

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
Учреждение образования  
«Витебский государственный технологический университет»

В. Н. Сакевич, Г. Н. Федосеев

## **Механика деформирования и разрушения**

Курс лекций

для студентов специальности 1-55 01 03 «Компьютерная мехатроника»

Витебск  
2020

УДК 539.3/6(075.8)  
ББК 22.251  
С 15

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор кафедры «Информационные системы и автоматизация производства»  
Сункуев Б.С.;  
кандидат технических наук, доцент, старший научный сотрудник ГНУ «Институт технической акустики НАН Беларуси» Кулак М.М.

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом УО «ВГТУ», протокол № 6 от 19.06.2020.

**Сакевич, В. Н.**

С 15

Механика деформирования и разрушения: курс лекций / В. Н. Сакевич, Г. Н. Федосеев. – Витебск: УО «ВГТУ», 2020. – 172 с.  
ISBN 978-985-481-651-7

В курсе лекций рассмотрены основные положения теории напряженно-деформированного состояния упругого тела; диаграммы деформирования и их схематизация; модели пластичности и ползучести; статического и длительного, усталостного и малоциклового разрушения; теория разрушения по Гриффитсу, теория напряженно-деформированного состояния у вершины трещины, понятие о коэффициенте интенсивности напряжений, критерии разрушения твердых тел, теория роста трещин, усталостные разрушения тел с трещинами.

УДК 539.3/6 (075.8)  
ББК 22.251

ISBN 978-985-481-651-7

© УО «ВГТУ», 2020

## Содержание

ВВЕДЕНИЕ .....	4
Лекция 1. Напряжения.....	8
Лекция 2. Главные напряжения.....	15
Лекция 3. Плоское напряженное состояние.....	18
Лекция 4. Замечательные площадки с касательными напряжениями	24
Лекция 5. Деформации .....	29
Лекция 6. Тензор деформаций .....	33
Лекция 7. Зависимости между напряжениями и деформациями...	38
Лекция 8. Плоское деформированное состояние.....	46
Лекция 9. Плоское напряженное состояние.....	51
Лекция 10. Задача Кирша.....	56
Лекция 11. Диаграмма деформирования.....	61
Лекция 12. Истинные диаграммы деформирования и их схематизация.....	70
Лекция 13. Ползучесть, длительная прочность, усталость.....	75
Лекция 14. Модели пластичности.....	87
Лекция 15. Модель ползучести.....	95
Лекция 16. Модели разрушения.....	101
Лекция 17. Модели усталостного и малоциклового разрушения..	115
Лекция 18. Механика разрушения.....	122
Лекция 19. Теория разрушения Гриффитса .....	126
Лекция 20. Напряжённое состояние у вершины трещины.....	132
Лекция 21. Коэффициент интенсивности напряжений.....	137
Лекция 22. Критерии разрушения твердых тел .....	143
Лекция 23. Разрушение упругого тела с трещиной .....	150
Лекция 24. Поправка Ирвина.....	156
Лекция 25. Рост трещин при докритических нагрузках .....	161
Лекция 26. Усталостные трещины.....	164
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	171

## ВВЕДЕНИЕ

Каждые 5–7 лет рождаются новые поколения машин, новые конструкционные материалы, разрабатываются новые технологические процессы. База технического прогресса – поразительно быстрое развитие вычислительной техники. С её применением создаются математические модели изделий и технологий, оптимизируются их характеристики. Изделия становятся сложнее, растут требования к их надёжности и долговечности. Под надёжностью понимается способность изделий безотказно отвечать своему назначению, сохраняя требуемые показатели в течение определённого срока службы – ресурса. Ресурс часто определяется числом циклов нагружений. Отказ связан с разрушениями изделия или его недопустимой деформацией.

Требования долговечности и надёжности призваны удовлетворить механике деформирования и разрушения. Как всякая инженерная наука она опирается на опыт и экспериментальные исследования. Её математический аппарат заимствуется из математических наук, в их числе теоретическая механика (механика абсолютно твёрдого тела) и механика твёрдого деформируемого тела (теории упругости, пластичности, ползучести).

Структура модели прочностной надёжности элементов конструкции приведена на рисунке 1.

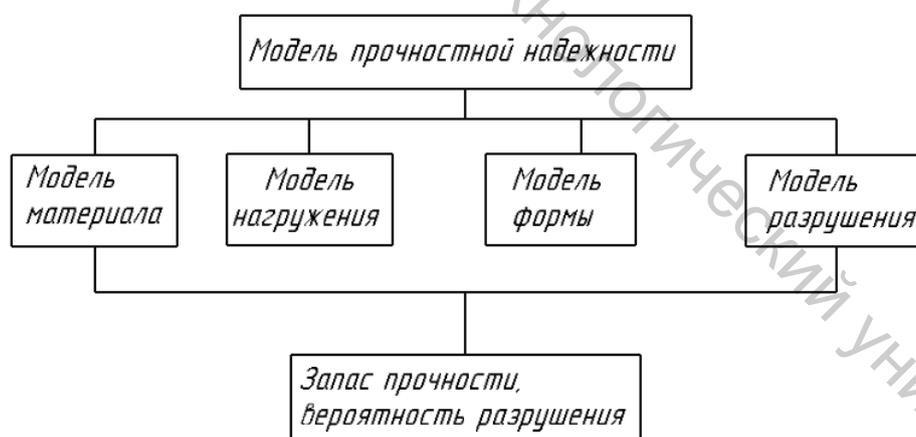


Рисунок 1 – Структура модели прочностной надёжности

### Запас прочности

Основная характеристика надёжности – вероятность безотказной работы изделия

$$p = \frac{m}{n}, \quad (1)$$

где  $m$  – число испытаний, в которых наблюдалась безопасная служба изделия,  $n$  – общее число испытаний. Вероятность разрушения

$$F = 1 - p. \quad (2)$$

Нахождение вероятностей (1, 2) чрезвычайно сложная задача. Основной метод оценки прочностной надежности в настоящее время – определение запасов прочности

$$s = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma_{\text{max}}},$$

где  $\sigma_{\text{пред}}$  – предельное значение параметра, отвечающее отказу изделия,  $\sigma_{\text{max}}$  – его наибольшее значение в рабочих условиях. Условие надежности

$$s \geq [s],$$

( $[s]$  – допустимое значение запаса прочности). При действии постоянных нагрузок обычно полагают  $[s] = 1,3 \dots 2$ , при переменных нагрузках случайного характера  $[s] = 3 \dots 5$ . Понятно, что допустимые  $[s]$  назначают, учитывая опыт создания подобных конструкций.

## Модель материала

В качестве материалов конструкций используются, в основном, металлы и их сплавы; полимеры и пластмассы, керамика, композиты, состоящие из высокопрочных нитей стекла, бора, углерода и связующего (полимеров и металлов). В строительстве используются бетон (смесь каменных частиц с цементом), железобетон (бетон, армированный стальными стержнями).

Металлы имеют кристаллическое строение – регулярную структуру, в которой размещены (в определенном порядке) атомы веществ. Физические модели, представляемые кристаллическими решетками, рассматриваются в физике твердого тела. Реальные металлы и их сплавы имеют зернистое строение, ибо образование кристаллов при охлаждении сплава происходит неравномерно, росту всякого из них препятствуют соседи. Инженерно-физические модели рассматривают материал как совокупность зерен-кристаллов с различной ориентацией.

Наконец, инженерная модель полагает материал сплошной средой (смесь дискретных структурных элементов заменяется «осредненной» непрерывной средой). Модель сплошной среды позволяет широко использовать методы математического анализа. Физические свойства, присущие в той или иной мере всем конструкционным материалам, учитывают, наделяя их упругостью, пластичностью, ползучестью. Упругое тело полностью восстанавливает свои размеры и форму после снятия внешней (деформирующей) нагрузки. Пластичное тело сохраняет после снятия нагрузки полученную деформацию (полностью или частично). При ползучести деформация тела нарастает при постоянной внешней нагрузке. Пример тому: осадка фундаментов под действием тяжести, ослабление со временем затяжки болтов.

### Модель формы

С целью изучить напряженно-деформированное состояние элементов конструкций приходят к схематизированным моделям их формы. Основные: стержни, пластинки, оболочки, массивы (рис. 2).

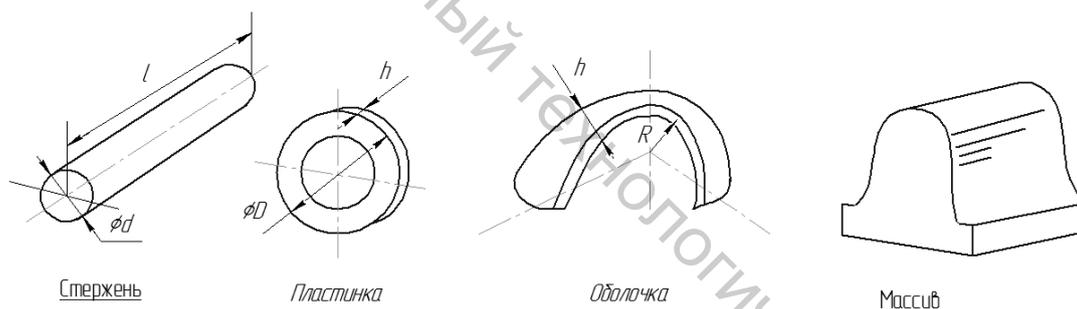


Рисунок 2 – Основные модели формы

Стержень получается, если плоскую фигуру (поперечное сечение) продвинуть вдоль продольной оси, сохраняя их взаимную перпендикулярность, его длина  $l \gg d$ . В случае пластинки  $h \ll D$ , в случае оболочки  $h \ll R$ . В массиве все размеры одного порядка. Реальные элементы конструкций могут быть представлены сочетаниями форм на рисунке 2.

### Модели нагружения

Внешние силы могут быть представлены в трех вариантах: сосредоточенные силы, распределенные по поверхности силы, объемные (массовые) силы, действующие на каждую частицу

материала. Сосредоточенные силы действуют на небольших участках поверхности детали (примеры: давление шарика подшипника качения на его кольца, давление колеса на рельс). Распределенные силы действуют на значительных участках поверхности (примеры: давление воздуха на крыло самолета, давление жидкости на стенки сосуда). Примеры объемных сил: сила тяжести, сила инерции.

В приближенных моделях учитываются только наиболее опасные для прочности нагрузки. В уточненных моделях берется в расчет вся история нагружения. Нагрузки разделяют на стационарные (постоянные, статические) и нестационарные (переменные). Статическая нагрузка возрастает от нуля до конечной величины и в дальнейшем остается постоянной. Наиболее важен класс нестационарных нагружений – циклические нагрузки. Если нагружение не превышает  $10^4 \dots 10^5$  циклов, оно называется малоцикловым. В малоцикловых нагружениях частоты колебаний нагрузки составляют  $10^2 \dots 10^4 \text{ с}^{-1}$ . Часто встречаются ударные нагружения, происходящие с высокой скоростью роста нагрузки (пример: взрывные нагружения).

### **Модели разрушения**

Модели разрушения – уравнения, или условия, связывающие параметры работоспособности изделия в момент разрушения с параметрами, обеспечивающими прочность, – условия прочности. Обычно рассматривают статическое, длительное статическое, малоцикловое, усталостное разрушения. При малом числе циклов нагружения ( $N < 10^2$ ) развиваются серьезные пластические деформации (статическое разрушение), при большом числе циклов ( $N > 10^5$ ) пластические деформации отсутствуют (усталостное разрушение). В области  $10^2 < N < 10^5$  разрушение носит смешанный характер (малоцикловое разрушение). При высоких температурах важны не только усилия, но и время их действия, – рассматривается длительная прочность.

Твердые тела разрушаются повсеместно полностью или частично из-за наличия распространяющихся в них трещин. 20 век отмечен рождением и стремительным развитием механики разрушения.

# Лекция 1

## Напряжения

### 1.1 Понятие о напряжениях

Пусть элемент конструкции на рисунке 1.1 находится в равновесии под действием некоторых внешних сил. Мысленно рассечем его некоторой плоскостью  $P$  и укажем на ней точку  $B$  и ее окрестность площадью  $A$ . На площадку  $A$  действует внутренняя сила  $F$ . Среднее напряжение в пределах площадки  $A$

$$P_{cp} = \frac{F}{A}. \quad (1.1)$$

Найдем предел отношения (1.1) при стягивании контура площадки к точке  $B$  — он называется напряжением в точке  $B$ :

$$P \equiv \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{\partial F}{\partial A}. \quad (1.2)$$

Проведя через точку  $B$  другую плоскость, обнаружим в точке  $B$  другое напряжение.

Совокупность всех напряжений на всех площадках, проведенных через точку, образует напряженное состояние в точке.

Рассматривать напряжения на пучке площадок неудобно. Удобнее проводить площадки внутри бесконечно малого элемента, окружающего точку. Напряжение на любой такой площадке можно определить, если известны напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадках. Полное напряжение (1.2) на любой из них представляют тремя составляющими — нормальным напряжением и двумя касательными. Первое  $\sigma$  на рисунке — мера сопротивления материала отрывку левой части элемента конструкции от правой; второе, пока не разложенное на составляющие,  $\eta$  на рисунке 1.1 — мера сопротивления материала сдвигу по плоскости  $P$ .

### 1.2 Закон парности касательных напряжений

Всякий элемент тела на рисунке 1.1, находящейся в равновесии, сам находится в равновесии. В частности, суммы моментов сил, действующих на элемент, относительно осей  $x, z, y$  равны нулю. При

этом силы на гранях элемента найдем, умножая напряжения на площади граней.

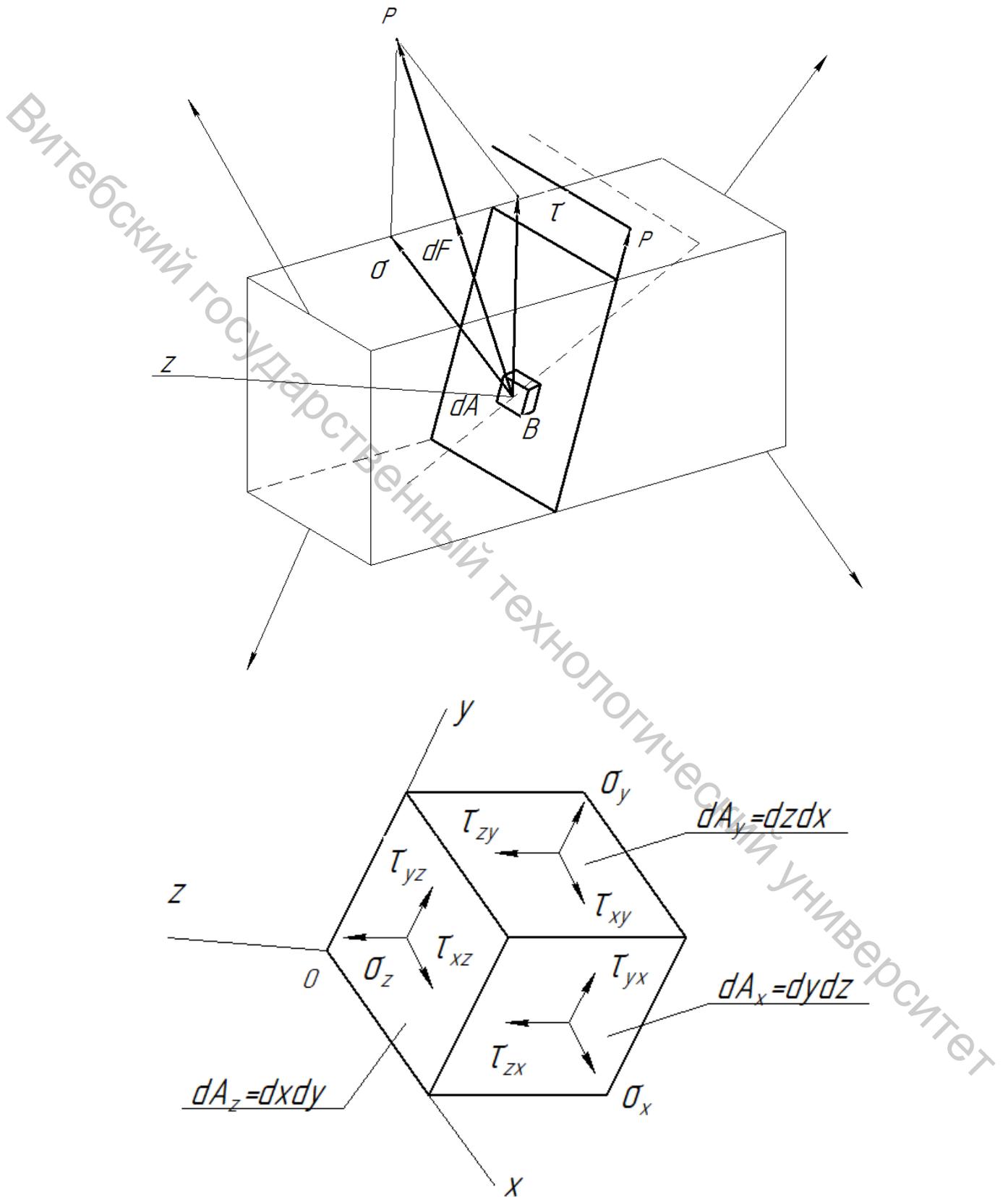


Рисунок 1.1 – Напряженное состояние в точке

Напишем уравнение моментов относительно, например, оси  $x$ :

$$\begin{aligned} \sum m_x = 0, \quad (\tau_{zy}dA_y)dy - (\tau_{yz}dA_z)dz = 0, \\ (\tau_{zy} - \tau_{yz})dxdydz = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Откуда следует равенство

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}. \quad (1.4)$$

Заметим: здесь нет моментов пар, образованных силами  $\tau_{yx}dA_x, \tau_{xy}dA_y, \tau_{zx}dA_x, \tau_{xz}dA_z$ , их векторные моменты перпендикулярны оси  $x$ . Нет и моментов объемных сил – их учет приводит к появлению в сумме (1.3) бесконечно малой высшего порядка (ее вычеркивают).

