

ОСОБЕННОСТИ СОПРОТИВЛЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

© Д.Л. Быков, Д.Н. Коновалов

*ЦНИИ Машиностроения,
141070, Королев Московской области, Пионерская 4*

В рамках нелинейной эндохронной теории стареющих вязкоупругих материалов рассматриваются задачи бифуркации полиэтиленовой цилиндрической оболочки при осевом сжатии и тонкого металлического покрытия, соединенного с деформируемой полимерной подложкой. Обе задачи ранее исследовались экспериментальными методами, что позволяет сравнивать результаты расчетов с данными опытов. Показана необходимость применения нелинейной теории для получения физически корректных результатов при бифуркации тонкостенных полимерных конструкций. Отмечается удобство использования испытаний на устойчивость для определения характеристик вязкоупругих материалов.

Применение инженерного метода при решении второй задачи позволило указать один из возможных способов нахождения упругих характеристик наноразмерных тонких покрытий.

1. Введение

Бифуркация тонкостенных конструкций, наступающая при деформации вязкоупругих материалов, позволяет выявить некоторые особенности сопротивления этих материалов. Специфика заключается в том, что свойства материалов начинают меняться с начала нагружения, а в момент потери устойчивости материал испытывает дополнительное мгновенное нагружение в уже деформированном состоянии. Связывая длительное докритическое нагружение с процессом накопления повреждений, можно оценить влияние последних на мгновенный отклик материала в момент бифуркации. Ниже эта идея используется для определения вязкоупругих и упругих характеристик по результатам испытаний на устойчивость образцов, изготовленных с применением полимерных материалов.

2. Определение вязкоупругих характеристик с помощью опытов на устойчивость цилиндрических оболочек при осевом сжатии.

В работе [1] изложены результаты экспериментов на устойчивость цилиндрических оболочек из полиэтилена высокой плотности (ПЭВП). Оболочки мгновенно загружались постоянными во времени сжимающими осевыми нагрузками. Было испытано три серии оболочек, по три в каждой. В первой серии отношение радиуса a к толщине оболочки h равнялось 14,8, во второй – 12,3 и в третьей – 12,0. Соответствующие площади поперечного сечения были: 10,1; 11,3; 12,6 см². Высота всех оболочек l равнялась 13,5 см. Задавалось девять разных значений сжимающих сил и замерялось по девяти значений соответствующих им времен потери устойчивости и осевых деформаций оболочек в моменты потери устойчивости.

Имея указанные данные, поставим задачу определения уравнений состояния ПЭВП. Для этого воспользуемся следующими законами связи напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t) - \sigma(t)\delta_{ij} &= \varphi(t) \int_0^t R(t_*(t) - t_*(\tau)) d(\varepsilon_{ij}(\tau) - \vartheta(\tau)\delta_{ij}/3), \\ \varepsilon_{ij}(t) - \vartheta(\tau)\delta_{ij}/3 &= \int_0^t \Pi(t_*(t) - t_*(\tau)) d[(\sigma_{ij}(\tau) - \sigma(\tau)\delta_{ij})/\varphi(\tau)], \\ 3\sigma &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}, \quad \vartheta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1)$$

В этих формулах $R(t)$ и $\Pi(t)$ – ядра сдвиговой релаксации и ползучести; $t_*(t)$ – приведенное время; $\varphi(t)$ – функция, характеризующая необратимое изменение, или старение материала. Уравнения (1) соответствуют эндохронной нелинейной теории стареющего вязкоупругого материала. При $\varphi(t) \equiv 1$ они переходят в уравнения, рассмотренные в [2], а при дополнительном условии $t_*(t) \equiv t$ – в уравнение линейной теории Больцмана-Вольтерра.

Для идентификации функций $\varphi(t)$, $R(t)$, $\Pi(t)$ примем допущения

$$\vartheta = 0, \quad R(t) = Ee^{-Et/\mu}, \quad \Pi(t) = 1/E + t/\mu, \quad \varphi(t) = e^{-\lambda A_*(t)}, \quad t_*(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau, \quad (2)$$

где E , μ , λ – неизвестные константы; $A_*(t)$ – удельная рассеянная энергия. При одноосном сжатии постоянным напряжением σ_1 получим $A_*(t) = s^2 t/\mu$, $s = (2/3)\sigma_1$.

