О ЕДИНСТВЕННОСТИ УСТОЙЧИВОГО ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ОСОБЫХ ТОЧЕК

В.С. Денисов, С.И. Примакова.

В работе [1] найдены достаточные условия существования по крайней мере одного неустойчивого предельного цикла в некоторой вертикальной полосе фазовой плоскости и единственности устойчивого предельного цикла, окружающего неустойчивый, для системы нелинейных колебаний

$$\dot{x} = y + f(x), \dot{y} = q(x) \qquad (1)$$

с единственной особой точкой - началом системы координат. В статье [2] рассмотрен случай, когда система (1) имеет три особые точки. В настоящей работе найдены достаточные условия единственности устойчивого предельного цикла, охватывающего $2n_{2k}+1(n_{2k}\in N)$ особых точек, из которых 4k-1 расположены на оси абсцисс.

Пусть $f(x),q(x)$ определены, непрерывны при -∞<x<+∞ и обеспечивают существование и единственность решений системы (1), удовлетворяя условиям:

$A: f(-x) = -f(x), q(-x) = -q(x);$

$B: f(x)\rangle 0, q(x)\ge 0$ на $(x_{n_{2i-2}}; x_{n_{2i-1}}); f(x)\langle 0, q(x)\le 0$ на $(x_{n_{2i-1}}; x_{n_{2i}})$, где $i=\overline{1,k}; x_{n_0}=0; q(x)<0$ на $(x_{n_{2k}};\infty); f(x)\langle 0$ на $(x_{n_{2k}}; x_l); f(x)\rangle 0$ на $(x_l; x_{l+2}), f(x_{n_{2k}})\le 0; q(x_i)=0$ при $i=\overline{0,n_{2k}}$, где $x_0=0; f(x_l)=f(x_{l+2})=f(x_{ni})=0$ при $i=\overline{0,2k-1}$.

Все обозначения работы [3] будем считать известными.

Теорема 1. Если выполнены условия: А, В и следующие

$1)\exists x_{l+1}(x_l; x_{l+2}), \exists\gamma\ge\bar{\gamma}=\max\gamma_i\rangle 1$, такие, что выполняются неравенства:

$$\begin{aligned}
&b_i\rangle k_i(\gamma)d_i \text{ при } i=\overline{1,k};\\
&\varphi(x_{l+1})\rangle -4\gamma\cdot\varphi(x_l)/(\gamma-1)^2;\\
&G(x_{l+2})-G(x_{l+1})\rangle(\gamma\cdot M)^2/2+\gamma\cdot Mf(x_{l+1})-f^2(x_{l+1})/2;\\
&G(x_{l+2})-G(x)\rangle f^2(x) \text{ для } \forall x\in(x_{l+1}; x_{l+2});
\end{aligned} \qquad (2)$$

$2)\ \overline{\lim_{x\to\infty}}(-f(x)+G(x))=\infty, \lim_{x\to\infty}(-f(x))\rangle 0; f'(x)\le 0$ при $x\ge x_{l+1}$;

$3)m_1\langle m_2, G(x)\to+\infty$ при $x\to+\infty$,

то система (1) имеет в полосе $-x_{l+2}\le x\le x_{l+2}$ по крайней мере один неустойчивый предельный цикл, ограничивающий область, внутри которой находятся все особые точки системы, и единственный устойчивый предельный цикл, охватывающий неустойчивый.