Записывая теперь уравнения моментов относительно осей  $y$  и  $z$ , получим еще два равенства касательных напряжений, аналогичных равенству (1.4).

Как уже говорилось, задание напряжений на гранях элемента на рисунке 1.1 позволяет найти напряжения на любой площадке, проходящей внутри элемента. Задать эти напряжения (на исходных гранях) можно, записывая матрицу

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

В силу закона парности касательных напряжений матрица (1.5) (или тензор напряжений  $T_\sigma$ ) симметрична.

### 1.3 Напряжения на произвольной площадке

При выводе закона парности касательных напряжений (1.4), действующих на взаимно перпендикулярных гранях элемента на рисунке 1.1, неявно предполагалось, что напряжения на бесконечно близких параллельных гранях равны. Действительно, учет бесконечно малых отличий этих напряжений друг от друга, на рисунке 1.2, приведет в уравнениях равновесия отсеченной части элемента (рис. 1.3) к бесконечно малым высших порядков.

Любая площадка, находящаяся внутри элемента – окрестности точки  $B$  (рис. 1.2), может считаться проходящей через точку  $B$ .

Мысленно рассежем элемент на рисунке 1.1 произвольной плоскостью и рассмотрим равновесие отсеченной части (рис. 1.3).

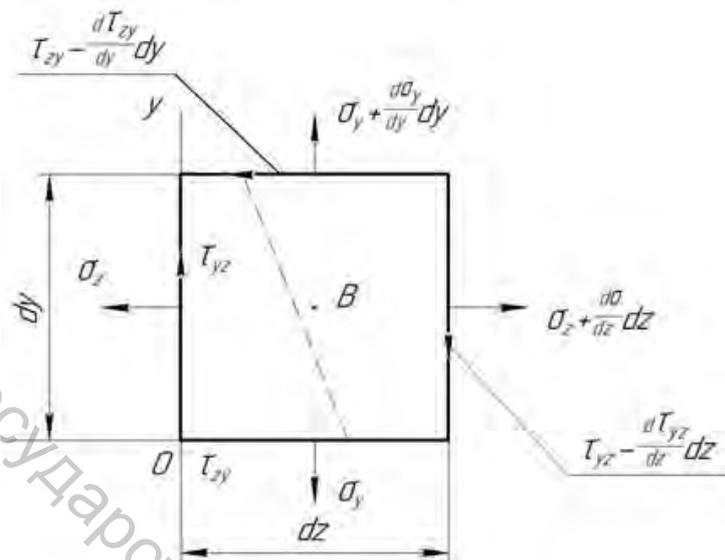


Рисунок 1.2 – Напряжения на параллельных площадках элемента (рис. 1.1)

Уравнение проекций на ось  $x$

$$P_x dA - \sigma_x dA_x - \tau_{xy} dA_y - \tau_{xz} dA_z = 0, \quad (1.6)$$

где площади граней отсеченной части элемента

$$dA_x = dAl, \quad dA_y = dAm, \quad dA_z = dAn, \quad (1.7)$$

( $dA$  – площадь наклонной грани тетраэдра;  $l, m, n$  – направляющие косинусы нормали  $\vec{n}$  к площадке  $dA$ ). Вводя в уравнение (1.6) площади (1.7), выразим проекцию полного напряжения  $\vec{P}$  на ось  $x$  через напряжения на исходных площадках  $dA_x, dA_y, dA_z$  – компоненты тензора напряжений (1.5), параллельные оси  $x$ :

$$P_x = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n. \quad (1.8)$$

Добавим к выражению (1.8) два аналогичных соотношения:

$$P_y = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n, \quad (1.9)$$

$$P_z = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n.$$

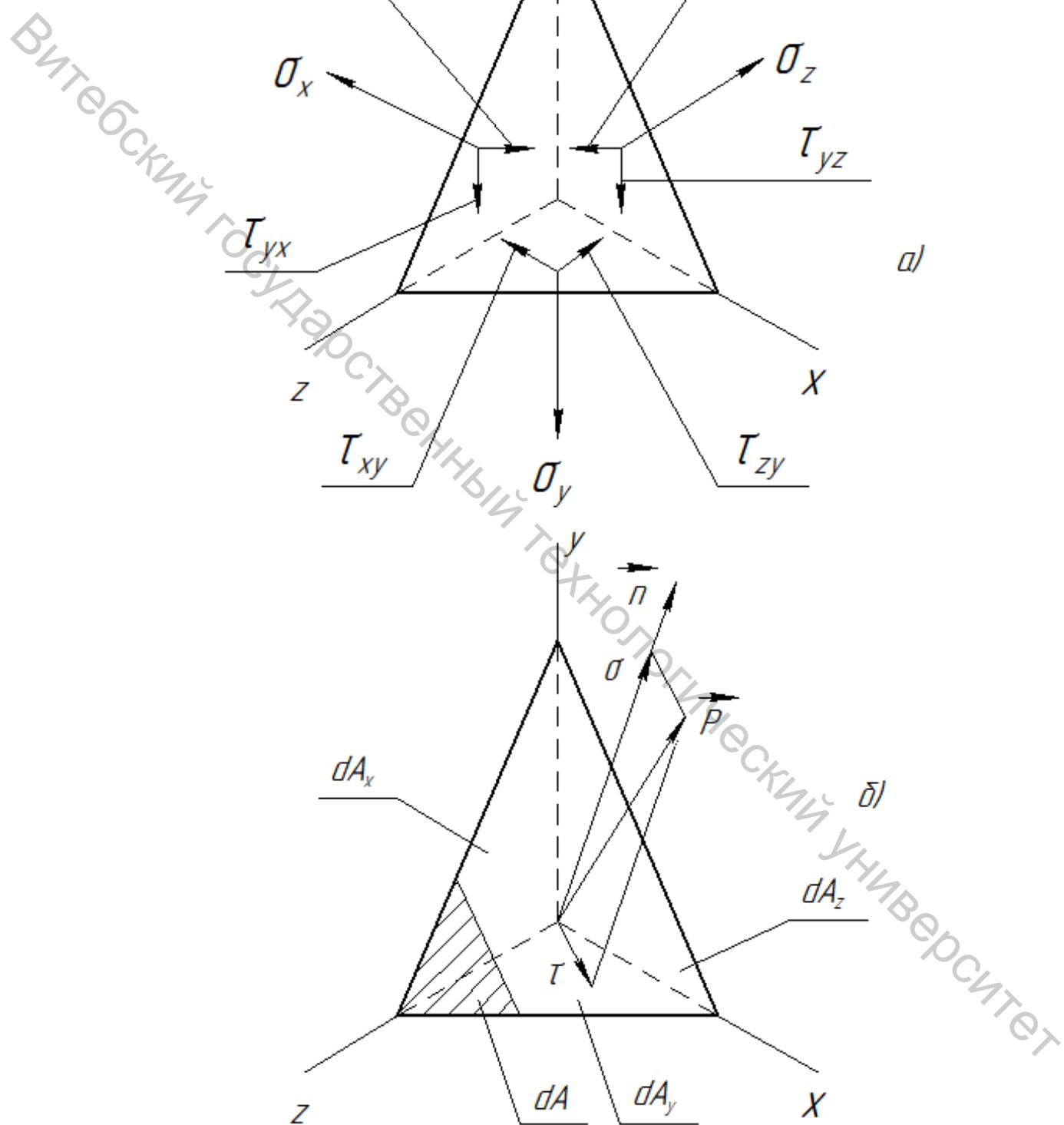


Рисунок 1.3 – а) напряжения на исходных площадках;  
 б) напряжения на произвольной площадке – наклонной грани тетраэдра

Написанные равенства можно переписать, используя матричные представления векторов  $\vec{P}$  и  $\vec{n}$  и тензора  $T_\sigma$  (1.5):

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = T_\sigma \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

Матрица – столбец и матрица  $T_\sigma$  в представлении (1.10) «перемножаются» по правилу «строка на столбец».

Проектируя теперь вектор  $\vec{P}$  (рис. 1.3), представленный проекциями (1.8–1.9), на нормаль  $n$  к площадке  $dA$ , найдем нормальное напряжение на ней:

$$\begin{aligned} \sigma &= p_x l + p_y m + p_z n = \\ &= \sigma_x l^2 + \tau_{xy} ml + \tau_{xz} nl + \\ &\quad \tau_{yx} lm + \sigma_y m^2 + \tau_{yz} nm + \\ &\quad \tau_{zx} ln + \tau_{zy} mn + \sigma_z n^2, \end{aligned}$$

или

$$\sigma = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl. \quad (1.11)$$

Используя далее выражения (1.8–1.9) и (1.11), определяем касательное напряжение на площадке  $dA$ :

$$\tau = \sqrt{p^2 - \sigma^2}. \quad (1.12)$$

### 1.3 Дифференциальные уравнения равновесия

При рассмотрении бесконечно близких точек уже нельзя пренебречь бесконечно малыми отличиями напряжений в этих точках, т. е. на параллельных площадках элементов, «вырезанных» в этих точках, соприкасающихся друг с другом, а также объемными силами, например, силами тяжести, инерции и т. п. Уравнение проекций сил, действующих на элемент, на ось  $x$  (рис. 1.4).

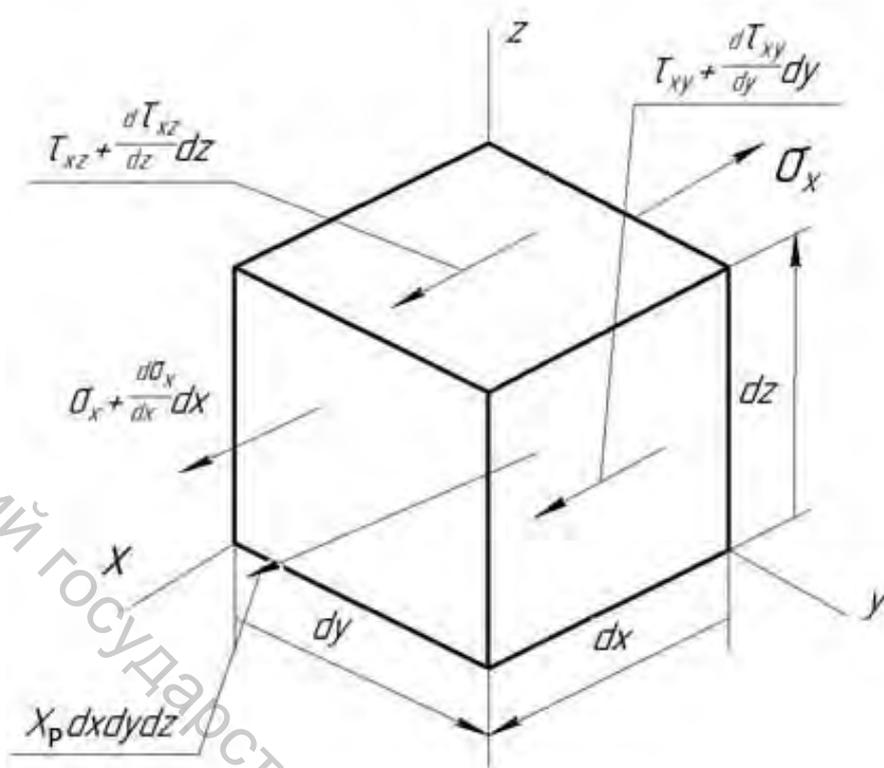


Рисунок 1.4 – Напряжения и объемные силы, параллельные оси  $x$

$$\left(\sigma_x + \frac{\delta\sigma_x}{\delta x} dx\right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{xy} + \frac{\delta\tau_{xy}}{\delta y} dy\right) dx dz - \tau_{xy} dx dz + \left(\tau_{xz} + \frac{\delta\tau_{xz}}{\delta z} dz\right) dx dy - \tau_{xz} dx dy + X_p dx dy dz = 0,$$

или

$$\frac{\delta\sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta\tau_{xy}}{\delta y} + \frac{\delta\tau_{xz}}{\delta z} = -X_p. \quad (1.13)$$

К уравнению (1.13) присоединяются еще два уравнения равновесия

$$\frac{\delta\tau_{yx}}{\delta x} + \frac{\delta\sigma_y}{\delta y} + \frac{\delta\tau_{yz}}{\delta z} = -Y_p, \quad (1.14)$$

$$\frac{\delta\tau_{zx}}{\delta x} + \frac{\delta\tau_{zy}}{\delta y} + \frac{\delta\sigma_z}{\delta z} = -Z_p.$$

В уравнениях (1.13, 1.14)  $X, Y, Z$  – объемные силы, отнесенные к единице массы,  $p$  – плотность материала.

## Лекция 2 Главные напряжения

### 2.1 Главное напряжение

На произвольной площадке (рис. 1.3) существуют нормальные и касательные напряжения. Найдем площадку, на которой нет касательных напряжений – главную площадку. Нормальные напряжения на ней

$$\sigma = p, p_x = \sigma l, p_y = \sigma m, p_z = \sigma n,$$

что вкупе с выражениями (1.8–1.9) дает систему линейных однородных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}(\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n &= 0, \\ \tau_{yx}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n &= 0, \\ \tau_{zx}l + \tau_{zy}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0,\end{aligned}\tag{2.1}$$

относительно направляющих косинусов нормали к главной площадке.

Ненулевое решение системы (2.1) гарантировано, ибо

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1.\tag{2.2}$$

Следовательно, определитель системы (2.1) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0.\tag{2.3}$$

Уравнение (2.3) называется характеристическим уравнением тензора напряжений (1.5). Будучи развернутым, он даст кубическое уравнение, имеющее, очевидно, один действительный корень.

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0,\tag{2.4}$$

используя его в уравнениях (2.1), будем располагать системой с определителем, равным нулю, т.е. системой линейно зависимых уравнений. Два из них будут (в общем случае) линейно независимыми. Присоединяя к ним нелинейное уравнение (2.2), получим, в целом, нелинейную систему относительно направляющих косинусов нормали к искомой главной площадке с нормальным напряжением – корнем характеристического уравнения (2.4).