Принимая прогиб оболочки, отсчитываемый от безмоментного деформированного состояния, в виде

$$W = A \sin \frac{m\pi x}{l} H(t - t_{kp}), \quad H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}, \quad (3)$$

где x – осевая координата; t_{kp} – момент бифуркации; m – целое число; A – неопределенная константа, можно, используя уравнения (1), (2), аналогично решению упругой задачи [3] получить следующее выражение для критического напряжения:

$$\sigma_{kp} = (kEh/a) \exp\left(-\alpha \times t_{kp} \sigma_{kp}^2\right), \quad \alpha \equiv 4\lambda/9\mu. \quad (4)$$

Здесь k – коэффициент, учитывающий технологию изготовления оболочек, равный единице при их идеальной гладкости и однородности. Формула (4) получена с использованием соответствия между модулем упругости и величиной $(3/2)R(0)\varphi(t_{kp})$, устанавливаемого с помощью уравнений (1).

Из (4) следуют выражения

$$kE = \sigma_{kp}(t_{kp} = 0)a/h, \quad \alpha = \left(\ln\left[\sigma_{kp}(t_{kp} = 0)/\sigma_{kp}(t_{kp})\right]\right) / \left(t_{kp} \sigma_{kp}^2(t_{kp})\right). \quad (5)$$

Значения $\sigma_{kp}(t_{kp} = 0)$ определялись экстраполяцией зависимостей между t_{kp} и σ_{kp} при $t_{kp} \rightarrow 0$. Выражения (5) позволяют, зная σ_{kp} при $t_{kp} = 0$ и некотором значении t_{kp} , вычислять теоретическим путем величины σ_{kp} при остальных семи значениях t_{kp} с помощью формулы (4). Для улучшения согласования всех девяти экспериментальных и теоретических значений $\sigma_{kp}(t_{kp})$ проводилась минимизация их квадратичных отклонений, что позволяло уточнить значения kE и α , даваемые формулами (5).

На рис. 1 изображены кривые зависимости критической силы $P_{кр}$ от времени бифуркации для трех серий испытаний, построенные с использованием формулы (4), и точки, соответствующие экспериментам [1]. Для восьми значений $t_{кр}$ среднее отклонение равнялось 2,2% и лишь при $t_{кр} = 3$ мин разница между теоретическим и экспериментальным значениями $P_{кр}$ составляла 9,6%, что могло объясняться погрешностью фиксирования малого времени бифуркации.