Доказательство. При $\gamma\ge\bar{\gamma}\rangle 1$ частное $4\gamma/(\gamma-1)^2$ больше отношения $2/(\gamma-1)$, тогда из неравенства (2) следует выполнение неравенства $\varphi(x_{l+1})\rangle -2\varphi(x_l)/(\gamma-1)$ условия (1) теоремы 1 работы [4]. Остальные условия этой теоремы вытекают из условий доказываемой теоремы, поэтому существование по крайней мере двух предельных циклов, окружающих все конечные особые точки системы, следует из теоремы 1 [4]. При этом неустойчивый предельный цикл расположен в полосе $-x_{l+2}\langle x\langle x_{l+2}$. Докажем

Витебский государственный технологический университет

единственность устойчивого предельного цикла, имеющего точки вне указанной полосы фазовой плоскости. Рассмотрим две произвольные траектории системы (1) $L_j(y=y_j(x), j=1,2)$, проходящие через точки $(x_{l+2}; y_j^+(x_{l+2}))$, для которых выполняется условие

$$y_2^+(x_{l+2})\rangle y_1^+(x_{l+2})\rangle 0\,. \tag{3}$$

Полутраектории $L_j^-(t), j=1,2,$ в силу отсу тствия траекторий вида (3) [4] пересекут прямую $x=x_{l+1}$ в точках с ординатами $y=y_j^+(x_{l+1}), j=1,2.$ Из доказательства теоремы 1 [4] следует существование траектории L, проходящей через точку $(x_{l+1};\gamma\cdot M)$, которая при возрастании t выходит на прямую x = x_{l+2}, тогда в силу единственности решений и условия (3) выполняется неравенство $y_2^+(x_{l+1})\rangle y_1^+(x_{l+1})\rangle\gamma\cdot M$. Аналогично тому, как для траектории L в теореме 1 [4], доказывается, что полутраектории $L_j^-(t)$ пересекают ось ординат в точках $0;y_j^+(0))$, где $y_2^+(0)\rangle y_1^+(0)$ и при этом в силу следствия 1 [4] выполняются неравенства:

$$y_j^+(0)\rangle y_j^+(x_{n_2})\rangle ... \rangle y_j^+(x_{n_{2k}})\rangle y_j^+(x_l)\rangle y_j^+(x_{l+1})\rangle\gamma\cdot M\,. \tag{4}$$

В силу отсутствия траекторий, вдоль которых $x(t)\to+\infty, y(t)\to C(const)$ при $t\to+\infty$ (теорема 4 [4]), условия $\underline{\lim}(-f(x))\rangle 0$ при $x\to\infty$, структуры поля направлений, интегральные кривые y=y_j (x), j=1,2 пересекают изоклину бесконечности, а затем выходят на ось oy в точках $(0;y_j^-(0))$, где $y_2^-(0)\langle y_1^-(0)$ и при этом будут выполняться неравенства

$$y_j^-(0)\langle y_j^-(x_{n_{2i}})\langle ...\langle y_j^-(x_{n_{2k}})\langle y_j^-(x_l)\langle y_j^-(x_{l+1})\langle -\gamma\cdot M\,. \tag{5}$$

Производная по x от разности $y_1^+(x)-y_2^+(x)$ имеет вид

$$d/dx(y_1^+(x)-y_2^+(x)) = [q(x)(y_2^+(x)-y_1^+(x)/$$
$$/[(y_1^+(x)+f(x))(y_2^+(x)+f(x))], \tag{6}$$

откуда в силу условия В следует, что $d/dx(y_1^+(x)-y_2^+(x))\le 0(\ge 0)$ на промежутках

$$\left[x_{n_{2i-1}};x_{n_{2i}}\right], i=\overline{1,k}, [x_{n_{2k}};\infty]([x_{n_{2i-2}};x_{n_{2i-1}}]),$$

тогда выполняются равенства

$$y_1^+(x_{n_{2i}})-y_2^+(x_{n_{2i}}) = \min[y_1^+(x)-y_2^+(x)] \text{ при } x_{n_{2i-1}}\langle x\langle x_{n_{2i}}\,. \tag{7}$$

