УДК 539.3

ИЗОМОРФИЗМ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ДВИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ СО СПЕЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

И.А. Миклашевич

Белорусская государственная политехническая академия
65, пр. Скарыны, Минск 220027, Беларусь
e-mail:miklashevich@netscape.net

Движение трещины в неоднородной среде рассматривается как построение геодезической в пространстве со специальной геометрией. Геометрия пространства задаётся метрическим тензором. Метрический тензор связан с дефектной структурой среды. Рассматривается построение группы, связанной с процессом деформирования твёрдых тел. Обосновывается необходимость введения калибровочных полей в полную группу деформирования. Исследуются симметрийные условия, налагаемые на калибровочные поля.

1. Введение. Геометрическое представление

Геометрические представления достаточно широко используются в теории разрушения. Давно известно, что траектория трещины может рассматриваться как геодезическая в неоднородном пространстве [1]. В этом случае разрушение (движение трещины) представляет собой процесс движения точки в фазовом пространстве со специальной геометрией. В общем случае метрические свойства этого пространства могут не соответствовать никакому реально осуществимому состоянию изучаемого континуума [2] и должны задаваться, исходя из дополнительных предположений. Рассмотрим вначале введение геометрии в случае распространения трещины.

2. Геометрия пространства, в котором движется трещина

Как уравнение геодезической траектория ищется, исходя из вариационного принципа теории трещин [3]. Критерий разрушения в форме Гриффитса требует постоянства энергии разрушения при движении трещины.

Рассмотрим распространение трещины в однородной среде с дефектами (дислокации, дисклинации и т.д.). В этом случае вариационный принцип для движения трещины формулируется в форме Мопертюи [4] и для действия S_0 может быть записан как

$$\delta S_0 = \delta\int_A^B \sqrt{2(E-U)g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta}\ , \tag{1}$$

где $\hat{g}_{\alpha\beta} = 2(E-U)g_{\alpha\beta}$ – новая метрика; x^α – локальная координата; греческие индексы принимают значения $1,2,\ldots n$, где n – размерность пространства; U – в общем случае потенциал, создаваемый дефектами. Даже в случае $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ новая метрика будет неевклидова [4]. Физическое пространство, в котором рассматривается движение трещины изоморфно исходному континууму. Метрика этого пространства $g_{\alpha\beta}$ связана с дефектной структурой материала [5].

3. Групповые свойства деформации

Согласно Ф. Клейну, геометрия любого пространства может быть построена на основании группы симметрии этого пространства. Рассмотрим возможность построения группы, связанной с деформированием твёрдого тела.

Как известно, совокупность $\mathfrak{I}$ элементов G_1, G_2, G_3 … называют группой, если для элементов задан закон умножения элементов, удовлетворяющий определённым требованиям:

1. $G_a G_b = G_d \quad \forall G \in \mathfrak{I}$.
2. Существует единичный элемент $EG_a = G_a \quad \forall G \in \mathfrak{I}$.
3. Существует обратный элемент $G_a G_a^{-1} = E \quad \forall G \in \mathfrak{I}$.
4. Для умножения выполняется закон транзитивности $G_a(G_b G_c) = (G_a G_b)G_c \quad \forall G \in \mathfrak{I}$
5. Дополнительным является требование коммутируемости элементов группы (в этом случае группа абелева) $G_a G_b = G_b G_a \quad \forall G \in \mathfrak{I}$.

Из физического смысла участков классической диаграммы напряжение – деформация для идеально-пластических тел можно положить в качестве элементов полной группы, описывающей деформированное состояние континуума, операторы G_1 – упругое деформирование, G_2 – пластическое деформирование, G_3 – упругую релаксацию, G_4 – пластическую релаксацию, O – исходное состояние (состояние неизменной нагрузки). Из физического смысла операторов, таблица умножения будет иметь вид:

$$\begin{array}{cccccc} & G_1 & G_2 & G_3 & G_4 & G_5 = 0 \\ G_1 & G_2 & G_2 & 0 & G_1 & G_1 \\ G_2 & G_2 & G_2 & G_4 & 0 & G_2 \\ G_3 & G_1 & G_4 & G_4 & 0 & G_3 \\ G_4 & G_2 & G_1 & 0 & G_3 & G_2 \end{array} \tag{2}$$

Проверим выполнение необходимых условий для элементов группы. Выполнение условия 1 следует из определения таблицы умножения. Существование единичного элемента вытекает из определения элементов множества $\mathfrak{I}$. В справедливости условия 3 можно убедится непосредственной подстановкой:

$$G_1^{-1} = G_3 \tag{3}$$

$$G_2^{-1} = G_4 \tag{4}$$

$$G_3^{-1} = G_1 \tag{5}$$

$$G_4^{-1} = G_2 \tag{6}$$

В случаях (5, 6) мы принимаем необходимость существования левого обратного элемента. Для операторов, заданных законом умножения (2) условие транзитивности не выполняется. Это объясняется нарушением симметрии, возникающим в процессе деформирования, что вызывает необходимость введения стандартной процедуры удлинения производных и введения калибровочных полей [6].