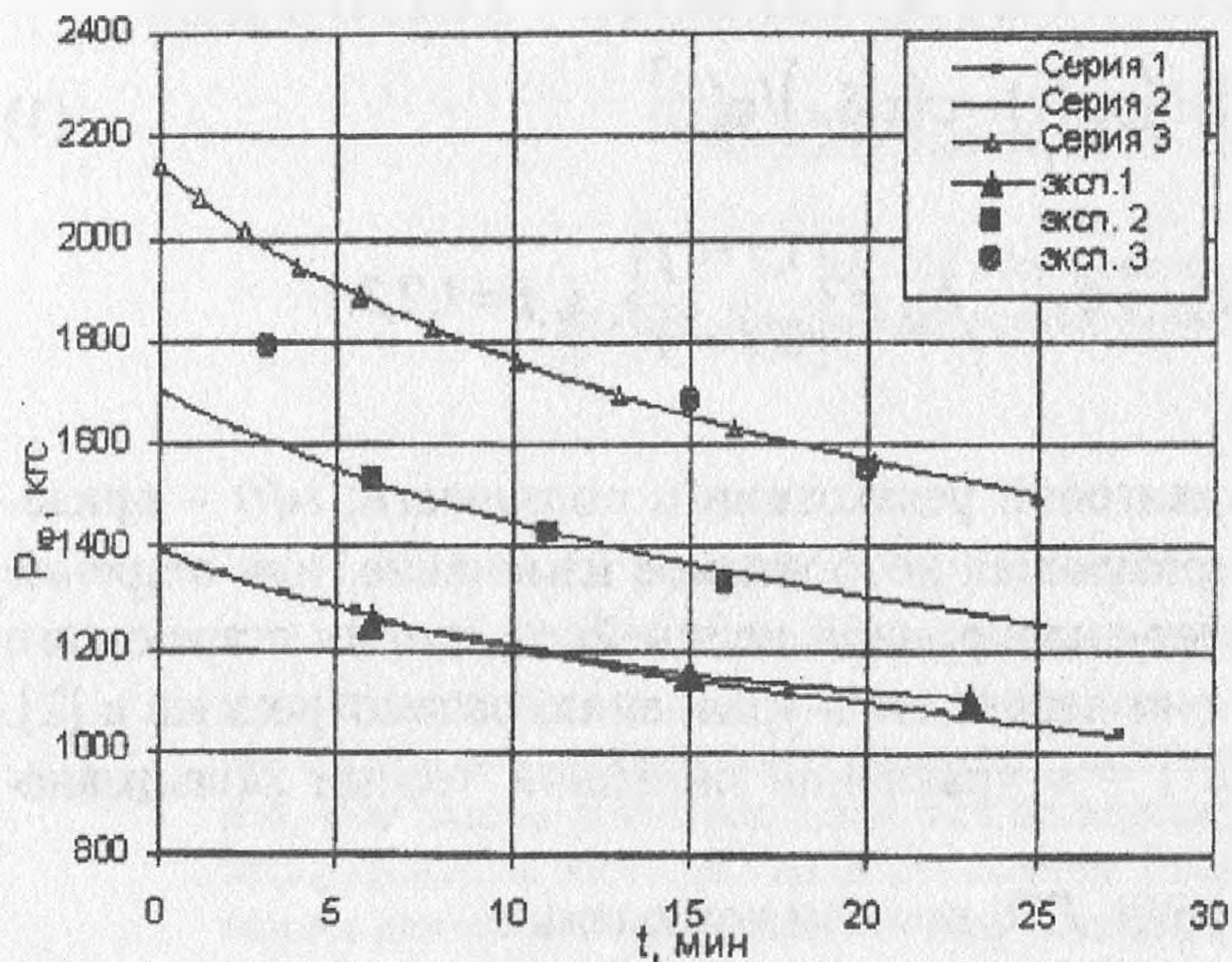


Рис. 1.