## 2.2 Инварианты напряженного состояния

Действительный корень уравнения (2.4), т.е. главное (нормальное) напряжение, не зависит от выбора осей координат. Следовательно, от этого выбора не зависят коэффициенты уравнения. При изменении осей координат, например, при их воображаемом вращении компоненты тензора (1.5), разумеется, изменяются, но коэффициенты характеристического уравнения остаются неизменными. Такие величины называют инвариантами системы координат.

Найдем их, развертывая определитель в уравнении (2.3):

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_z & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix}, \quad (2.5)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

## 2.3 Главные напряжения тензора напряжений

Пусть взаимно перпендикулярные грани элемента на рисунке 1.1 выбраны так, что одна из них найденная главная. Положим ось  $x$  перпендикулярно к ней. Тогда напряжения на ней

$$\sigma_x \neq 0, \tau_{yx} = 0, \tau_{zx} = 0.$$

Коэффициенты (2.5) характеристического уравнения тензора (1.5)

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = I_1 = \sigma_x + (\sigma_y + \sigma_z),$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y = (\sigma_y \sigma_z - \tau_{yz}^2) + \sigma_x (\sigma_y + \sigma_z), \quad (2.6)$$

$$I_3 = \sigma_x \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x (\sigma_y \sigma_z - \tau_{yz}^2).$$

Поскольку  $\sigma_x$  – корень уравнения (2.4), левая часть уравнения делится без остатка на разность  $(\sigma - \sigma_x)$ , т. е. множитель  $(\sigma - \sigma_x)$  может быть вынесен из левой части уравнения. Уравнение (2.4) с коэффициентами (2.6) приводятся к виду

$$(\sigma - \sigma_x) [\sigma^2 - (\sigma_y + \sigma_z)\sigma + (\sigma_z \sigma_y - \tau_{yz}^2)] = 0,$$

что дает квадратное уравнение

$$\sigma^2 - (\sigma_y + \sigma_z)\sigma + (\sigma_z \sigma_y - \tau_{yz}^2) = 0. \quad (2.7)$$

Корни уравнения (2.7) действительны.

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y + \sigma_z}{2}\right)^2 - (\sigma_z \sigma_y - \tau_{yz}^2)} = \\ &= \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + 4\tau_{yz}^2}. \end{aligned}$$

Они отвечают паре главных площадок. В силу закона парности касательных напряжений эти площадки взаимно перпендикулярны.

Итак, произвольное напряженное состояние сводится к растяжению – сжатию в трёх взаимно перпендикулярных направлениях. Соответствующие нормальные (главные) напряжения принято нумеровать в порядке убывания:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (2.8)$$

### Лекция 3 Плоское напряженное состояние

#### 3.1 Главные напряжения в плоском напряженном состоянии

В плоском напряженном состоянии (ПНС) найдется хотя бы одна площадка, свободная от напряжений, – она же одна из главных площадок. На рисунке 3.1 показаны исходные площадки ПНС.

Положено  $\sigma_x = \sigma_z = 0$ .

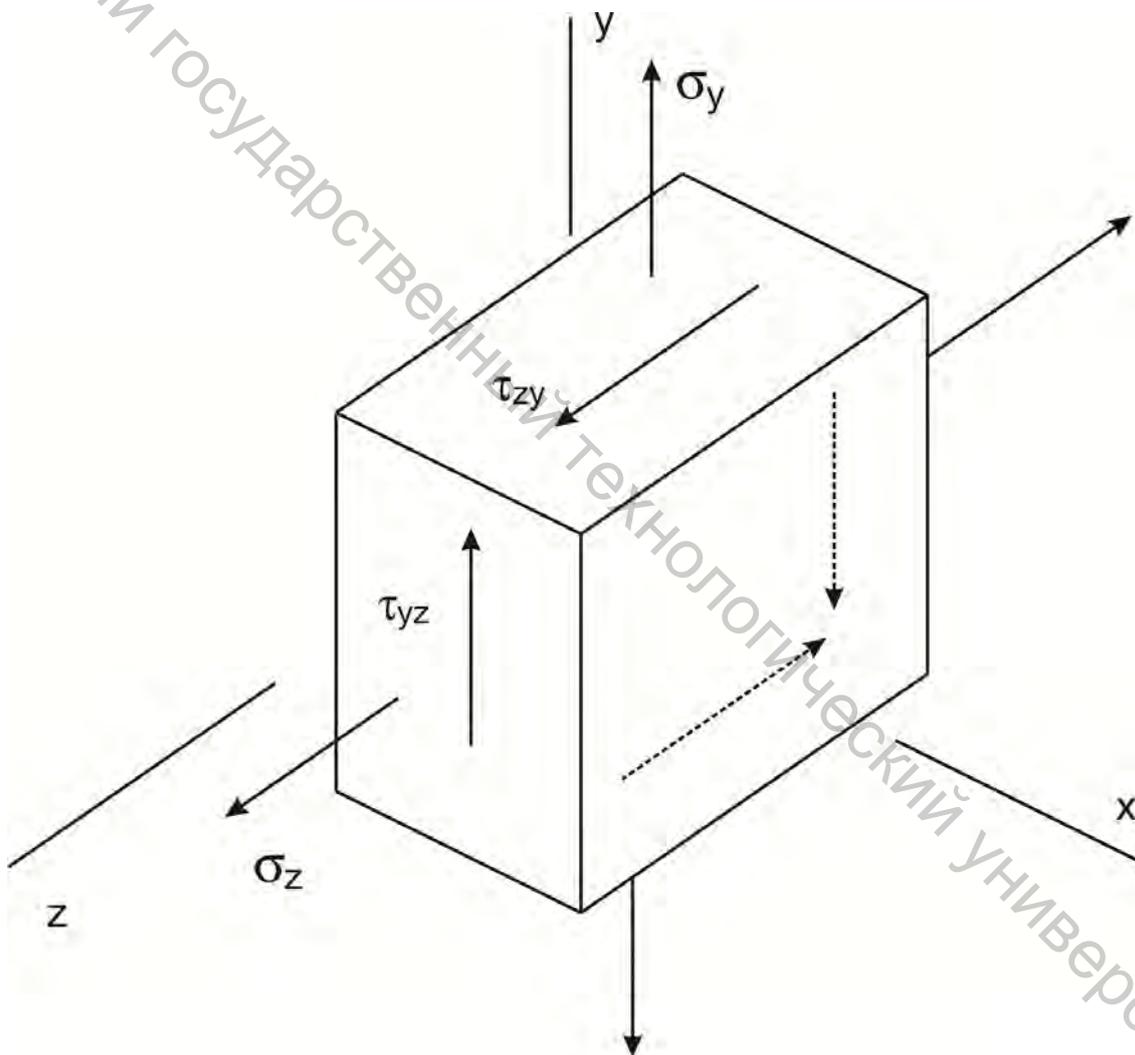


Рисунок 3.1 – Плоское напряженное состояние: исходные площадки

Главные напряжения – корни характеристического уравнения (2.7) располагаются в порядке (2.8):  $\sigma_1 \geq \sigma_2 > \sigma_3$ . Они показаны на рисунке 3.2 а.

### 3.2 Напряжения на произвольной площадке

Пусть за исходные площадки выбраны главные площадки (рис. 3.2). Нормальные напряжения на произвольной площадке (1.11) с направляющими косинусами нормали  $n$ .

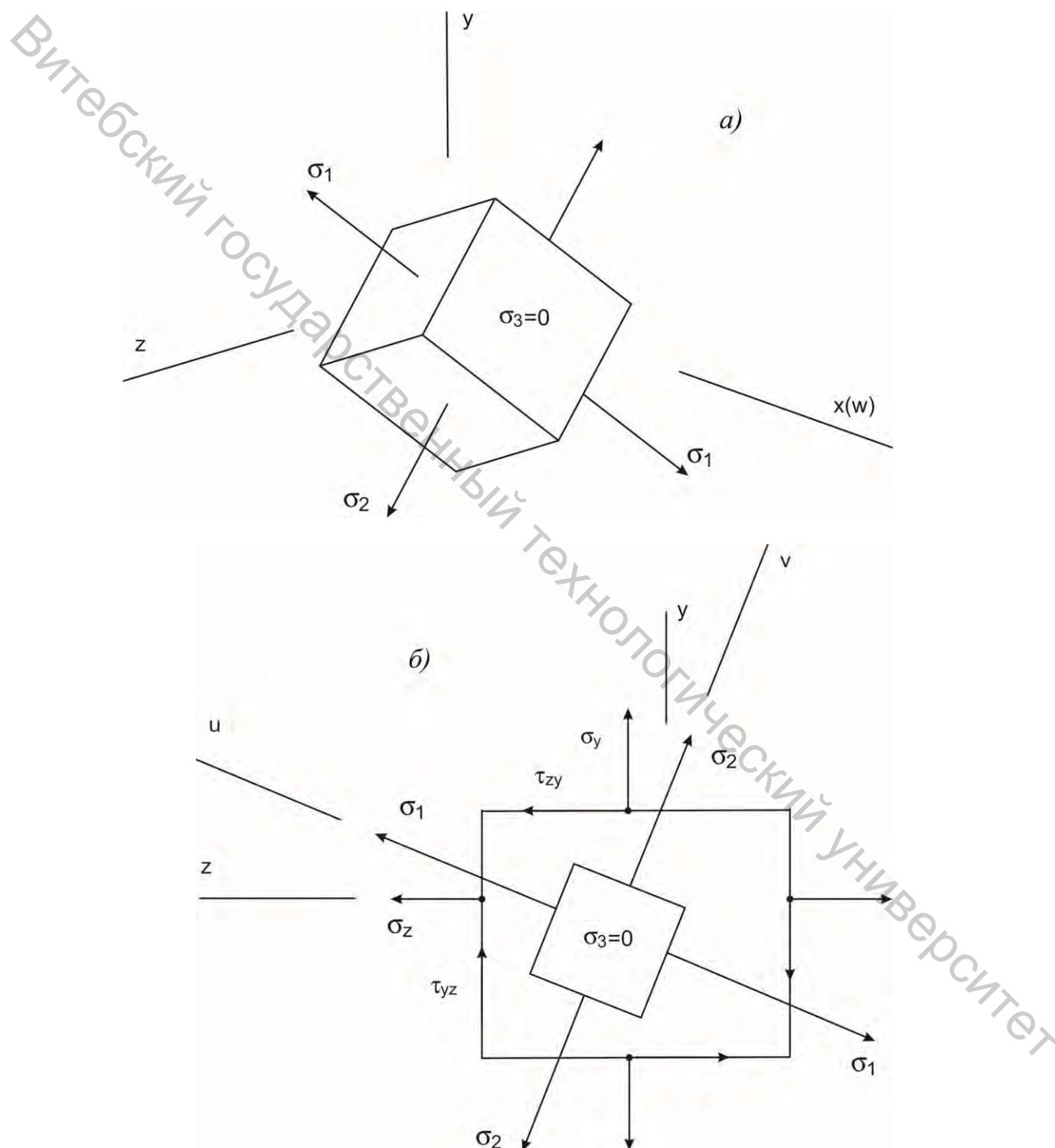


Рисунок 3.2 – а) главные напряжения на главных площадках;  
б) вид с конца оси  $x(w)$

$$l = \cos(n, u), \quad m = \cos(n, v), \quad n = \cos(n, \omega),$$

удовлетворяющими условию (2.2)

$$\begin{aligned} l^2 + m^2 + n^2 &= 1, \\ \sigma &= \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Иначе

$$\sigma = \sigma_1(1 - m^2 - n^2) + \sigma_2 m^2 = \sigma_1 - (\sigma_1 - \sigma_2)m^2 - \sigma_1 n^2 \leq \sigma_1. \quad (3.2)$$

Итак, согласно неравенствам (3.1–3.2) нормальное напряжение на произвольной площадке в ПНС не превосходит наибольшего главного напряжения  $\sigma_1$  и не меньше наименьшего  $\sigma_3$  (здесь равного нулю). Этот вывод справедлив и в общем случае произвольного напряженного состояния.

Полное напряжение, определяемое формулами (1.8–1.9)

$$p^2 = p_u^2 + p_v^2 + p_\omega^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 \geq 0, \quad (3.3)$$

оттуда модуль вектора  $\vec{p}$   $|p| \geq 0$ .

Иначе

$$\begin{aligned} p^2 &= \sigma_1^2(1 - m^2 - n^2) + \sigma_2^2 m^2 = \sigma_1^2 - (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)m^2 - \sigma_1^2 n^2 \leq \sigma_1^2, \\ |p| &\leq |\sigma_1|. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Согласно неравенствам (3.3–3.4)

$$|\sigma_3| \leq |p| \leq |\sigma_1|$$

(в ПНС  $\sigma_3 = 0$ ).

### 3.3 Круговая диаграмма для плоского напряженного состояния

Напишем плоскую систему уравнений относительно направляющих косинусов на основе формул (3.3), (1.12), (3.1), (2.2):

$$\begin{cases} p^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 = \sigma^2 + \tau^2; \\ \sigma = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2; \\ l^2 + m^2 + n^2 = 1. \end{cases} \quad (3.5)$$

Выразим из второго уравнения системы (3.5) квадрат первого из направляющих косинусов:

$$l^2 = \frac{\sigma - \sigma_2 m^2}{\sigma_1}.$$

Первое уравнение приобретает вид:

$$\sigma_1(\sigma - \sigma_2 m^2) + \sigma_2^2 m^2 = \sigma^2 + \tau^2,$$

откуда квадрат второго из трёх направляющих косинусов

$$m^2 = \frac{\tau^2 + \sigma(\sigma - \sigma_1)}{-\sigma_2(\sigma_1 - \sigma_2)} \geq 0. \quad (3.6)$$

Аналогичным образом находим квадрат первого направляющего косинуса:

$$l^2 = \frac{\tau^2 + \sigma(\sigma - \sigma_2)}{\sigma_1(\sigma_1 - \sigma_2)} \geq 0. \quad (3.7)$$

Используя, наконец, третье уравнение, получим квадрат третьего направляющего косинуса:

$$n^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)}{\sigma_1 \sigma_2} \geq 0. \quad (3.8)$$

Из очевидных неравенств (3.6–3.8) получаем другие:

$$\begin{cases} \tau^2 + \sigma(\sigma - \sigma_2) \geq 0, \\ \tau^2 + \sigma(\sigma - \sigma_1) \leq 0, \\ \tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) \geq 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Перепишем первое из неравенств (3.9):

$$\tau^2 + (\sigma^2 - 2\frac{1}{2}\sigma_2\sigma + \frac{1}{4}\sigma_2^2 - \frac{1}{4}\sigma_2^2) \geq 0,$$

$$\tau^2 + (\sigma - \frac{1}{2}\sigma_2)^2 \geq (\frac{1}{2}\sigma_2)^2. \quad (3.10)$$

Соотношение (3.10) даёт в координатах  $\sigma-\tau$  внешность круга с центром в точке  $(0,5\sigma_2, 0)$  и радиусом  $R_2 = 0,5\sigma_2$  с причисленной к ней границей – окружностью.