Производная функции V(x,y) по аргументу x в силу системы (1) находятся из равенства

$$dV/dx = -(f(x)q(x))/(y+f(x))\,. \tag{8}$$

В дальнейшем разность значений функции Ляпунова вдоль траектории L_j (y=y_j (x)) на отрезке [a,b] будем обозначать

$$V_j^+\Big|_a^b = V(b;y_j^+(b)) - V(a;y_j^+(a)) \text{ при } y>0 \text{ и } V_j^-\Big|_a^b \text{ при } y<0.$$

Витебский государственный технологический университет

Интегрируя равенство (8) вдоль L_1 (t) и L_2 (t) на отрезках $[x_{n_{2i-1}};x_{n_{2i}}]$ и вычитая получившиеся равенства с учетом выражения (7) и неравенства $y_j^+(x_{n_{2i}})\langle y_j^+(x)$ при $x_{n_{2i-1}}\langle x\langle x_{n_{2i}}, i=\overline{1,k}$, получим оценки:

$$V_2^+\Big|_{x_{n_{2i-1}}}^{x_{n_{2i}}} - V_1^+\Big|_{x_{n_{2i-1}}}^{x_{n_{2i}}} \langle [(y_1^+(x_{n_{2i}}) - (y_2^+(x_{n_{2i}}))(\varphi(x_{n_{2i}}) - \varphi(x_{n_{2i-1}}))] / /[(y_2^+(x_{n_{2i-1}}) - M)(y_1^+(x_{n_{2i}}) - M)] \qquad (9)$$

Аналогично получаем оценки разности значений функции Ляпунова V(x,y) вдоль траекторий L_1 и L_2 на отрезках $[x_{n_{2i-2}};x_{n_{2i-1}}],[x_{n_{2k}};x_l]$. Складывая их и учитывая неравенства (4) будем иметь:

$$V_2^+\Big|_0^{x_l} - V_1^+\Big|_0^{x_l} \langle (\varphi(x_l))/(M^2(\gamma-1)^2. \qquad (10)$$

Аналогично получению неравенства (9) доказывается с помощью (2) оценка

$$V_2^+\Big|_{x_l}^{x_{l+1}} - V_1^+\Big|_{x_l}^{x_{l+1}} \langle [(y_1^+(x_l) - y_2^+(x_l))(-\varphi(x_l))(\gamma+1)^2] / /[(y_2^+(x_l)+M)(y_1^+(x_l)+M)(\gamma-1)^2] \qquad (11)$$

Складывая неравенства (10) и (11) получим оценку

$$[V(x_{l+1};y_2^+(x_{l+1})) - V(0;y_2^+(0))] - [V(x_{l+1};y_1^+(x_{l+1})) - V(0;y_1^+(0))]\langle 0. \qquad (12)$$

Аналогично доказывается неравенство

$$[V(0;y_2^-(0)) - V(x_{l+1};y_2^-(x_{l+1}))] - [V(0;y_1^-(0)) - V(x_{l+1};y_1^-(x_{l+1}))]\langle 0. \qquad (13)$$

Так как на отрезке $[x_{l+1};x_{l+2}]$ сумма y+f(x) вдоль кривой L_2 больше y+f(x) вдоль кривой L_1, то интегрируя равенство (8) вдоль этих кривых и находя разность получающихся равенств, будем иметь оценку

$$[V(x_{l+2};y_2^+(x_{l+2})) - V(x_{l+1};y_2^+(x_{l+1}))] - [V(x_{l+2};y_1^+(x_{l+2})) - V(x_{l+1};y_1^+(x_{l+1}))]\langle 0. \qquad (14)$$

Аналогично доказывается неравенство

$$[V(x_{l+1};y_2^-(x_{l+1})) - V(x_{l+2};y_2^-(x_{l+2}))] - [V(x_{l+1};y_1^-(x_{l+1})) - V(x_{l+2};y_1^+(x_{l+2}))]\langle 0. \qquad (15)$$

Рассмотрим область σ, ограниченную контуром Г, состоящим из дуги AB кривой L_1, дуги CD кривой L_2, при $x \ge x_{l+2}$, где $A(x_{l+2};y_1^+(x_{l+2})), B(x_{l+2};y_1^-(x_{l+2})), D(x_{l+2};y_2^+(x_{l+2})), C(x_{l+2};y_2^-(x_{l+2}))$, и отрезками [AD], [CB] прямой $x=x_{l+2}$.