4. Калибровочные поля, инвариантность и структура пространства

Структура оператора пластического деформирования, который вызывает наибольшие дискуссии последнее время [7], может быть уточнена на основании необходимости выполнения условия транзитивности. Применяя таблицу умножения для различных комбинаций, имеем, например:

$$G_1 G_2 G_3$$

$$G_1 (G_2 G_3) = G_1, \tag{7}$$

$$(G_1 G_2) G_3 = G_4. \tag{8}$$

Из уравнений (7, 8), полагая $G_2 = G_2' + G_2''$ и принимая действие оператора линейным, получаем

$$(G_1 (G_2' + G_2'')) G_3 = (G_1 G_2') G_3 + (G_1 G_2'') G_3, \tag{9}$$

$$G_1 ((G_2' + G_2'') G_3) = G_1 (G_2' G_3) + G_1 (G_2'' G_3). \tag{10}$$

Объединяя правые части (9, 10) можно получить условия, налагаемые на структуру оператора G_2. Эти условия определяют процедуру введения калибровочных полей, структура и происхождение которых в обычном подходе представляется не совсем ясной [6,7].

Обычно для пластической деформации с учётом дефектной структуры внутреннюю энергию материала s в стационарном случае записывают как $s = (S, \varepsilon_{\alpha\beta}, R^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}, T^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}, \Omega^{\delta}_{\alpha\beta\gamma})$, где S – энтропия, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ – тензор деформации, характеризующий структуру материала. При этом в случае пластической деформации тензор деформации представляется как сумма трёх компонент $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon^{el}_{\alpha\beta} + \varepsilon^{elpl}_{\alpha\beta} + \varepsilon^{pl}_{\alpha\beta}$, где верхние индексы не есть тензорные индексы, а характеристики состояний. Так, $\varepsilon^{el}_{\alpha\beta}$ – тензор упругой, $\varepsilon^{pl}_{\alpha\beta}$ – пластической деформации бездефектного материала, $\varepsilon^{elpl}_{\alpha\beta}$ – тензор совместной упругопластической деформации, связанный с дефектами материала, $R^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}$, $T^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}$, $\Omega^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}$ есть соответственно тензоры кривизны, кручения, сегментарной кривизны, связанные с различными типами дефектов. Если рассматривать изотермическое деформирование материала, то энтропия имеет только конфигурационный характер и также является функцией распределения дефектов, т.е. $R^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}$, $T^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}$, $\Omega^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}$.

Поскольку величины $\varepsilon^{el}_{\alpha\beta}$, $\varepsilon^{pl}_{\alpha\beta}$, $\varepsilon^{elpl}_{\alpha\beta}$ удовлетворяют требованиям, предъявляемым к реперам пространства в смысле Картана – Клейна, они могут рассматриваться как реперы в локальной неевклидовой системе координат, связанной с деформированием твёрдого тела. Распадение переменных на две группы – определяющую свойства пространства и свойства движущегося объекта – идеологически близко к описанию движения пробной частицы в поле гравитации.

5. Заключение

Построение репера деформированного пространства позволяет представить задачу определения напряжённо-деформированного состояния как определение положения точки в пространстве, а процесс деформирования – как движение точки в этом пространстве. Это соответствует «пассивной» точке зрения, когда объект исследования изоморфно соотносится пробной массе, движение которой определяется исключительно внешними условиями (полями).

Работа выполнена при частичной поддержке БРФФИ грант Ф99Р-186 и Министерства образования РБ, грант 00-123.

Список литературы

1. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985, 504с.
2. Седов Л.И., Бердичевский В.Л. Динамическая теория непрерывно распределённых дислокаций //ПММ. 1967. Т. 31, Вып. 6. С. 981-1000.
3. Чигарев А.В., Миклашевич И.А. Расчёт траектории трещины в композиционном материале в линейном приближении // Доклады АН Беларуси, 1995, Т. 39, № 2, С. 114.
4. Новиков С. П., Фоменко А.Т. Элементы дифференциальной геометрии и топологии. М.: Наука, 1987, 432с.
5. Миклашевич И.А. Проектирование материалов с заданными механическими свойствами // VI Межд. Симп. «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» Февраль 2000 г. Москва, МАИ.
6. Гриняев Ю.В., Чертова Н.В. Механические свойства материалов и предмет описания калибровочной теории //ЖТФ, 1998, Т. 68, № 7, С. 70-74.
7. Гриняев Ю.В., Чертова Н.В. Физическое содержание калибровочной модели, описывающей среды со структурой и дефектами //ПМТФ, 1999, Т. 40, № 6, С. 163-168.