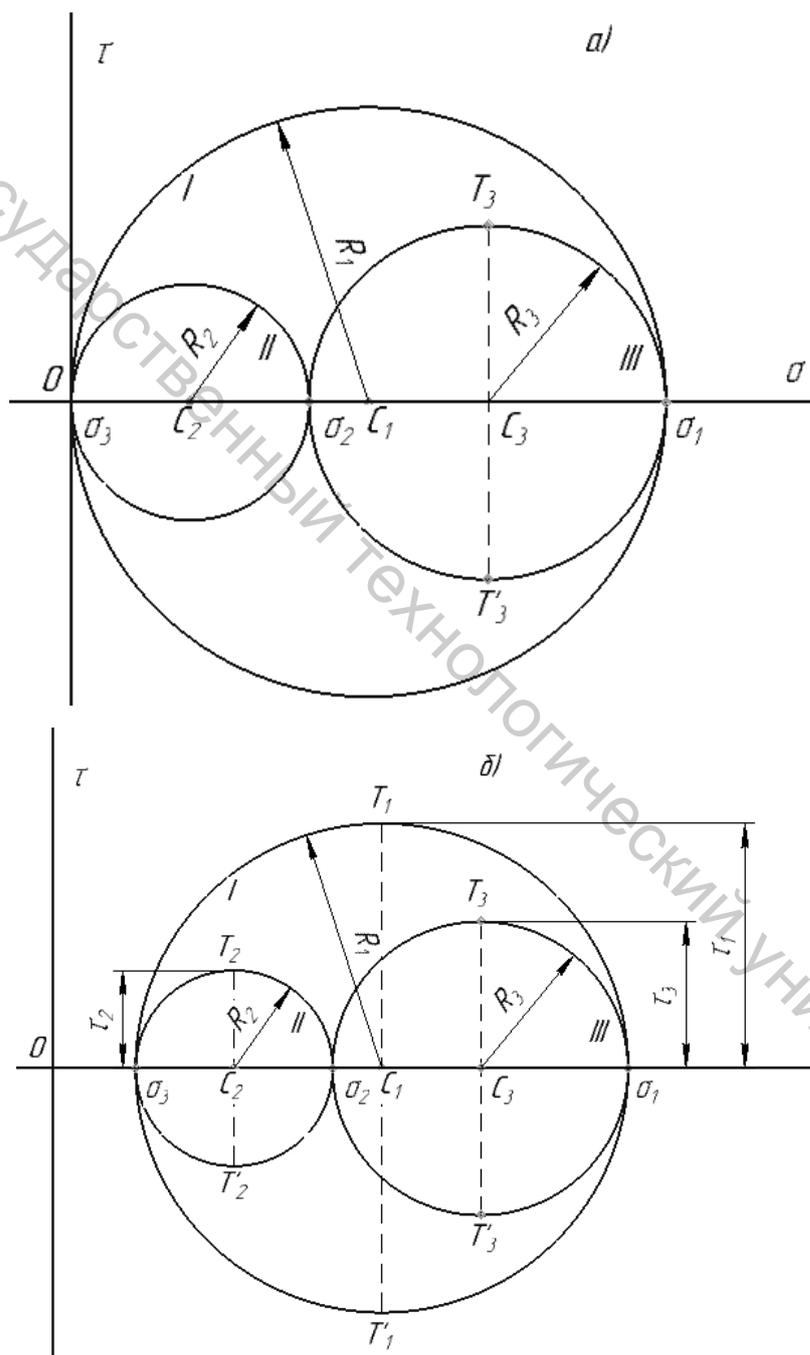


Рисунок 3.3 – Круговые диаграммы для а) ПНС и б) ОНС

Второе из неравенств (3.9) даёт внутренность круга с центром в точке  $(0,5\sigma_1, 0)$  и радиусом  $R_1 = 0,5\sigma_1$  с причисленной к ней границей. Третье из неравенств (3.9) даёт внешность круга с центром в точке  $(0,5(\sigma_1 + \sigma_2), 0)$  и радиусом  $R_3 = 0,5(\sigma_1 - \sigma_2)$ .

Границы указанных областей изображены на рисунке 3.3 а. На рисунке 3.3 б показаны круги для произвольного (объёмного) напряжённого состояния (ОНС) (с корнями характеристического уравнения, отличными от нуля).

Координаты точек внутри области, ограниченной окружностями, дают нормальные и касательные напряжения на всех площадках, проведённых внутри элемента на рисунке 1.1. Точки на самих окружностях отвечают площадкам, параллельным главным осям.

## Лекция 4

### Замечательные площадки с касательными напряжениями

#### 4.1 Наибольшие (главные) касательные напряжения

Из рисунка 3.3 б находим наибольшее касательное напряжение, равное радиусу наибольшего круга:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (4.1)$$

Оно действует на площадке из семейства площадок, параллельных главному напряжению  $\sigma_2$ . Другие максимумы аналогичны максимуму (4.1):

$$\tau_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad (4.2)$$

максимумы (4.2) равны радиусам кругов II, III.

Рассмотрим напряжения  $\sigma$  – координаты точек круга III, отвечающих площадкам, параллельным главному напряжению  $\sigma_3$ . Напряжение  $\sigma$  и  $\tau$  на них не зависят от напряжения  $\sigma_3$  – см. рисунок 4.1.

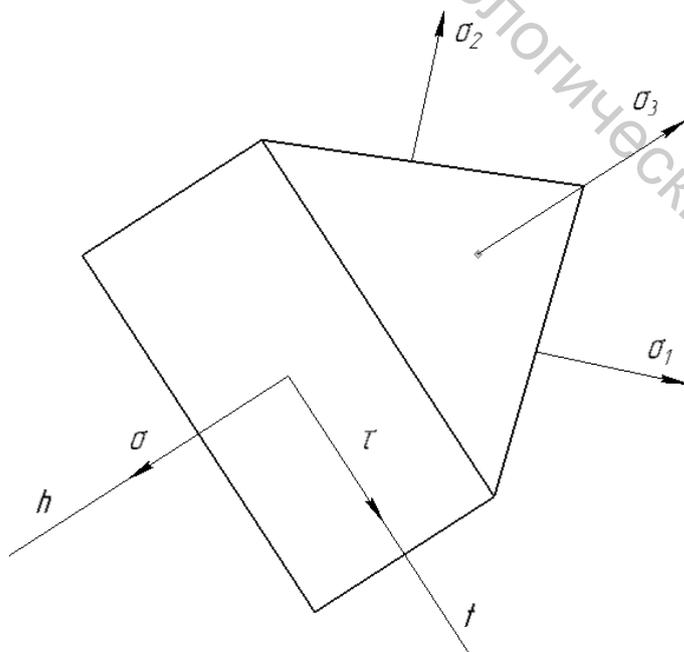


Рисунок 4.1 – Напряжения  $\sigma$  и  $\tau$  таковы же, каковы напряжения в ПНС с главными напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 = 0$

Круг будет, каков круг III на рисунке 3.3 а, изображающем ПНС с главными напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 = 0$  (рис. 3.2). Действительно, проекции нормальной силы на площадке с главным напряжением  $\sigma_3$  на оси  $h$  и  $t$  равны нулю.

Уравнение окружности III даётся неравенством (3.9):

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) = 0.$$

Направляющий косинус (3.8) нормали  $n$  к произвольной площадке на рисунке 4.1 равен нулю. Направляющие косинусы нормалей к площадкам, отвечающим точкам  $T_3$  и  $T_3'$  на рисунке 3.3 с координатами:

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \tau = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

даются их подстановкой в формулы (3.6), (3.7):

$$m^2 = \frac{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \sigma_1\right)}{-\sigma_2(\sigma_1 - \sigma_2)} = \frac{1}{2},$$

$$l^2 = \frac{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \sigma_2\right)}{\sigma_1(\sigma_1 - \sigma_2)} = \frac{1}{2},$$

$$m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, l = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Точкам  $T_3$  и  $T_3'$  отвечают взаимно перпендикулярные площадки, наклонённые к главным площадкам под углами  $\pm 45^\circ$  (рис. 4.2). Равным образом найдутся ещё две пары площадок, наклонённых под углами  $\pm 45^\circ$  к другим двум парам главных площадок (с экстремальными касательными напряжениями  $\tau_1$  и  $\tau_2$ ).

## 4.2 Октаэдрические напряжения

Рассмотрим теперь площадки (рис. 4.3), равно наклонённые ко всем трём главным площадкам. Направляющие косинусы нормали к

октаэдрической площадке  $l = \cos(n, u)$ ,  $m = \cos(n, v)$ ,  $h = \cos(n, w)$ , очевидно равны, т. е.  $l = m = h = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

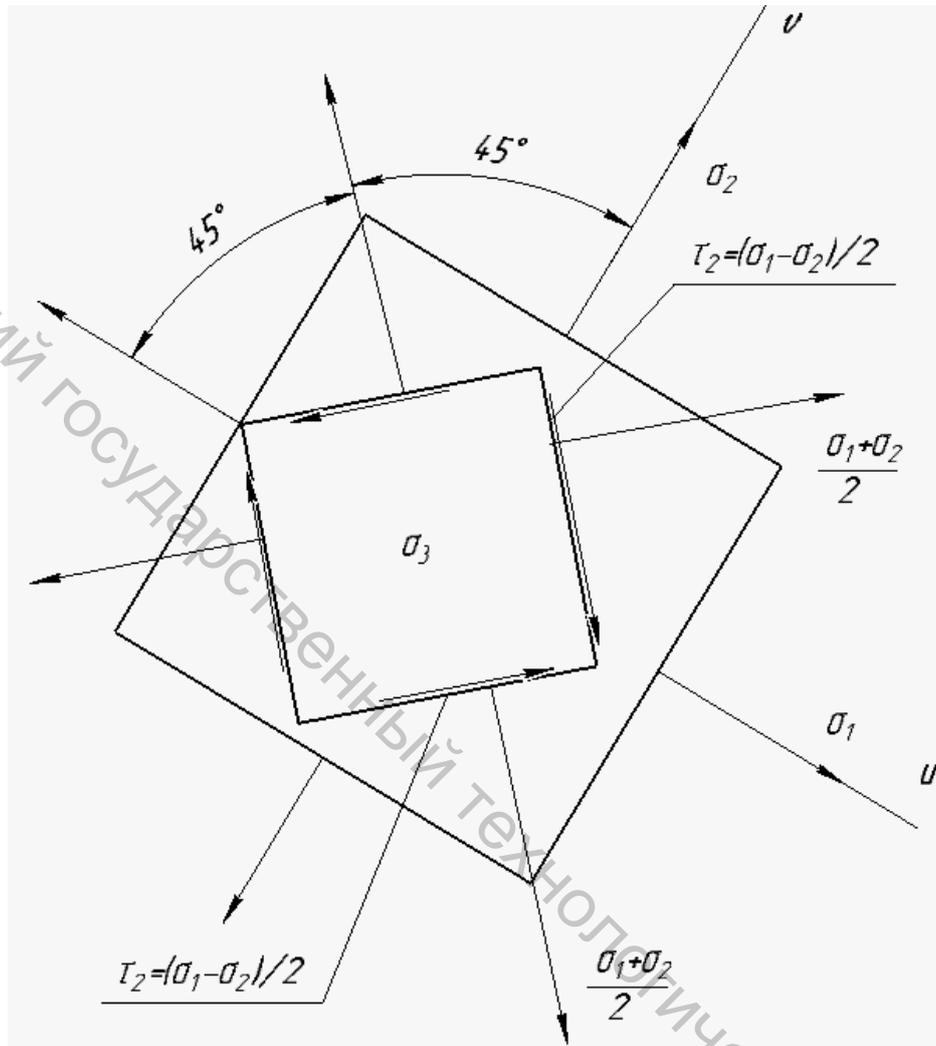


Рисунок 4.2 – Площадки с экстремальными касательными напряжениями

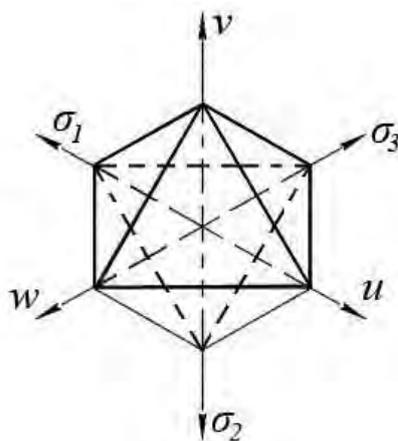


Рисунок 4.3 – Октаэдрическая площадка

Проекции полного напряжения на ней (1.8, 1.9)

$$p_u = \sigma_1 l, \quad p_v = \sigma_2 m, \quad p_\omega = \sigma_3 h,$$

т. е. квадрат полного напряжения на октаэдрической площадке

$$p_{окт}^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2). \quad (4.3)$$

Нормальное напряжение (1.11) на той же площадке:

$$\sigma_{окт} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (4.4)$$

Вычтем из квадрата (4.3) квадрат напряжения (4.4), найдём квадрат октаэдрического касательного напряжения (1.12):

$$\tau_{окт}^2 = p_{окт}^2 - \sigma_{окт}^2 = \frac{2}{9}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1), \quad (4.5)$$

откуда октаэдрическое касательное напряжение

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (4.6)$$

Используем в формуле (4.6) главные касательные напряжения (4.1, 4.2):

$$\tau_{окт} = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_3^2 + \tau_2^2 + \tau_1^2}. \quad (4.7)$$

Квадрат октаэдрического напряжения (4.7) составляет 4/9 (немного меньше половины) суммы квадратов главных касательных напряжений.

Если использовать инварианты напряженного состояния (2.5), выражая их через главные напряжения, получим ещё одну формулу для квадрата октаэдрического касательного напряжения (4.5):

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

$$I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1,$$

$$\tau_{\text{окт}}^2 = \frac{2}{9} \cdot (I_1^2 - 3I_2). \quad (4.8)$$

Во многих вопросах удобно пользоваться интенсивностью напряжения

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \tau_{\text{окт}}. \quad (4.9)$$

В случае одноосного растяжения ( $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$ ) инварианты (2.5)  $I_1 = \sigma_1, I_2 = 0$ , квадрат (4.8)  $\tau_{\text{окт}}^2 = 2\sigma_1^2/9$ ,  $\tau_{\text{окт}} = \sqrt{2}\sigma_1/3$ , и интенсивность напряжения (4.9) равна единственному главному напряжению  $\sigma_1$ .

## Лекция 5 Деформации

### 5.1 Линейная и угловая деформации

На рисунке 5.1 показаны перемещения бесконечно близких точек А и В, закрепленного твердого деформируемого тела.

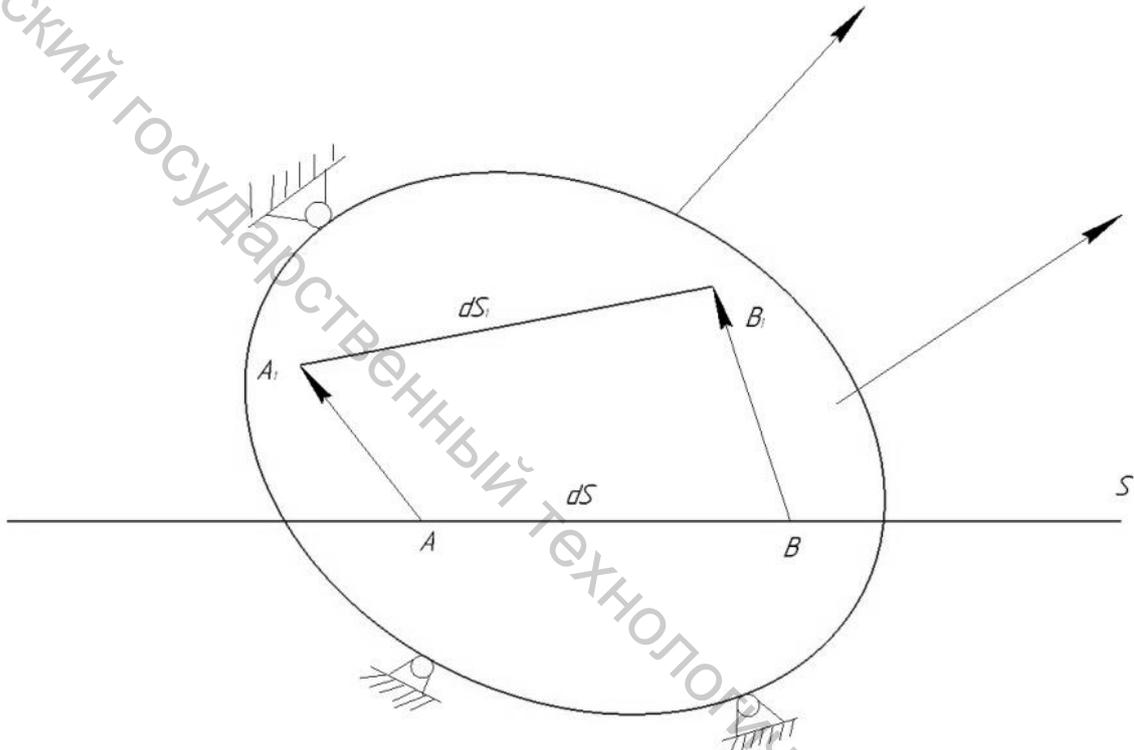


Рисунок 5.1 – Перемещенная и линейная деформация деформируемого тела под действием сил, действующих на него

Назовем относительной линейной деформацией (относительным удлинением) в направлении S величину:

$$\varepsilon_S = \frac{dS_1 - dS}{dS}, \quad (5.1)$$

где  $dS_1$  – длина отрезка  $ds$  после деформации.