Применяя формулу Грина, получим оценку

$$\int_l f(x)dy = \iint_\sigma f(x)dxdy \le 0, \qquad (16)$$

Витебский государственный технологический университет

так как $f'(x) \le 0$ при $x > x_{l+2}$. Производная dV/dy вдоль траекторий системы (1) находится по формуле $dV/dy = -f(x)$, тогда

$$\int_l f(x)dy = \int_{AB} f(x)dy + \int_{CD} f(x)dy + \int_{DA} f(x)dy + \int_{BC} f(x)dy = [V(C)-V(D)]-[V(B)-V(A)],$$

откуда, в силу неравенства (16), получим оценку:

$$[V(x_{l+2}; y_2^-(x_{l+2})) - V(x_{l+2}; y_2^+(x_{l+2}))] - [V(x_{l+2}; y_1^-(x_{l+2})) - V(x_{l+2}; y_1^+(x_{l+2}))] \le 0. \quad (17)$$

Складывая неравенства (12-15) и (17), получим оценку

$$[V(0; y_2^-(0)) - V(0; y_2^+(0))] - [V(0; y_1^-(0)) - V(0; y_1^+(0))] \langle 0. \quad (18)$$

Пусть для определенности $y=y_2(x)$ - устойчивый предельный цикл, тогда в силу условия А выполняется равенство $-y_2^-(0) = y_2^+(0)$, а из вида функции Ляпунова имеем: $V(0; y_2^-(0)) = V(0; y_2^+(0))$. Из неравенства (18) следует, что значения функции $V(x;y)$ в точках $(0; y_1^-(0))$ и $(0; y_1^+(0))$ связаны соотношением $V(0; y_1^-(0)) \rangle V(0; y_1^+(0))$, откуда в силу симметрии кривых $V=c$ получим неравенство $-y_1^-(0) \rangle y_1^+(0)$ и, следовательно, $y = y_1(x)$ не является предельным циклом, т.е. устойчивый предельный цикл будет единственным.

Теорема 2. Если выполнены условия А,В,2),3) теоремы 1 и следующее: $\exists x_{l+1} \in (x_l; x_{l+2}), \exists \gamma \ge \bar{\gamma} = \max \gamma_i \rangle 1$ такие, что выполняюся неравенства

$$b_i \ge k_i(\gamma) d_i, i = \overline{1,k}, \quad (2) \text{ и } \quad G(x_{l+2}) - G(x_{l+1}) \ge (\gamma \cdot M)^2/2 + \gamma \cdot M^2,$$

то система (1) имеет в полосе $-x_{l+2} \le x \le x_{l+2}$ хотя бы один неустойчивый предельный цикл и единственный устойчивый предельный цикл, его окружающий.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кушков Н.Н. О предельных циклах системы нелинейных колебаний. Труды Ленинградского технолог. института целлюлозно-бумажной промышленности. 1962, вып.10, с.135-143.

2. Денисов В.С. Единственность предельного цикла одной автономной системы. Межвуз. сб. научных трудов. Дифференц. уравнения (качественная теория). Рязань,1984, с.34-41.

3. Денисов В.С., Примакова С.И. О некоторых свойствах траекторий системы нелинейных колебаний с конечным числом особых точек. Сб.статей:Совершенствование технологических процессов, оборудования и организации производства в легкой промышленности и машиностроении, ч.2, Минск,1994, с.64-69.

4. Денисов В.С., Примакова С.И. Об условиях существования предельных циклов одной автономной системы. В том же сб., с.69-74.

Витебский государственный технологический университет