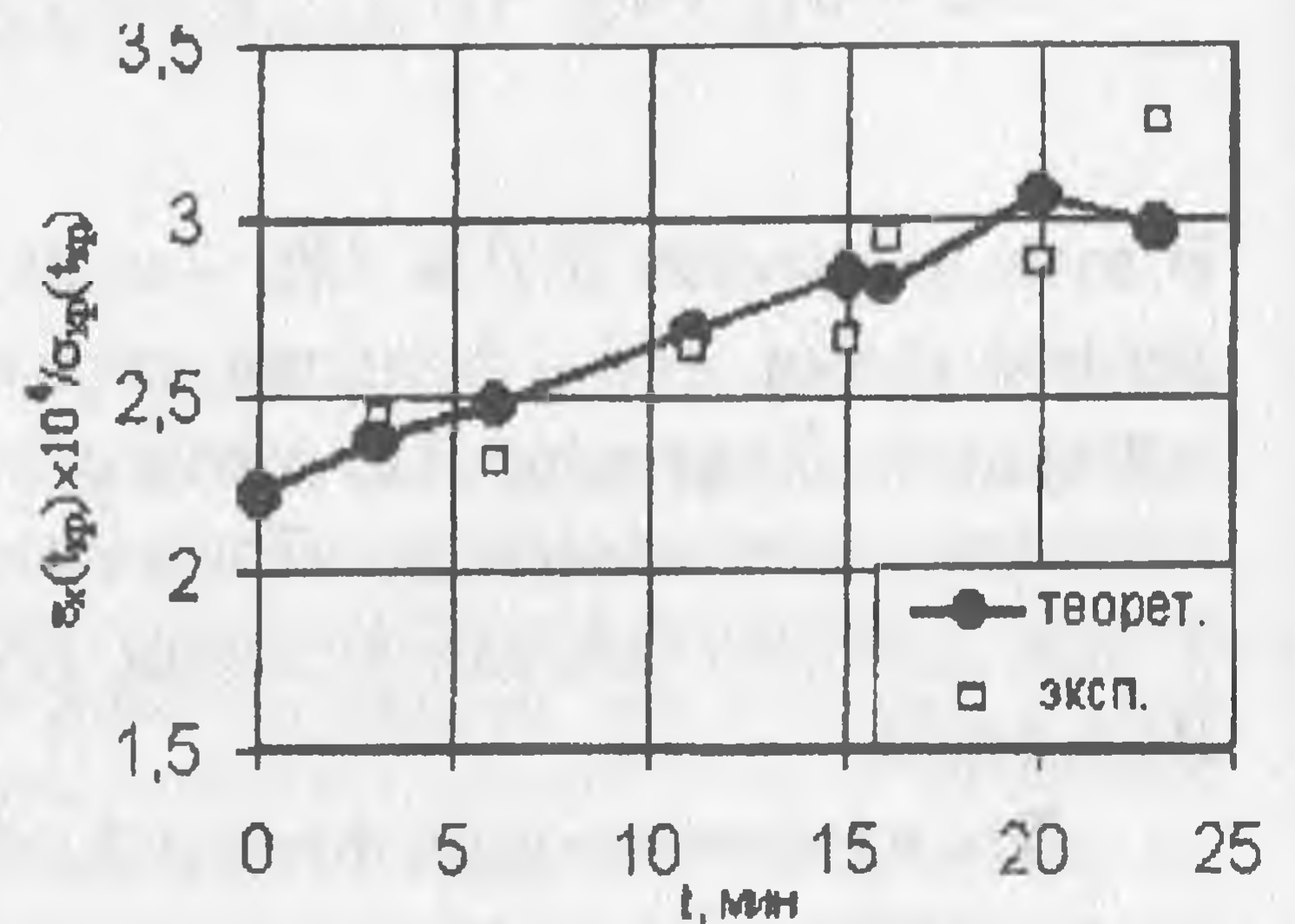


Рис. 2

Полученные результаты соответствовали значениям: $kE = 1986 \text{ кг/см}^2$, $\alpha = 1,01 \times 10^{-6} \text{ см}^4/\text{мин} \times \text{кгс}^2$. Чтобы найти величины E , μ , λ , k , дополнительно использовались экспериментальные значения осевых деформаций ϵ_x в момент бифуркации. Теоретические значения этих величин согласно (1)-(3) имеют вид

$$\epsilon_x(t_{кр}) = (2/3)\sigma_{кр}(t_{кр}) \left((1/E) \exp(\alpha \sigma_{кр}^2(t_{кр}) \times t_{кр}) + t_{кр}/\mu \right) \quad (6)$$

В уравнение (6) входят неизвестные величины E и μ . Поступая аналогично предыдущему, были построены теоретические и экспериментальные значения отношения $\epsilon_x(t_{кр})/\sigma_{кр}(t_{кр})$. На рис. 2. показаны эти значения для $t_{кр} = 3; 6; 11; 15; 16; 20; 23$ мин, при этом экспериментальные значения для $t_{кр} = 6$ мин и $t_{кр} = 15$ мин являются средними по результатам двух испытаний, поэтому общее число сравниваемых отношений равно семи. Светлые квадраты соответствуют экспериментальным значениям отношения, а черные кружки – их теоретическим значениям согласно (6). Относительная погрешность указана в таблице.

Т а б л и ц а 1.