Однако удлинениями (5.1) деформация не исчерпывается, ибо возможен, как показано на рисунке 5.2, перенос его граней. На нём показан переход из начального состояния  $ABDC$  в конечное  $A_1B_1C_1D_1$ , за счет изменения длин без изменения углов и за счет изменения углов без изменения длин. Изменение первоначально прямого угла между

двумя направлениями называется угловой деформацией, или сдвигом.

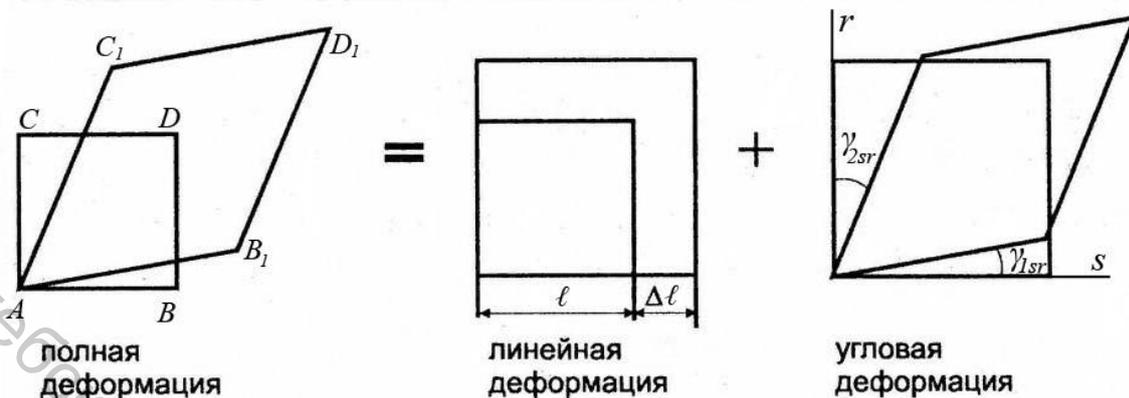


Рисунок 5.2 – Переход из состояния  $ABDC$  в состояние  $A_1B_1D_1C_1$

Сдвиг

$$\gamma_{sr} = \gamma_{1sr} + \gamma_{2sr}. \quad (5.2)$$

## 5.2 Формулы Коши для линейных деформаций

На рисунке 5.3 показаны перемещения точек  $A$  и  $B$ , отнесенные к осям  $x, y, z$ . В результате деформации точки перейдут в положения  $A_1B_1$ . Координаты точек  $A$  и  $B$ ,  $A_1$  и  $B_1$ :

$$A(x, y, z), \quad B(x + dx, y, z);$$

$$A_1(x + u, y + v, z + w),$$

$$B_1\left(x + dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, y + v + \frac{\partial v}{\partial x} dx, z + w + \frac{\partial w}{\partial x} dx\right).$$

Длина отрезка  $A_1B_1$

$$A_1B_1 = dx \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2},$$

относительное удлинение (5.1)

$$\epsilon_x = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1. \quad (5.3)$$

В случае малой деформации

$$\frac{\partial u}{\partial x} \ll 1, \frac{\partial v}{\partial x} \ll 1, \frac{\partial w}{\partial x} \ll 1. \quad (5.4)$$

Пренебрегая квадратами малых величин (5.4), перепишем выражение (5.3):

$$\varepsilon_x \approx 1 + \frac{\partial u}{\partial x} - 1 = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (5.5)$$

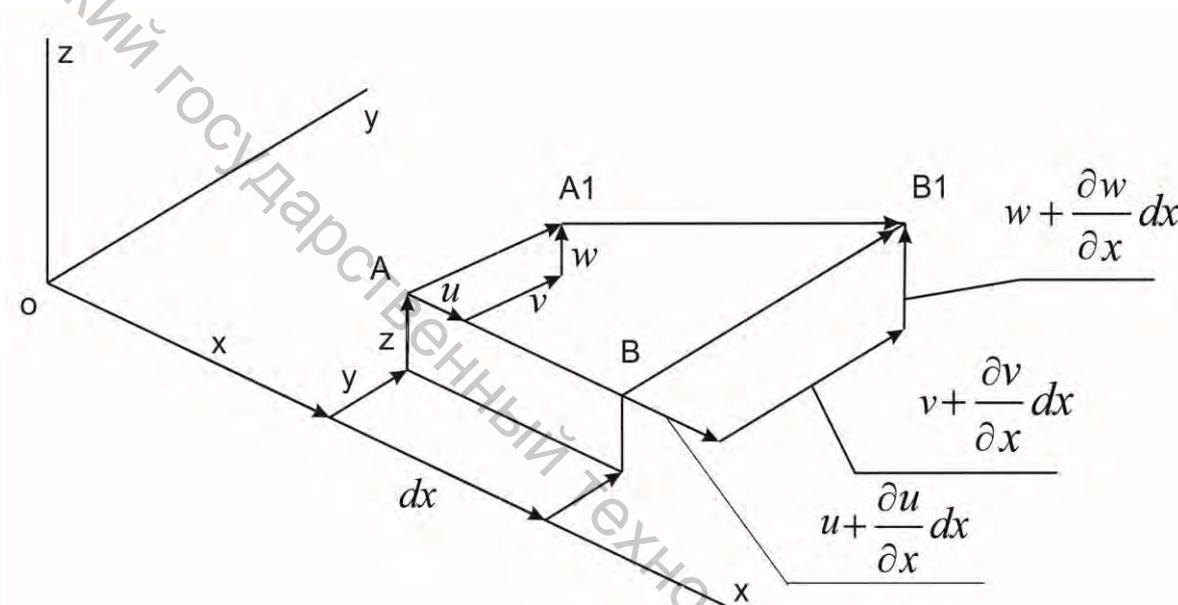


Рисунок 5.3 – Перемещения и линейная деформация

Аналогичным образом находим удлинения вдоль осей y и z:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (5.6)$$

### 5.3 Формулы Коши для угловых деформаций

Рассмотрим сдвиг, например, в плоскости ху (рис. 5.4). При малых углах:

$$\gamma_1 \approx \operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx \left(1 + \frac{\partial y}{\partial x}\right)} \approx \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\gamma_2 \approx \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

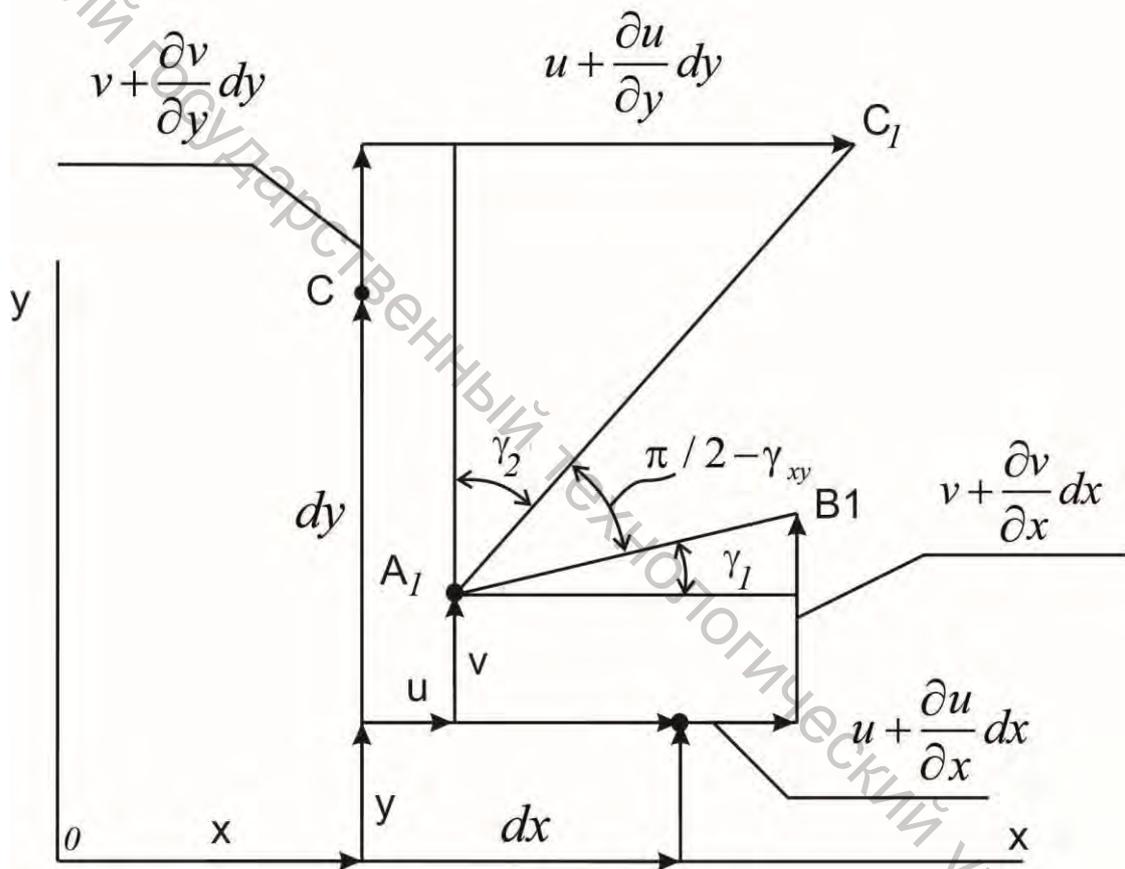


Рисунок 5.4 – Перемещения и угловая деформация

Аналогичным образом получаем сдвиг:

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (5.7)$$

## Лекция 6 Тензор деформаций

### 6.1 Линейная деформация в произвольном направлении

Рассмотрим частный случай плоской деформации (перемещения  $\omega$  отсутствуют): все точки твердого деформируемого тела перемещаются в параллельных плоскостях (рис. 6.1).

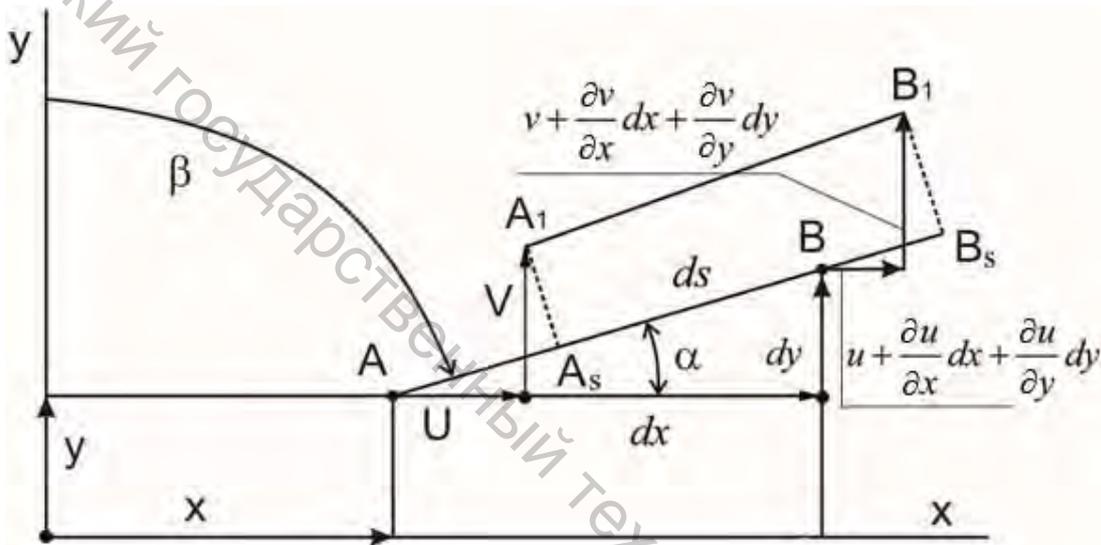


Рисунок 6.1 – Линейная деформация в произвольном направлении  
(угол  $\alpha$  произвольный)

Линейная деформация в произвольном направлении (5.1)

$$\varepsilon_s = \frac{A_s B_s - AB}{AB} = \frac{A_s B_s - ds}{ds},$$

где отрезок:

$$\begin{aligned} A_s B_s &= dS + BB_s - AA_s = ds + \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) \cos \alpha + \\ &+ \left( v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \cos \beta - u \cos \alpha - v \cos \beta = \\ &= ds + \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \cos \beta, \end{aligned}$$

или

$$\varepsilon_S = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dy}{ds}. \quad (6.1)$$

Прибегая к формулам (5.5, 5.6, 5.7, 5.8), перепишем выражение (6.1)

$$\varepsilon_S = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \gamma_{xy} lm. \quad (6.2)$$

Обобщая выражение (6.2) на общий случай, когда направление  $s$  характеризуется тремя направляющими косинусами  $z, m, n$ , получим

$$\varepsilon_S = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 = \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn \rightarrow \gamma_{zx} nl. \quad (6.3)$$

Нетрудно заметить сходство выражения (6.3) и выражения (1.11): деформации подобно напряжениям образуют симметричный тензор второго ранга:

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

## 6.2 Главные деформации

Характеристические уравнения тензора (6.4) аналогичного уравнению (2.4):

$$\varepsilon^3 - J_1 \varepsilon^2 + J_2 \varepsilon - J_3 = 0. \quad (6.5)$$

Коэффициентами уравнения (6.5) выступают инварианты деформированного состояния, аналогичные инвариантам напряженного состояния (2.5):

$$J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_z & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \varepsilon_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{bmatrix}, \quad (6.6)$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

Корни уравнения (6.5) – главные удлинения (в трех взаимно ортогональных направлениях). Их располагают в порядке убывания:

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3.$$

Удлинения в направлениях, перпендикулярных к октаэдрическим площадкам (рис. 4.3), аналогичны напряжениям (4.4):

$$\varepsilon_{\text{окт}} = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3); \quad (6.7)$$

сдвиг в октаэдрических плоскостях – см. формулу (4.6) –

$$\gamma_{\text{окт}} = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \quad (6.8)$$

Октаэдрические деформации (6.7, 6.8) легко выражаются через инварианты (6.6).

Во многих вопросах удобно пользоваться интенсивностью деформации, пропорциональной октаэдрическому сдвигу (6.2):

$$\varepsilon_i = \frac{3}{2\sqrt{2}(1+\mu)}\gamma_{\text{окт}}, \quad (6.9)$$

где  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

Наряду с относительными удлинениями (5.5, 5.6) и сдвигами (5.7, 5.8) найдём объёмную деформацию

$$\varepsilon_V = \frac{dV - dV_0}{dV_0}, \quad (6.10)$$

где первоначальный объём

$$dV_0 = dx dy dz,$$

объём после деформации (рис. 6.2)

$$dV = [(1 + \varepsilon_x)dx][(1 + \varepsilon_y)dy][(1 + \varepsilon_z)dz].$$

Объёмная деформация (6.10)

$$\varepsilon_V = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - 1 \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \quad (6.11)$$

равная первому инварианту (6.6).

