РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В УРАВНЕНИИ ДИРАКА В ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЯХ С НЕДИАГОНАЛЬНЫМ МЕТРИЧЕСКИМ ТЕНЗОРОМ

Андрушкевич И.Е.

Введение. Необходимость объединения квантовой теории и теории гравитации предопределяет актуальность исследований общековариантных волновых уравнений. При этом существенные трудности возникают на пути поиска точных решений ковариантного обобщения уравнения Дирака (КОУД), с математической точки зрения представляющего собой систему четырех дифференциальных уравнений в частных производных. Наиболее эффективным методом получения точных решений подобных уравнений признан метод разделения переменных. Применительно к КОУД в работе [1] предложен метод коммутирующих операторов (МКО), получивший дальнейшее развитие в работах [2,3]. Однако следует признать, что обсуждаемый метод развивался, в основном, для: КОУД в случае гравитационных полей с диагональным метрическим тензором; уравнения Дирака при наличии векторных полей и гравитационного с диагональной метрикой. Но, как известно, имеющиеся решения уравнений Эйнштейна не исчерпываются гравитационными полями с диагональным метрическим тензором.

Постановка задачи. Принимаем метрику пространства-времени в виде

$$ds^2 = a(dx^1)^2 + b(dx^2)^2 + c(dx^3)^2 - d(dx^4)^2 + 2e(dx^1 dx^2), \qquad (1)$$

где a,b,c,d,e – произвольные положительно определенные функции переменных x^1,x^2,x^3,x^4, и используем следующую калибровку тетрады

$$h_\mu{}^i = \begin{vmatrix} \sqrt{\dfrac{a*b-e^2}{b}} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{e}{\sqrt{b}} & \sqrt{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{d} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Здесь греческие индексы отнесены к Риманову пространству (РП), латинские к касательному пространству Минковского (ПМ); те и другие пробегают значения от 1 до 4. Связь γ – матриц Дирака РП и ПМ (γ) устанавливается соотношениями

$$\gamma_\mu = h_\mu{}^i \tilde{\gamma}_i, \gamma^\mu = h^\mu{}_i \tilde{\gamma}, \qquad (3)$$

при этом

$$\left[\tilde{\gamma}^i, \tilde{\gamma}^j\right]_+ = 2\eta^{ij} I, \eta^{ij} = diag(1,1,1,-1), I = diag(1,1,1,1),$$

$$\left[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\right]_{+} = 2q^{\mu\nu}I = 2*\begin{vmatrix} \dfrac{b}{ab-e^2} & \dfrac{-e}{ab-e^2} & 0 & 0 \\ \dfrac{-e}{ab-e^2} & \dfrac{a}{ab-e^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d^{-1} \end{vmatrix} \qquad (4)$$

Обращаясь к общепринятому определению спинорной связности [4, 5]

$$8\Gamma_{\lambda} = q_{\mu\alpha}\left\{\partial_{\lambda}h_{\nu}^{\ k}h_{k}^{\ \alpha} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\ \ \alpha}\right\}\left\{\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right\},$$
$$\partial_{\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}, 2\Gamma_{\nu\lambda}^{\ \ \alpha} = q^{\alpha\beta}\left\{\partial_{\lambda}q_{\beta\nu} + \partial_{\nu}q_{\lambda\beta} - \partial_{\beta}q_{\nu\lambda}\right\}, \qquad (5)$$

и переходя к КОУД

$$\left\{\gamma^{\nu}(\partial_{\nu} - \Gamma_{\nu}) + m_0\right\}\psi = 0, \qquad (6)$$