$t_{кр}$, мин	3	6	11	15	16	20	23
$\Delta(\epsilon_x(t_{кр})/\sigma_{кр}(t_{кр})), \%$	+9,3	+6,4	+1,8	+2,2	-4,7	+5,9	-9,4

Результаты, соответствующие рис. 1. и 2., позволили найти следующие значения искомых величин:

$$E = 3000 \text{ кгс/см}^2; \quad k = 0,66; \quad \mu = 4,2 \times 10^6 \text{ кгс} \times \text{мин/см}^2; \quad \lambda = 9,55 \text{ см}^2/\text{кгс}.$$

С целью контроля найденные характеристики ПЭВП были использованы для расчета сдвиговых деформаций ε_{xy} , замеренных при постоянном сдвиговом напряжении $\tau = 100 \text{ кгс/см}^2$ [4] в интервале времен до 10 мин. Теоретические значения $\varepsilon_{xy}(t)$ находились в соответствии с (1), (2) по формуле

$$\varepsilon_{xy}(t) = \tau \left[(1/E) \exp(-\lambda A_*(t)) + t/\mu \right], \quad A_*(t) = 2\tau^2 t/\mu. \quad (7)$$

Подставляя сюда найденные значения E , μ , λ при $t = 1$ мин было получено $\varepsilon_{xy} = 3,5\%$, а при $t = 10$ мин – $\varepsilon_{xy} = 5,3\%$. Соответствующие экспериментальные значения равнялись 3,9% и 5,8%, что давало относительные погрешности: 10,3% и 8,6%. Таким образом, вязкоупругие характеристики ПЭВП, определенные с использованием опытов на бифуркацию, хорошо описывают и опыты на сдвиговую ползучесть. Следует заметить, что время нагружения в указанных экспериментах не превосходило 25 мин. Для длительных интервалов времени могут потребоваться более сложные зависимости $R(t)$ и $\varphi(A_*(t))$.

3. Определение упругих характеристик тонких покрытий, жестко скрепленных с вязкоупругой подложкой

Механические характеристики материала в тонких слоях, полученных по нетрадиционным технологиям (например, методом ионного напыления), могут заметно отличаться от стандартных характеристик, и в то же время для таких слоев материала могут оказаться неприменимыми стандартные методы механических испытаний, поскольку принципиально невозможно отделить покрытие от подложки. В этом случае весьма ценными с точки зрения получения информации о механических характеристиках могут оказаться опыты, в которых слои покрытия теряют устойчивость. Одним из таких опытов является опыт на одноосное растяжение образца подложки из слабосжимаемого материала с нанесенным на нее покрытием. Если материал покрытия обладает достаточной сжимаемостью (величина коэффициента Пуассона заметно ниже значения 0,5), то в системе "покрытие-подложка" будут возникать напряжения не только в направлении растяжения, но и в поперечном направлении, причем в подложке эти напряжения будут растягивающими, а в покрытии – сжимающими. При монотонном увеличении общей деформации растяжения сжимающие напряжения в покрытии могут достичь критического значения, при котором покрытие потеряет устойчивость. В качестве материала слабосжимаемой подложки может использоваться один из полимерных материалов (если это допустимо с точки зрения технологии). В работах [5], [6] приведены весьма интересные результаты экспериментально-теоретических исследований явления потери устойчивости тонкого (4-40 нм) платинового покрытия, нанесенного на полимерную подложку при ее растяжении. Однако принятые в этих работах расчетные модели не позволяют производить оценку докритического напряженно-деформированного состояния системы "покрытие-подложка", что существенно ограничивает возможности идентификации механических характеристик материала покрытия. Ниже излагается расчетная модель, позволяющая проводить оценку параметров как докритического, так и критического (в момент потери устойчивости) состояния.

Для оценки докритического состояния системы "покрытие-подложка" примем следующие допущения:

- материал покрытия является линейно-упругим;
- механическое поведение несжимаемого материала подложки описывается соотношениями линейной теории вязкоупругости;

- напряженно-деформированные состояния покрытия и подложки являются однородными. Наиболее близко этому допущению соответствует случай двухстороннего покрытия (рис.3).