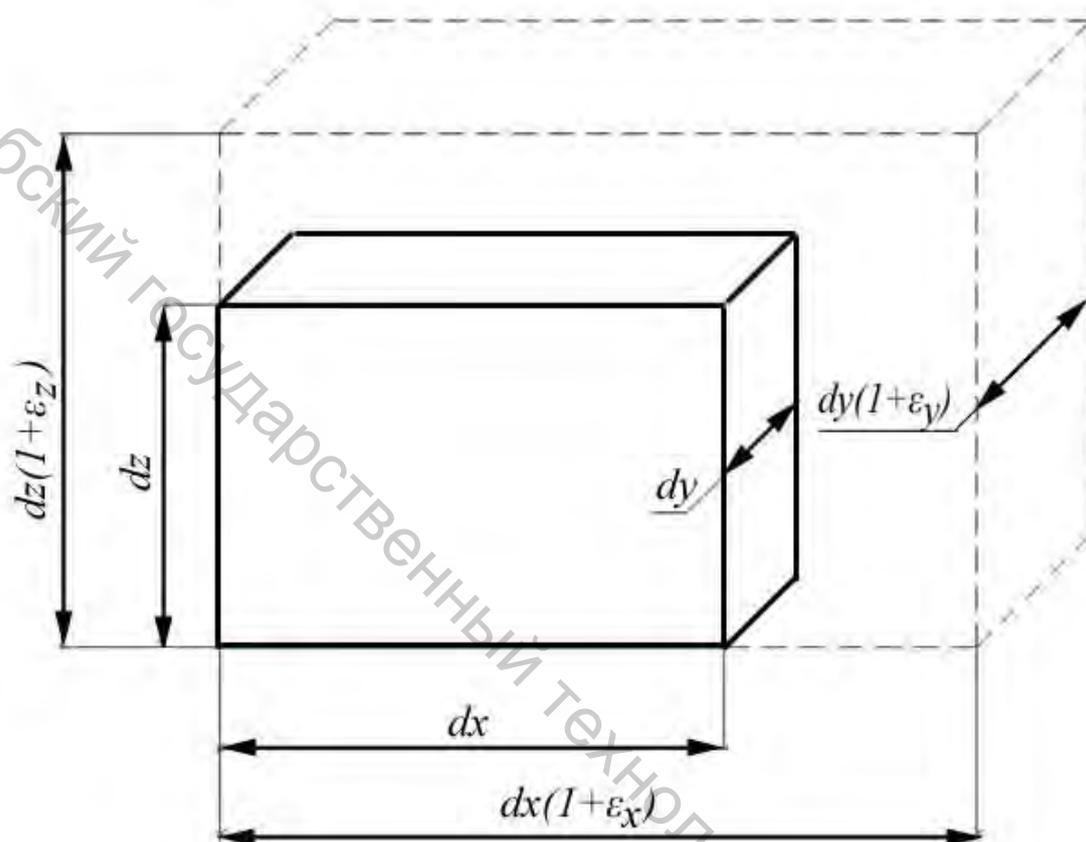


Рисунок 6.2 – Изменение объёма в деформации

### 6.3 Уравнения совместности деформаций

Относительные удлинения и сдвиги (5.5, 5.6, 5.7, 5.8) выражаются через произведение трёх перемещений – функций  $u, v, w$ . Исключая из этих уравнений, связывающих девять функций переменных  $u, v, w$ , найдём шесть соотношений: три группы зависимостей между деформациями в одной плоскости и три группы зависимостей между деформациями в разных плоскостях.

Найдём для примера одно из соотношений первой группы – рассматривая деформацию в плоскости  $xu$ :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}.$$

Сложим эти уравнения:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (6.12)$$

Указанные соотношения, выведенные Сен-Венаном, называются условиями совместности, или неразрывности деформаций. Если их не учитывать, т. е. для каждого из элементов-параллелепипедов назначить независимые деформации, из деформированных элементов сложить сплошное тело не получится.

## Лекция 7

### Зависимость между напряжениями и деформациями

#### 7.1 Обобщённый закон Гука

Для большинства реальных упругих тел верен с достаточной точностью закон: составляющие тензоры деформаций суть линейные функции от составляющих тензора напряжений:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = C_{11}\sigma_x + C_{12}\sigma_y + C_{13}\sigma_z + C_{14}\tau_{xy} + C_{15}\tau_{yz} + C_{16}\tau_{zx}, \\ \varepsilon_y = C_{21}\sigma_x + C_{22}\sigma_y + C_{23}\sigma_z + C_{24}\tau_{xy} + C_{25}\tau_{yz} + C_{26}\tau_{zx}, \\ \varepsilon_z = C_{31}\sigma_x + C_{32}\sigma_y + C_{33}\sigma_z + C_{34}\tau_{xy} + C_{35}\tau_{yz} + C_{36}\tau_{zx}, \\ \gamma_{xy} = C_{41}\sigma_x + C_{42}\sigma_y + C_{43}\sigma_z + C_{44}\tau_{xy} + C_{45}\tau_{yz} + C_{46}\tau_{zx}, \\ \gamma_{yz} = C_{51}\sigma_x + C_{52}\sigma_y + C_{53}\sigma_z + C_{54}\tau_{xy} + C_{55}\tau_{yz} + C_{56}\tau_{zx}, \\ \gamma_{zx} = C_{61}\sigma_x + C_{62}\sigma_y + C_{63}\sigma_z + C_{64}\tau_{xy} + C_{65}\tau_{yz} + C_{66}\tau_{zx}. \end{cases} \quad (7.1)$$

Иными словами, вклад каждого из напряжений в деформацию не зависит от вкладов всех других.

#### 7.2 Потенциальная энергия деформаций

Рассмотрим (в целях простоты вывода) плоское напряжённое состояние (рис. 7.1).

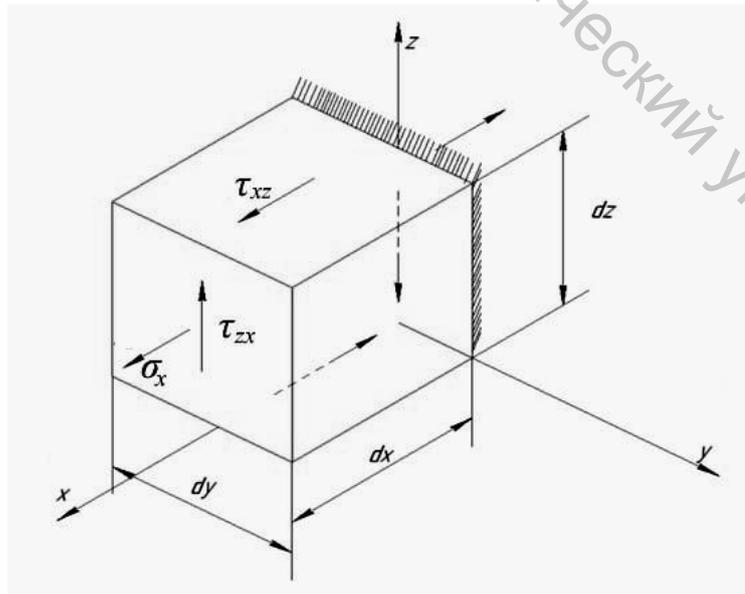


Рисунок 7.1 – Плоское напряжённое состояние

Работа совершается на относительных смещениях граней элемента на рисунке 7.1. Правую грань элемента можно считать закрепленной. Тогда работа нормальных сил  $\sigma_x dy dz$  на относительном смещении вертикальных граней вдоль оси  $x$   $\varepsilon_x dx$  равна (рис. 7.2)

$$\frac{1}{2}(\sigma_x dy dz)\varepsilon_x dx$$

(ибо деформация  $\varepsilon_x$  нарастает пропорционально напряжению). Работа касательных сил  $\tau_{zx} dy dz$  на относительном смещении вертикальных граней  $\gamma_{zx} dx$  равна (рис. 7.2)

$$\frac{1}{2}(\tau_{zx} dy dz)\gamma_{zx} dx.$$

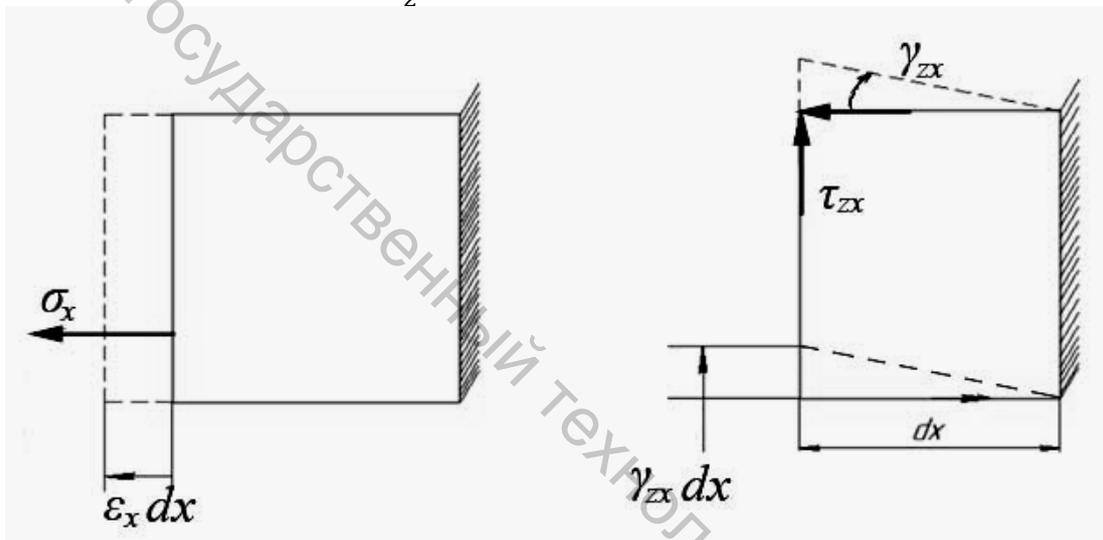


Рисунок 7.2 – Перемещения в направлениях осей  $x y z$

Работа касательных сил  $\tau_{xz} dx dy$  на перемещении, перпендикулярном им, равна нулю.

Соответственно, потенциальная энергия деформации

$$U = \frac{1}{2}(\delta_x \varepsilon_x + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz,$$

удельная потенциальная энергия деформации

$$U = \frac{1}{2}(\delta_x \varepsilon_x + \tau_{zx} \gamma_{zx}). \quad (7.2)$$

Обобщая выражение (7.2) на общий случай объёмного напряжённого состояния, получим энергию

$$U = \frac{1}{2}(\delta_x \varepsilon_x + \delta_y \varepsilon_y + \delta_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}). \quad (7.3)$$

Как видим, энергия (7.3) – инвариант напряжённого состояния, потенциальная энергия деформации – физическая величина, не зависящая от способа вычисления.

Воспользуемся законом (7.1): деформации в формуле (7.2)

$$\varepsilon_x = C_{11} \sigma_x + C_{16} \tau_{zx}, \quad \gamma_{zx} = C_{61} \sigma_x + C_{66} \tau_{zx}.$$

Произведём нагружение упругого тела, элемент которого представлен на рисунке 7.1, в два этапа: удельная работа на первом этапе ( $\sigma_x = var, \tau_{zx} = 0$ )

$$\frac{1}{2} \sigma_x C_{11} \sigma_x = \frac{1}{2} C_{11} \sigma_x^2,$$

работа на втором этапе ( $\sigma_x = const, \tau_{zx} = var$ )

$$\sigma_x C_{16} \tau_{zx} + \frac{1}{2} \tau_{zx} C_{66} \tau_{zx} = C_{16} \sigma_x \tau_{zx} + \frac{1}{2} C_{66} \tau_{zx}^2.$$

Удельная потенциальная энергия

$$U = \frac{1}{2} C_{11} \sigma_x^2 + C_{16} \sigma_x \tau_{zx} + \frac{1}{2} C_{66} \tau_{zx}^2. \quad (7.4)$$

Произведем нагружение в другом порядке

$$U = \frac{1}{2} C_{11} \sigma_x^2 + \sigma_x C_{61} \tau_{zx} + \frac{1}{2} C_{66} \tau_{zx}^2. \quad (7.5)$$

Из двух выражений (7.4, 7.5) энергии находим равенство упругих постоянных  $C_{16}$  и  $C_{61}$  в законе Гука. Обобщая это равенство на случай всей матрицы в законе (7.1), найдём, что эта матрица симметричная. Тем самым, закон (7.1) включает

$$\frac{6 * 6 - 6}{2} + 6 = 21$$

независимую упругую постоянную.

### 7.3 Учёт симметрии упругих свойств материала

Пусть материал образован набором прочных стеклянных волокон в связующем, например, в виде смолы (рис. 7.3).

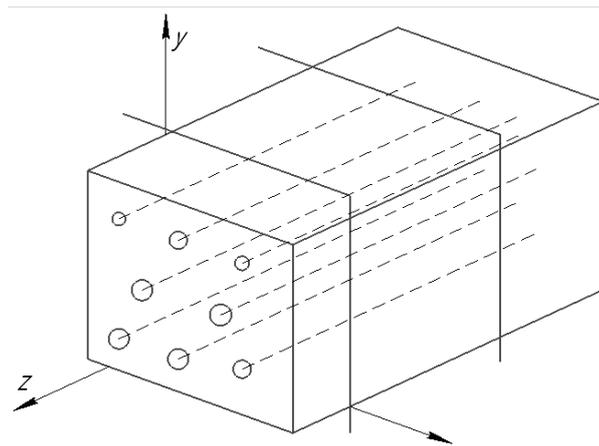


Рисунок 7.3 – Волокнистый композит

Свойства такого материала симметричны относительно любой из параллельных плоскостей, перпендикулярных волокнам. «Симметричная» деформация, очевидно, определяется только «симметричными» напряжениями  $\sigma_x, \sigma_x, \sigma_x, \tau_{zx}$  – не изменяющих направлений при отражении в плоскости симметрии. Антисимметричная деформация определяется, в свою очередь, только «антисимметричными» напряжениями  $\tau_{yz}, \tau_{xz}$ . Структура матрицы упругих постоянных дана на рисунке 7.4.

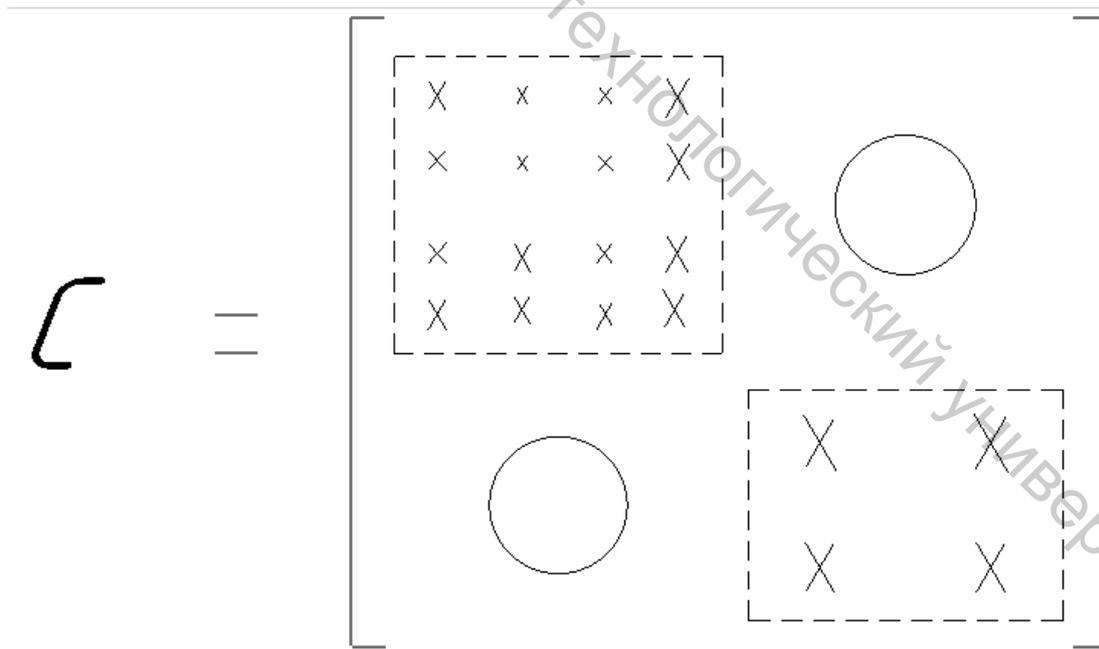


Рисунок 7.4 – Структура матрицы упругих постоянных

Число независимых упругих постоянных

$$\frac{4 * 4 - 4}{2} + 4 + \frac{2 * 2 - 2}{2} + 2 = 13.$$

Если материал (с волокнами в двух взаимно перпендикулярных направлениях) располагает тремя осями упругой симметрии (ортотропный материал), число его независимых упругих постоянных

$$\frac{3 * 3 - 3}{2} + 3 + 1 + 1 + 1 = 9.$$

Матрица упругих постоянных записывается в виде

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\mu_{xy}}{E_y} & -\frac{\mu_{xz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{yx}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\mu_{yz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{zx}}{E_x} & -\frac{\mu_{zy}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zx}} \end{bmatrix}, \quad (7.6)$$

где  $E_x, E_y, E_z$  – модули продольной упругости;  $\mu_{xy}, \dots, \mu_{zy}$  – коэффициенты Пуассона;  $G_{xy}, G_{yz}, G_{zx}$  – модули сдвига (поперечной упругости), но ввиду симметрии матрицы

$$-\frac{\mu_{xy}}{E_y} = -\frac{\mu_{yx}}{E_x}, \quad -\frac{\mu_{xz}}{E_z} = -\frac{\mu_{zx}}{E_x}, \quad -\frac{\mu_{yz}}{E_z} = -\frac{\mu_{zy}}{E_y}.$$

Если через всякую точку тела проходит плоскость изотропии (в которой все направления упруго-эквивалентны), тело располагает двумя модулями Юнга, двумя коэффициентами Пуассона и двумя модулями сдвигов, но в плоскостях изотропии выполняется соотношение

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (7.7)$$

– закон Гука записывается с шестью упругими постоянными, из которых независимы только пять.

