + 2e_{33}^*)\right] = 0,$$

$$\sin^2\theta(e_{11}^* - e_{22}^* - r\frac{\partial e_{33}^*}{\partial r}) + \sin\theta\cos\theta(2e_{12} - \frac{\partial e_{33}^*}{\partial\theta}) + e_{22}^* - e_{33}^* = 0; \tag{20}$$

$$\lim_{r\to\infty} \sigma_{ii}^{*} = 0\ , \quad \lim_{r\to\infty} \sigma_{12} = 0; \tag{21}$$

$$\left[-(\sigma_{11}^{*} + \sigma^{\circ})r + \sigma_{12}\frac{dr}{d\theta}\right]_{s} = 0, \quad \left[-\sigma_{12}r + (\sigma_{22} + \sigma^{\circ})\frac{dr}{d\theta})\right]_{s} = 0. \tag{22}$$

Соотношения (19)-(22), (17) являются полной системой уравнений для определения σ_{ii}^{*}, σ_{12}, σ_{ii}^{*}, e_{ii}^{*}, e_{12}.

2. При решении задачи предполагается полностью или частично использовать численные методы.

Так, возможно представить решение в виде рядов по степеням синуса и косинуса угла между осью вращения полости и радиальным направлением сферических координат. Коэффициенты рядов зависят от радиальной координаты сферических координат и определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой несложно. Однако выполнение краевых условий может быть затруднено, когда граница полости не совпадает с координатной поверхностью. Это неудобство предполагается преодолеть с использованием метода коллокаций.

Список литературы

1. Шамина В.А. Постановка линейной осесимметричной задачи механики деформируемого тела в напряжениях. Вестник СПбГУ. Сер.1. 2000.Вып.1.