имеем

$$\sqrt{\frac{b}{ab-e^2}}\tilde{\gamma}^1\left[\partial_1 + \frac{1}{4}\left(\partial_2 a - \frac{e\partial_1 b}{b}\right)\frac{e}{ab-e^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{e\partial_2 b}{b} - 2\partial_2 e + \partial_1 b\right)*\frac{a}{ab-e^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial_1(ab-e^2)}{ab-e^2}\right] +$$
$$+\left[\frac{\tilde{\gamma}^2}{\sqrt{b}} - \frac{e}{\sqrt{b}}\frac{\tilde{\gamma}^1}{\sqrt{ab-e^2}}\right]*\left[\partial_2 + \frac{1}{4}\left(\partial_2 a - \frac{e\partial_1 b}{b}\right)*\frac{b}{ab-e^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{e\partial_2 b}{b} - 2\partial_2 e + \partial_1 b\right)\frac{e}{ab-e^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial_2(ab-e^2)}{ab-e^2}\right] +$$
$$+\frac{\tilde{\gamma}^3}{\sqrt{c}}*\left[\partial_3 - \frac{1}{4}\frac{\partial_3 c}{c}\right] + \frac{\tilde{\gamma}^4}{\sqrt{d}}\left[\partial_4 - \frac{1}{4}\frac{\partial_4 d}{d}\right] + \frac{1}{4}\partial_3\left(\frac{e}{b}\right)*\frac{b}{\sqrt{ab-e^2}}*\frac{\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3}{\sqrt{c}} +$$
$$+\frac{1}{4}\partial_4\left(\frac{e}{b}\right)\frac{b}{\sqrt{ab-e^2}}\frac{\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^4}{\sqrt{d}} + m_0 * \Phi = 0,$$

$$\psi = \left\{(ab-e^2)cd\right\}^{-1/4}\Phi. \qquad (8)$$

В (6),(7) и далее скорость света С и постоянная Планка h приняты равными 1.

Уравнение (7) исследовалось на предмет разделения переменных по МКО.

Результаты исследований. МКО последовательно применялся для отработки всех возможных путей разделения переменных. В результате доказаны теоремы, аналогичные теоремам работы [1].Как их следствия получен явный вид операторов. Ввиду ограниченности объема настоящей работы результаты приведем лишь частично. 1. Для осуществления разделения переменных в уравнении (7) по схеме $x^3, x^4, (x^1, x^2)$ достаточно, чтобы компоненты метрического тензора имели вид (9)

$$a = a(x^1,x^2)e(x^3), b = b(x^1,x^2)e(x^3), c = c(x^3), d = d(x^1,x^2)e(x^3)d(x^4), e = e(x^1,x^2)e(x^3).$$

При выполнении (9) для операторов имеем

$$\hat{K}_3 = \Im\tilde{\gamma}^3\sqrt{\frac{e(x^3)}{c(x^3)}}\left[\partial_3 - \frac{\partial_3 c(x^3)}{4c(x^3)}\right] + m_0\Im\sqrt{e(x^3)}, \qquad (10)$$

$$\hat{K}_4 = \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I} \frac{\tilde{\gamma}^4}{\sqrt{d(x^4)}} \left[\partial_4 - \frac{\partial_4 d(x^4)}{4d(x^4)} \right], \tag{11}$$

$$\{\mathfrak{I}_1 \mathfrak{I} \tilde{\gamma}^1 \sqrt{\frac{bd}{ab - e^2}} \left[\partial_1 + \frac{1}{4}\left(\partial_2 a - \frac{e\partial_1 b}{b}\right) \frac{e}{ab - e^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{e\partial_2 b}{b} - 2\partial_2 e + \partial_1 b\right) \frac{a}{ab - e^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial_1 (ab - e^2)}{ab - e^2} \right] + \tag{12}$$

$$+\left(\mathfrak{I}_1 \mathfrak{I} \tilde{\gamma}^2 \sqrt{\frac{d}{b}} - e\sqrt{\frac{d}{b}}\,\frac{\mathfrak{I}_1 \mathfrak{I} \tilde{\gamma}^1}{\sqrt{ab - e^2}}\right) * \left[\partial_2 + \frac{1}{4}\left(\partial_2 a - \frac{e\partial_1 b}{b}\right) \frac{b}{ab - e^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{e\partial_2 b}{b} - 2\partial_2 e + \partial_1 b\right) \frac{e}{ab - e^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}\frac{\partial_2 (ab - e^2)}{ab - e^2} \right] + K_3 \mathfrak{I}_1 \sqrt{d(x^1, x^2)} + K_4 \}\Phi = 0,$$

где

$$\mathfrak{I} = \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^2 \tilde{\gamma}^4 ; \mathfrak{I}_1 = \tilde{\gamma}^4 , \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^2 , \tilde{\gamma}^3 \tilde{\gamma}^4 , \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^2 \tilde{\gamma}^3 , \tag{13}$$

2. Для осуществления полного разделения переменных в уравнении (7) методом коммутирующих операторов достаточно, чтобы компоненты метрического тензора, помимо условий (9), удовлетворяли дополнительным требованиям (14)

$$a(x^1, x^2) = a(x^1)a(x^2), e(x^1, x^2) = e(x^1)e(x^2), a(x^1) = e^2(x^1), d(x^1, x^2) = d(x^2), b(x^1, x^2) = b(x^2).$$