Наконец, изотропное тело располагает тремя упругими постоянными  $E$ ,  $G$  и  $\mu$ , из которых неизвестны только две (например,  $E$  и  $\mu$ ) – см. соотношение (7.7).

Закон Гука для изотропного тела

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu\sigma_x - \mu\sigma_z], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu\sigma_x - \mu\sigma_y],\end{aligned}\tag{7.8}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}.$$

Объемная деформация (6.10) – см. уравнения (7.8) –

$$\varepsilon_v = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3}{\frac{E}{3(1-2\mu)}}\tag{7.9}$$

выражается через первый инвариант тензора напряжений (2.5).

Формула (7.9) дает объемный закон Гука, где  $K = E / [3(1 - 2\mu)]$  – объемный модуль упругости,  $\zeta_{cp} = (\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z)/3 = (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3)/3$  – среднее нормальное напряжение.

#### 7.4 Разложение тензор напряжений

Разложим произвольное напряженное состояние на составляющие, показанные на рисунке 7.5.

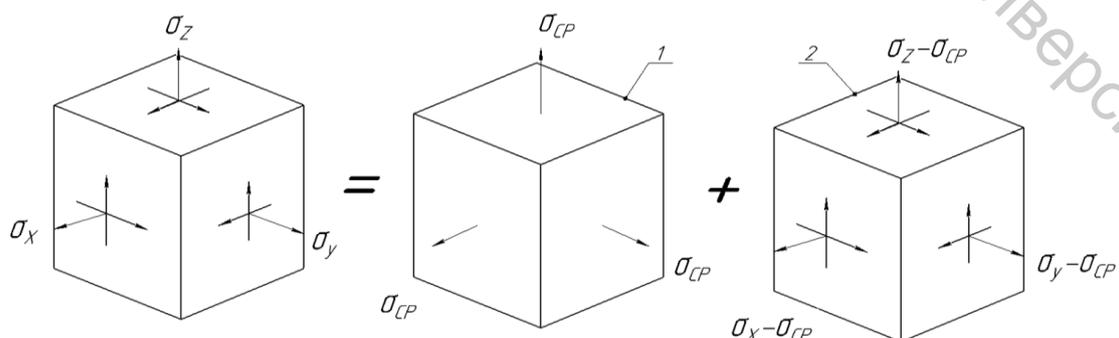


Рисунок 7.5 – Разложение тензора напряжений на шаровой тензор 1 и девиатор 2

Объемная деформация в состоянии 1 (7.9)

$$\varepsilon_v = \frac{\sigma_{\text{ср}}}{K}.$$

Относительные удлинения (7.8)  $\varepsilon_{x1} = \varepsilon_{y1} = \varepsilon_{z1}$ , т. е. форма элемента тела не изменяется. Изменение объема в состоянии 2, очевидно, равно нулю. В состоянии 2, называемом девиатором, изменится только форма элемента.

Удельная потенциальная энергия деформаций равна удельной работе, представленной суммой работ сил каждого из состояний на рисунке 7.5 на «собственных» перемещениях и на «чужих» перемещениях. Но, как следует из сумм (7.4) и (7.5), работы сил каждого из состояний 1, 2 на «чужих» перемещениях равны, т. е. удельная работа сил заданного напряженного состояния

$$a = a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22},$$

где работа сил состояния 1 на перемещениях состояния 2

$$\begin{aligned} a_{12} &= \frac{1}{2} \sigma_{\text{ср}} \varepsilon_{x2} + \frac{1}{2} \sigma_{\text{ср}} \varepsilon_{y2} + \frac{1}{2} \sigma_{\text{ср}} \varepsilon_{z2} = \\ &= \frac{1}{2} \sigma_{\text{ср}} (\varepsilon_{x2} + \varepsilon_{y2} + \varepsilon_{z2}) = \frac{1}{2} \sigma_{\text{ср}} \varepsilon_{v2} = 0, \end{aligned}$$

ибо объемная деформация  $\varepsilon_{v2} = 0$ . Соответственно и  $a_{21} = 0$ . Удельную потенциальную энергию изменения формы в заданном напряженном состоянии можно найти, вычитая из энергии (7.3) энергию шарового тензора. Энергию найдем, используя в формуле (7.3) закон Гука (7.8):

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)] + \\ &+ \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Энергия шарового тензора (изменения объема)

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} (\sigma_{\text{ср}} \varepsilon_{x1} + \sigma_{\text{ср}} \varepsilon_{y1} + \sigma_{\text{ср}} \varepsilon_{z1}) = \frac{1}{2} \sigma_{\text{ср}} (\varepsilon_{x1} + \varepsilon_{y1} + \varepsilon_{z1}) = \\ &= \frac{1}{2} \sigma_{\text{ср}} \varepsilon_v = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_{\text{ср}}^2}{K} = \frac{1}{2K} \sigma_{\text{окт}}^2 \end{aligned} \quad (7.11)$$

– см. формулу (4.4).

Разность энергии (7.10) и (7.11), т. е. удельная потенциальная энергия изменения формы

$$u_2 = \frac{1}{12G} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]. \quad (7.12)$$

Энергия (7.12), выраженная через главные напряжения,

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{12G} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \\ &= \frac{1}{6G} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1]. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Энергию (7.13) можно выразить через октаэдрические касательные напряжения (4.5):

$$u_2 = \frac{3}{4} \frac{\tau_{\text{окт}}^2}{G}. \quad (7.14)$$

## Лекция 8

### Плоское деформированное состояние

#### 8.1 Длинное тело

Пусть длина тела (рис. 8.1) велика по сравнению с размерами его поперечного сечения, внешние силы распределены по длине его равномерно. В точной постановке задачи считают, что тело ограничено двумя жестко закрепленными торцовыми плоскостями. Освободимся от этого требования.

Пусть в задаче с защемленными торцами вычислены реакции заделок (рис. 8.1 а), приводящиеся к силе  $F$  и моменту  $M$  (сила равна главному вектору распределенных по торцам реакций, момент – главному моменту реакций). Наложим на решение задачи о растяжении стержня силами  $-F$  и его изгибе моментами  $-M$  – получится решение задачи с нагрузками на торцах, главный вектор и главный момент которых равны нулю. Оно во всех точках тела, уделенных от торцов, почти совпадает с решением для того же тела, но со свободными торцами (принцип Сен-Венана). При этом изменяются только продольные нормальные напряжения  $\sigma_z$ , правда, перемещения изменяются все.

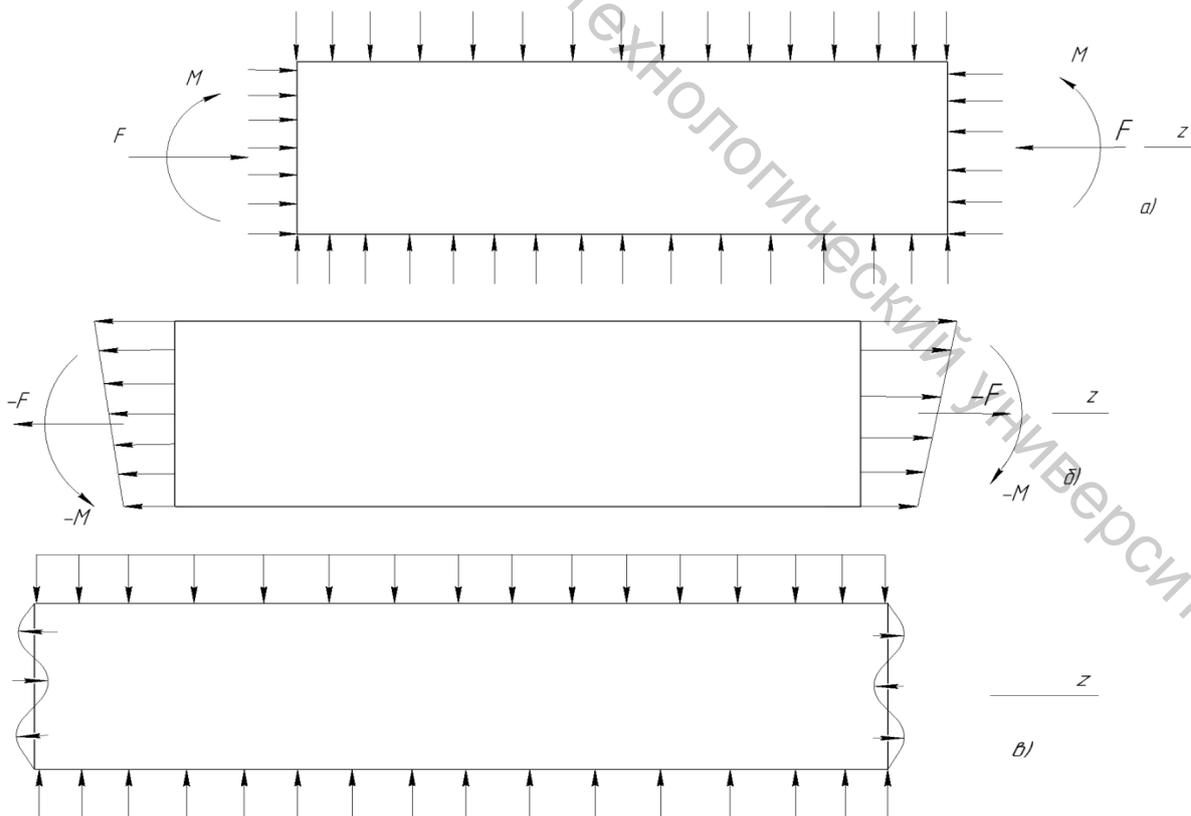


Рисунок 8.1 – Длинное тело со свободными торцами

## 8.2 Перемещения, деформации, напряжения в плоском деформированном состоянии

Перемещения в теле с закрепленными торцами

$$u = u(x, y), v = v(x, y), \omega = 0,$$

деформации – см. формулы (5.5, 5.6, 5.7, 5.8) –

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0. \quad (8.1)$$

Напряжения связаны с деформациями законом Гука (7.8):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0; \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}, \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \end{aligned} \quad (8.2)$$

как то следует из соотношений (8.1).

Исключая  $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$  из выражений (8.2), вспоминая связь модулей (7.7) и вводя обозначение

$$\mu' = \frac{\mu}{1-\mu}, \quad (8.3)$$

получим закон Гука (8.2) в виде

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \mu' \sigma_y}{2G(1 + \mu')},$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \mu' \sigma_x}{2G(1 + \mu')}, \quad (8.4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}.$$

### 8.3 Уравнения равновесия

В отсутствие объемных сил напомним, как следствие уравнений (1.13, 1.14), уравнения равновесия

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0,$$

или

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y},$$

(8.5)

$$-\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}.$$

Первое из уравнений (8.5) дает формулы

$$\sigma_x = \frac{\partial A(x, y)}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial A(x, y)}{\partial x},$$

второе –

$$\tau_x = -\frac{\partial B(x, y)}{\partial y}, \quad \sigma_y = \frac{\partial B(x, y)}{\partial x},$$

откуда следует равенство

$$\frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial x},$$

то есть

$$B = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad A = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

все напряжения могут быть выражены через одну функцию  $\varphi(x, y)$  – функцию напряжений или функцию Эри:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (8.6)$$

#### 8.4 Условия сплошности

Используя выражения (8.6) в законе Гука (8.4) и деформации  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  в условии сплошности (6.11), получим бигармоническое уравнение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G(1+\nu')} \left( \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} - \nu' \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + \frac{1}{2G(1+\nu')} \left( \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - \nu' \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = \\ = \frac{1}{G} \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}, \\ \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Вводя оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

напишем уравнение (8.7) в виде

$$\Delta \Delta \varphi = 0. \quad (8.8)$$

Уравнение (8.8) должно быть дополнено граничными условиями. Если на поверхности тела заданы внешние нагрузки  $F_{nx}, F_{ny}$ , напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  должны удовлетворять уравнениям (1.8, 1.9):

$$\sigma_x l + \tau_{xy} m = F_{nx},$$

$$\tau_{yx} l + \sigma_y m = F_{ny},$$

то есть граничные условия для функции  $\theta$  – см. формулы (8.6) –

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cos(n, x) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cos(n, y) &= F_{nx}, \\ - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cos(n, x) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cos(n, y) &= F_{ny}, \end{aligned} \quad (8.9)$$

$\vec{n}$  в условиях (8.9) – нормаль к площадке  $dA$  на поверхности тела.

Витебский государственный технологический университет

## Лекция 9 Плоское напряженное состояние

### 9.1 Тонкая пластинка

На рисунке 9.1 изображена тонкая пластинка постоянной толщины, нагруженная по контуру силами, равномерно распределенными по ее толщине.

### 9.2 Напряжения в пластинке

На поверхностях пластинки  $Z = \pm h/2$  (оси  $x$  и  $y$  располагаются в срединной плоскости пластинки) напряжения

$$\sigma_z = 0, \tau_{yz} = 0, \tau_{xz} = 0, \quad (9.1)$$

что дает возможность положить в приближении, что напряжения (9.1) во всем объеме пластинки намного меньше остальных, и рассматривать

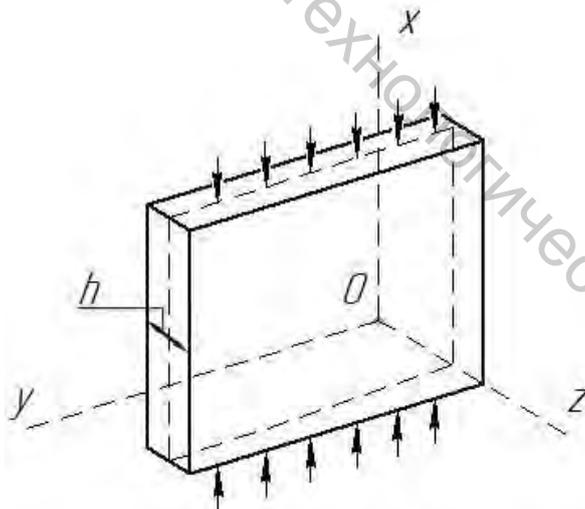


Рисунок 9.1 – Тонкая пластинка

средние по толщине напряжения  $\sigma_{xcp}$ ,  $\sigma_{ycp}$ ,  $\tau_{xycp}$ :

$$\sigma_{xcp} = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz,$$

$$\sigma_{y\text{ср}} = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz, \quad (9.2)$$

$$\tau_{xy\text{ср}} = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz.$$

Средние напряжения (9.2) могут быть выражены, как и в случае плоской деформации, производными функции Эри  $\varphi_{\text{ср}}$ .

$$\frac{\partial^4 \varphi_{\text{ср}}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi_{\text{ср}}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi_{\text{ср}}}{\partial y^4} = 0, \quad (9.3)$$

аналогичным образом записываются и граничные условия – см. условие (8.9).