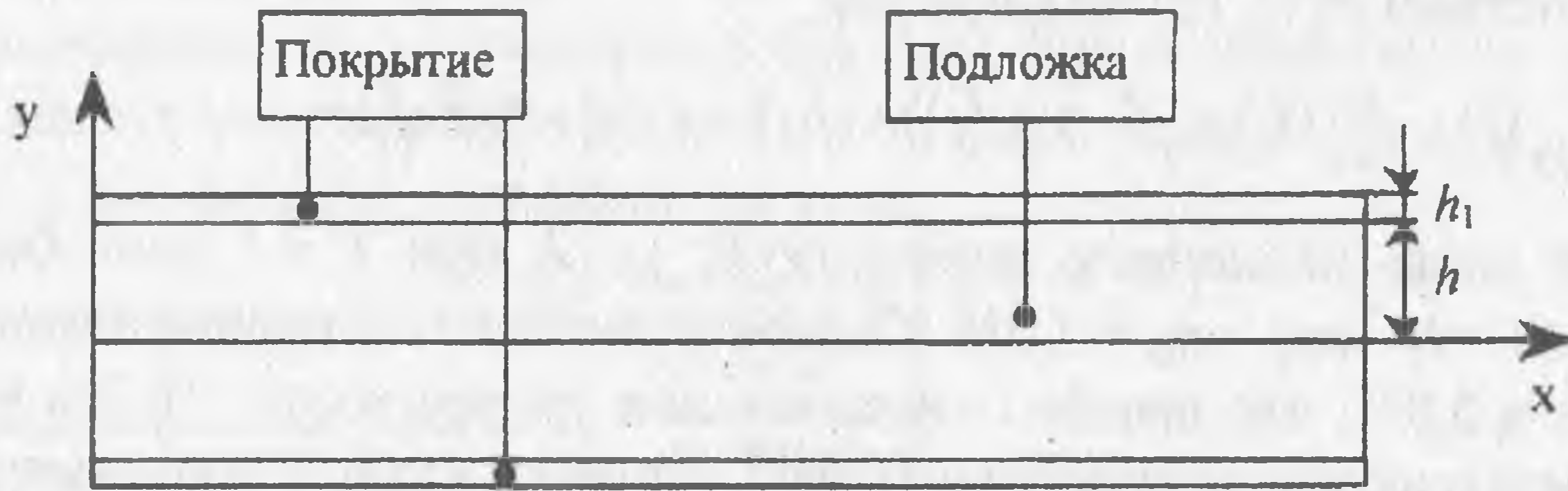


Рис. 3.

При указанных допущениях решение контактной задачи может быть представлено в следующем виде:

$$\sigma_{1x}(t) = -\frac{h}{h_1}(0.5 - \nu_1)E_0 \left[\varepsilon_0(t) - 0.5E_0 \int_0^t \tilde{\Pi}(t-\tau) d\varepsilon_0(\tau) \right], \quad (8)$$

где $\sigma_{1x}(t)$ – напряжение в покрытии в поперечном направлении;

$\varepsilon_0(t)$ – временная зависимость деформации растяжения в направлении оси z ;

$$E_0 = \frac{E_1 h_1}{(1 - \nu_1^2) h}; \quad (9)$$

E_1, ν_1 – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала покрытия;

h_1 – толщина слоя покрытия;

h – полутолщина подложки (см. рис. 1);

$\tilde{\Pi}(t)$ – ядро-резольвента для ядра $\tilde{R}(t) = R(t) + 0.5E_0$;

$R(t)$ – ядро релаксации материала подложки.

В частном случае ($R(t) = R_1 e^{-t/\tau_1} + R_\infty, \varepsilon_0(t) = \dot{\varepsilon}_0 t$) решение (8) будет иметь следующий вид:

$$\sigma_{1x}(t) = -\frac{h}{h_1} \frac{(1 - 2\nu_1)\dot{\varepsilon}_0}{(1 + 2R_\infty/E_0)} \left[\frac{R_1 \tau_1}{1 + 2R_\infty/E_0} (1 - e^{-t/\tilde{\tau}_1}) + R_\infty t \right], \quad (10)$$

где $\tilde{\tau}_1 = \tau_1 [2(R_1 + R_\infty) + E_0] / (2R_\infty + E_0)$.