При этом операторы имеют вид

$$\hat{K}_3 = \mathfrak{I}\tilde{\gamma}^3 \sqrt{\frac{a(x^3)}{c(x^3)}} \left[\partial_3 - \frac{\partial_3 c(x^3)}{4c(x^3)} \right] + m_0 \mathfrak{I}\sqrt{a(x^3)}, \tag{15}$$

$$\hat{K}_4 = \mathfrak{I}_1 \frac{\tilde{\gamma}^4}{\sqrt{d(x^4)}} \left[\partial_4 - \frac{\partial_4 d(x^4)}{4d(x^4)} \right], \tag{16}$$

$$\hat{K}_1 = \mathfrak{I}_2 \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I} \frac{\tilde{\gamma}^1}{\sqrt{a(x^1)}} \left[\partial_1 - \frac{\partial_1 a(x^1)}{4a(x^1)} \right],$$

$$\hat{K}_2 = \mathfrak{I}_2 \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I} \left(\tilde{\gamma}^2 \sqrt{\frac{a(x^2)b(x^2) - e^2(x^2)}{b^2(x^2)}} - \tilde{\gamma}^1 \frac{e(x^2)}{b(x^2)} \right) * \partial_2 + \frac{1}{a(x^2)b(x^2) - e^2(x^2)} *$$

$$\frac{1}{4}\left(b(x^2)\partial_2 a(x^2) + e(x^2)\left[\frac{e(x^2)\partial_2 b(x^2)}{b(x^2)} - 2\partial_2 e(x^2) \right] - \partial_2\left(a(x^2)b(x^2) - e^2(x^2)\right) \right) +$$

$$+\sqrt{\frac{a(x^2)b(x^2) - e^2(x^2)}{b(x^2)}} \left(K_3 \mathfrak{I}_2 \mathfrak{I}_1 - \mathfrak{I}_2 \frac{K_4}{\sqrt{d(x^2)}} \right) + \frac{\mathfrak{I}_2 \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I} \tilde{\gamma}^1}{4(a(x^2)b(x^2) - e^2(x^2))} *$$

$$* \left[e(x^2)\partial_2 a(x^2) + a(x^2)\left(\frac{e(x^2)\partial_2 b(x^2)}{b(x^2)} - 2\partial_2 e(x^2) \right) \right],$$

$$\mathfrak{I} = \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^2 \tilde{\gamma}^4 ; \mathfrak{I}_1 = \tilde{\gamma}^4 ; \mathfrak{I}_2 = \tilde{\gamma}^2 , \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^4 ;$$

$$\Im_1 = \tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2; \Im_2 = \tilde{\gamma}^2, \tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^4, \tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3, \tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^4;$$

$$\Im_1 = \tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^4; \Im_2 = \tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^4, \tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3;$$

$$\Im_1 = \tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3; \Im_2 = \tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^4, \tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^4$$

Заключение. Если говорить о необходимых и достаточных условиях разделения переменных в уравнении (7) методом коммутирующих операторов, то они имеют вид, аналогичный (9).

Анализ работ, посвященных развитию МКО, а также результаты настоящих исследований, позволяют сделать предположение о том, что МКО может быть эффективным только в том случае, когда компоненты метрического тензора имеют вид

$$q_{\mu\nu}(x^1, x^2, x^3, x^4) = (q(x^1)q(x^2)q(x^3)q(x^4))_{\mu\nu}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1.Андрушкевич И.Е., Шишкин Г.В. О критериях разделимости переменных в уравнении Дирака в гравитационных полях. ТМФ. No 2. 1987. C. 289.

2.Shishkin G.V., Andrushkevich I.E. The Variables Separation in the General Relativity Dirac Equation.Abstracts of Contributed Papers 11-th International Conference on the General Relativity and Gravitation. Stockholm. Sweden. July, 6-12. 1986. V.2, p.434.

3.Шишкин Г.В. Алгебраический метод разделения переменных в общековариантном уравнении Дирака. В кн: Гравитация и электромагнетизм. Мн. Университетское. 1989. C.156.

4.Fock V.A. Geometrisierung der Diracsche Teorie des Elektrons. Z.Phys.1929. Bd.57. N 3-4. S.261.

5.Bergmann P.G. Two-Component Spinors in General Relati- vity. Phys.Rev. 1957. Vol.107.N2. P.624.