Для решения задачи об устойчивости покрытия, сжатого в направлении оси x , примем следующие допущения (задача решается в бифуркационной постановке):

- форма потери устойчивости является "плоской", т.е. дополнительные перемещения по оси z равны 0, а дополнительные перемещения в плоскости x - y не зависят от координаты z ($\Delta u_x = \Delta u_x(x, y, t), \Delta u_y = \Delta u_y(x, y, t)$);
- толщина подложки h намного превосходит толщину покрытия h_1 , так что в задаче устойчивости сечение подложки в плоскости x - y может моделироваться бесконечной полуплоскостью;
- дополнительными напряжениями $\Delta \sigma_x$, возникающими в подложке в момент потери устойчивости покрытия, можно пренебречь по сравнению с дополнительными напряжениями $\Delta \sigma_y, \Delta \sigma_z$;
- поле дополнительного перемещения $\Delta u_y(x, y)$ в подложке имеет следующий вид:

$$\Delta u_y(x, y, t) = u_0(y) \sin \frac{2\pi x}{\lambda} H(t - t_{кр}) \quad (11)$$

где $H(t)$ -функция Хэвисайда;

– при вычислении дополнительных сдвиговых деформаций $\Delta \varepsilon_{xy}$ в подложке производной $\frac{\partial \Delta u_x(x, y, t)}{\partial y}$ можно пренебречь по сравнению с производной $\frac{\partial \Delta u_y(x, y, t)}{\partial x}$.

При этих допущениях решение задачи устойчивости будет иметь следующий вид:

$$\sigma_{1x}(t_{кр}) = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{E_1 R^2(0)}{6(1-\nu_1^2)}},$$

$$\lambda_* = 2\pi h_1 \sqrt[3]{\frac{E_1}{6R(0)(1-\nu_1^2)}}, \quad (12)$$

где $\sigma_{1x}(t_{кр})$ – поперечное напряжение в покрытии в момент потери устойчивости;

λ_* – длина волны в момент потери устойчивости.

Из соотношений (9), (10), (12) следуют формулы для определения упругих характеристик покрытия (E_1, ν_1)

$$\nu_1 = 0,5 - \frac{3}{8\pi} \frac{\lambda_*}{h} \frac{(R_1 + R_\infty)(1 + 2R_\infty/E_0)}{\left[\frac{R_1 \tau_1}{1 + 2R_\infty/E_0} (1 - e^{-t_{кр}/\tau_1}) + R_\infty t_{кр} \right] \dot{\varepsilon}_0}, \quad (13)$$

$$E_1 = 6(1 - \nu_1^2)(R_1 + R_\infty) \left(\frac{\lambda_*}{2\pi h_1} \right)^3,$$

в которых $E_0 = 6(R_1 + R_\infty) \left(\frac{\lambda_*}{2\pi h_1} \right)^3 \frac{h_1}{h}$. Таким образом, если в процессе нагружения

вплоть до момента потери устойчивости деформация покрытия не превышает предела упругости, и в момент потери устойчивости производится замер длины волны λ_* и времени $t_{кр}$, то упругие характеристики покрытия могут быть определены по соотношениям (13).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №99-01-00316).

Список литературы

1. Тетерс Г.А. Длительная устойчивость цилиндрических оболочек из полиэтилена. // Механика полимеров. 1996. № 4, С. 629-632.
2. Быков Д.Л. Об учете повреждений в наполненных полимерных материалах. // Известия АН. Механика твердого тела. 1998, № 1. С. 19-28.
3. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955, 567с.
4. Ольховик О.Е. Ползучесть полиэтилена при сдвиге с наложением гидростатического давления. // Проблемы прочности. 1979, № 6. С. 68-71.
5. Волынский А.Л., Баженов С.Л., Лебедева О.В., Яминский И.В., Озерин А.Н., Бакеев Н.Ф. Явление потери устойчивости жесткого покрытия при деформировании полимера-подложки. // Высокомолекулярные соединения, Серия А, 1997, Т. 39, №11, С. 1805-1811.
6. Баженов С.Л., Волынский А.Л., Воронина Е.Е., Бакеев Н.Ф. Потеря устойчивости упругого покрытия при динамическом сжатии вязкотекучей подложки. // Доклады Академии наук, 1999, Т. 367, №1, С. 75-77.