### 9.3 Бигармоническое уравнение в полярных координатах

На рисунке 9.2 изображены полярные координаты  $r, \theta$ . Формулы преобразования координат

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctg \frac{y}{x}.$$

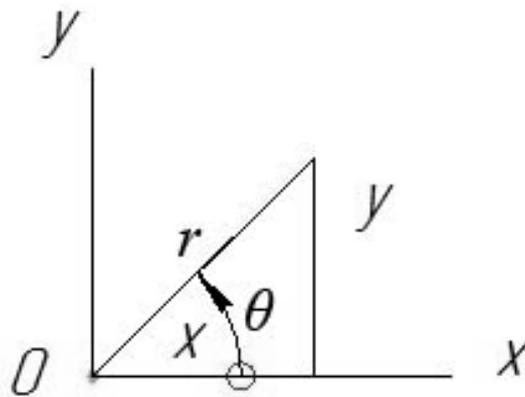


Рисунок 9.2 – Полярные координаты

## Производные

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \Psi, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r};$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}$$

Первые производные функции Эри  $\varphi(r, \theta)$  в полярных координатах

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos \theta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad (9.4)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin \theta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}.$$

Напряжения находятся дифференцированием производных (9.4):

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \cos \theta \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right),$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \sin \theta \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \quad (9.5)$$

$$-\tau_{xy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right).$$

Подставим производные (9.4) в формулы (9.5), получим оператор Лапласа в полярных координатах:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \varphi, \quad (9.6)$$

бигармоническое уравнение (8.8, 9.3) принимает при учете выражения (9.6) вид

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (9.7)$$

## 9.4 Напряжения в полярных координатах

На рисунке 9.3 показаны напряжения на произвольной площадке в плоском напряженном состоянии, представленные составляющими  $p_x, p_y$  (1.8, 1.9).

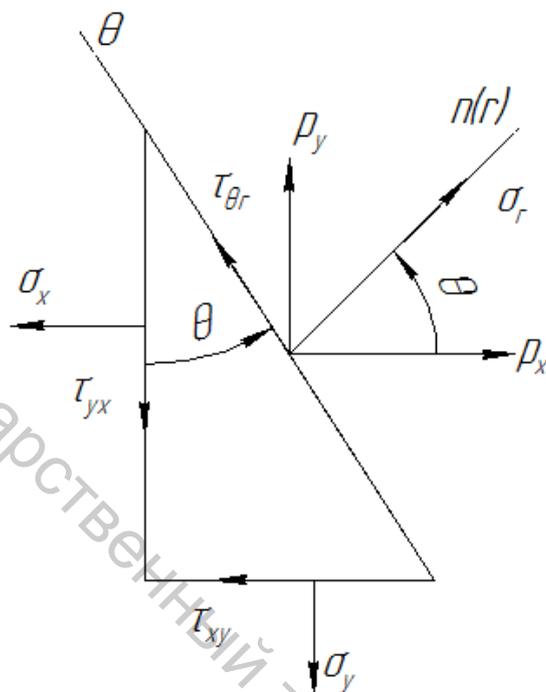


Рисунок 9.3 – Плоское напряженное состояние

Радиальные напряжения  $\sigma_r$  найдем, проектируя напряжения  $p_x, p_y$  на направление  $r$ :

$$\begin{aligned} \sigma_r &= p_x \cos \theta + p_y \sin \theta = \\ &= (\sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta) \cos \theta + (\tau_{xy} \cos \theta + \sigma_y \sin \theta) \sin \theta = \quad (9.8) \\ &= \sigma_x \cos^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta + \sigma_y \sin^2 \theta; \end{aligned}$$

окружные напряжения (направление  $\theta$  отличается от направления  $r$  на  $90^\circ$ )

$$\sigma_\theta = \sigma_x \sin^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta + \sigma_y \cos^2 \theta. \quad (9.9)$$

Касательные напряжения найдем, проектируя  $p_x, p_y$  на направление  $\theta$ :

$$\begin{aligned}
\tau_{\theta r} &= p_y \cos \theta - p_x \sin \theta = (\tau_{xy} \cos \theta + \sigma_y \sin \theta) \cos \theta - \\
&\quad - (\sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta) \sin \theta = \\
&= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).
\end{aligned} \tag{9.10}$$

Используем в формулах (9.8–9.10) выражения (9.5) для  $\sigma_y$ ,  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$ : напряжения

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}, \\
\sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2},
\end{aligned} \tag{9.11}$$

$$\tau_{\theta r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)$$

## Лекция 10 Задача Кирша

### 10.1 Напряжения в сплошной пластине

Рассмотрим напряжения в сплошной пластине, представленной на рисунке 10.1.

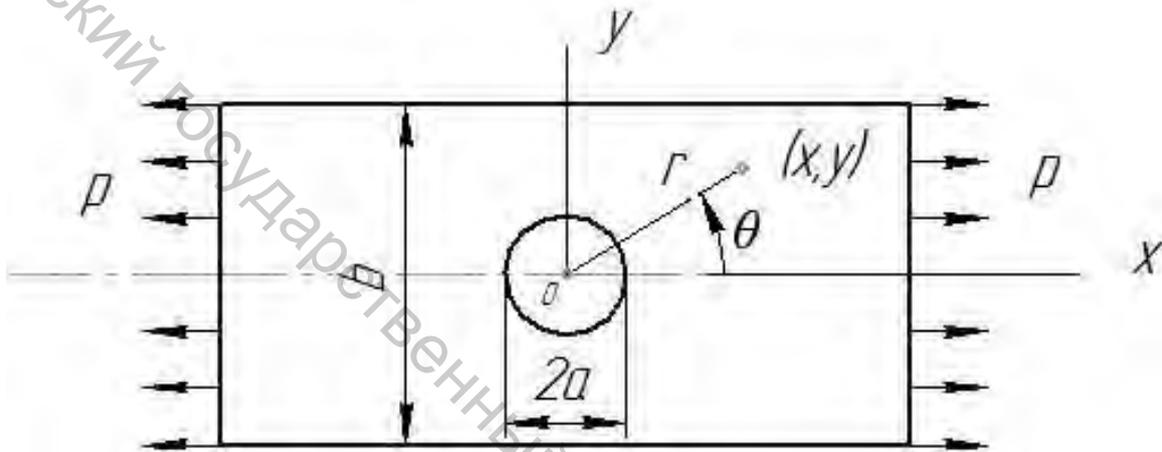


Рисунок 10.1 – Пластина с отверстием

Функция Эри в декартовых координатах  $x, y$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} p y^2 . \quad (10.1)$$

Действительно, напряжения (9.5) в сплошной пластине

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} = p , \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} = 0 , \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0 . \end{aligned} \quad (10.2)$$

Вспользуемся полярными координатами: функция (10.1) примет вид

$$y = r \sin \theta ,$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}pr^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{2}pr^2 \frac{1-\cos 2\theta}{2} = \frac{1}{4}pr^2 - \frac{1}{4}pr^2 \cos 2\theta. \quad (10.3)$$

Соответствующие напряжения (9.11) получаются дифференцированием функции (10.3):

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \left( \frac{1}{2}pr - \frac{1}{2}pr \cos 2\theta \right) - \frac{1}{r^2} \left( -\frac{1}{4}pr^2 \cdot 4 \cos 2\theta \right) = \\ &= \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p \cos 2\theta, \end{aligned}$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}p \cos 2\theta, \quad (10.4)$$

$$\tau_{\theta r} = -\frac{1}{2}p \sin 2\theta.$$

## 10.2 Дифференциальные уравнения для задачи

Функцию Эри для пластины с отверстием ищем в виде

$$\varphi = \varphi_1(r) + \varphi_2(r) \cos 2\theta \quad (10.5)$$

Подставим выражение (10.5) в уравнение (9.7):

$$\begin{aligned} &\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{d^2 \varphi_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\varphi_1}{dr} \right) + \\ &+ \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right) \left( \frac{d^2 \varphi_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\varphi_2}{dr} - \frac{4\varphi_2}{r^2} \right) \cos 2\theta = 0. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Уравнение (10.6) должно удовлетворяться при всех значениях  $\theta$ , тем самым оно распадается на два линейных уравнения типа Эйлера

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{d^2 \varphi_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\varphi_1}{dr} \right) = 0, \quad (10.7)$$

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right) \left( \frac{d^2 \varphi_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\varphi_2}{dr} - \frac{4\varphi_2}{r^2} \right) = 0. \quad (10.8)$$

Частные решения уравнений (10.7–10.8) ищутся в виде  $r^n$ . В первом случае получим уравнение

$$n^2(n-2)^2r^{n-4} = 0$$

с двумя двойными корнями  $n_{1,2} = 0$ ,  $n_{3,4} = 2$  характеристического уравнения  $n^2(n-2)^2 = 0$ . Общее решение уравнения (10.7)

$$\varphi_1 = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r. \quad (10.9)$$

Аналогичным образом получается решение уравнения (10.8):

$$\varphi_2 = \frac{C_5}{r^2} + C_6 + C_7 r^2 + C_8 r^4 \quad (10.10)$$

(корни характеристического уравнения  $n_1 = -2$ ,  $n_2 = 0$ ,  $n_3 = 2$ ,  $n_4 = 4$ ).

Напряжения в пластине

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{d\varphi_1}{dr} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\varphi_2}{dr} \cos 2\theta - \frac{4}{r^2} \cdot \varphi_2(r) \cos 2\theta,$$

$$\sigma_\theta = \frac{d^2\varphi_1}{dr^2} + \frac{d^2\varphi_2}{dr^2} \cos 2\theta,$$

$$\tau_{\theta r} = 2 \frac{d}{dr} \left( \frac{\varphi_2}{r} \right) \sin 2\theta.$$

Используя в этих формулах решения (10.9–10.10), получим

$$\sigma_r = \frac{C_2}{r^2} + 2C_3 + 2C_4 \ln r + C_4 + \left( -6 \frac{C_5}{r^2} - 4 \frac{C_6}{r^2} - 2C_7 \right) \cos 2\theta,$$

$$\sigma_\theta = -\frac{C_2}{r^2} + 2C_3 + 2C_4 \ln r + C_4 + \left( 6 \frac{C_5}{r^4} + 2C_7 + 12C_8 r^2 \right) \cos 2\theta,$$

$$\tau_{r\theta} = \left( -6 \frac{C_5}{r^4} - 2 \frac{C_6}{r^2} + 2C_7 + 6C_8 r^2 \right) \sin 2\theta. \quad (10.11)$$

Слагаемые, содержащие константы  $C_4$  и  $C_8$ , неограниченно растут по мере удаления от отверстия, должно быть  $C_4 = C_8 = 0$ . На бесконечном удалении от отверстия формулы (11.11) должны давать напряжения (10.4). Следовательно, константы

$$C_3 = \frac{1}{4}p, C_7 = -\frac{1}{4}p.$$

На границе отверстия

$$\sigma_r = 0, \tau_{r\theta} = 0.$$

Из этих условий находим: константы

$$C_2 = -\frac{1}{2}pa^2, C_5 = -\frac{1}{4}pa^4, C_6 = \frac{1}{2}pa^2.$$

Напряжения в пластине (10.11)

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{2}p \left[ 1 - \frac{a^2}{r^2} + \left( 1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right], \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{2}p \left[ 1 + \frac{a^2}{r^2} - \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right], \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{1}{2}p \left( 1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Наиболее интересны напряжения у края отверстия ( $r = a$ ) и в ослабленном поперечном сечении пластины ( $\theta = \pm \pi/2$ ): при  $r = a$

$$\sigma_r = 0, \tau_{r\theta} = 0, \sigma_\theta = p(1 - 2 \cos 2\theta),$$

$$\sigma_\theta(\theta = \pm \pi/2) = 3p, \sigma_\theta(\theta = 0) = -p;$$

при  $\theta = \pm \pi/2$

$$\sigma_r \approx 0, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad \sigma_\theta = p \left( 1 + \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3a^4}{2r^4} \right).$$

Вблизи отверстия наблюдается концентрация напряжений (рис. 10.2).

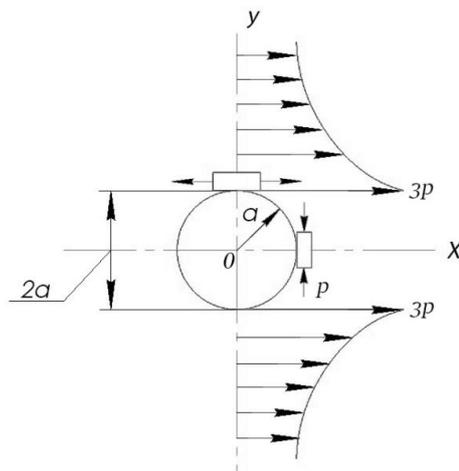


Рисунок 10.2 – Концентрация напряжений вблизи отверстия

Формулы (10.12) верны в случае, когда ширина пластины (рис. 10.1)  $b \gg 2a$ . Если же ширина  $b$  не очень велика, но все же больше  $4a$ , можно воспользоваться приближенной формулой

$$\sigma_{\theta max} = 3p \frac{b}{b - a}.$$

В случае пластины с эллиптическим отверстием (рис. 10.3)

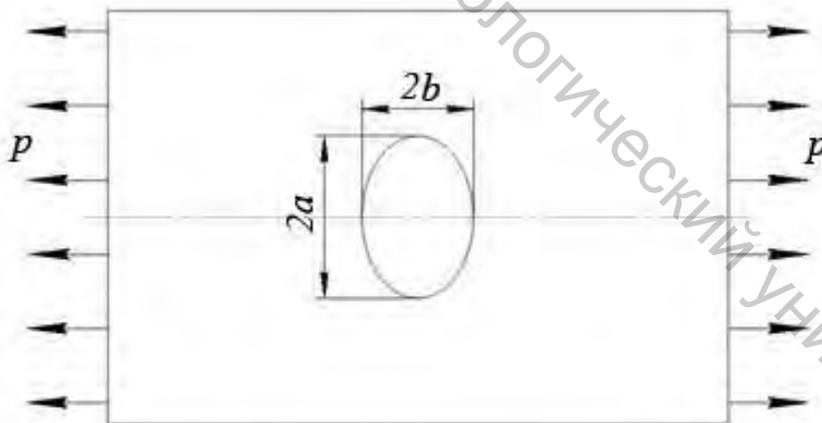


Рисунок 10.3 – Пластина с эллиптическим отверстием

$$\sigma_{\theta max} = p \left( 1 + \frac{2a}{b} \right).$$

При  $a > b$  наибольшее напряжение  $\sigma_{\theta max} > 3p$ , если же  $a < b$ ,  $p < \sigma_{\theta max} < 3p$ .

# Лекция 11

## Диаграмма деформирования

### 11.1 Испытания на растяжение

Основной результат эксперимента – зависимость между напряжениями и деформациями  $\sigma = f(\varepsilon)$ , т. е. диаграмма деформирования. Напряжения в цилиндрической части образца (рис. 11.1.)

$$\sigma = \frac{P}{A}, \quad (11.1)$$

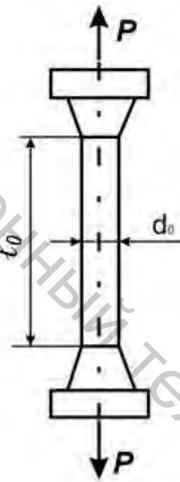


Рисунок 11.1 – Цилиндрический образец

где  $A$  площадь поперечного сечения образца:  $A = \pi \cdot d_0^2 / 4$ ; деформация (относительное удлинение)

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}; \quad (11.2)$$

где  $l$  – длина контрольного участка образца.

### 11.2 Упругость, пластичность, упрочнение

В опыте с растяжением (рис. 11.1) выявляются общие свойства конструкционных материалов – упругость и пластичность. На рисунке

11.2 показаны типичные результаты: если напряжение (11.1) не превышает предела упругости  $\sigma_y$ , зависимость между напряжением (11.1) и деформацией (11.2) оказывается линейной:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon. \quad (11.3)$$

В зависимости (11.3)  $E$  – модуль упругости материала. Для сплавов на основе железа  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, для алюминиевых сплавов  $E = 0,8 \cdot 10^5$  МПа. На кривой деформирования модуль упругости в зависимости (11.3) численно равен  $\text{tg}$  угла наклона линейного участка  $OA_0$ :

$$E = \text{tg} \beta. \quad (11.4)$$

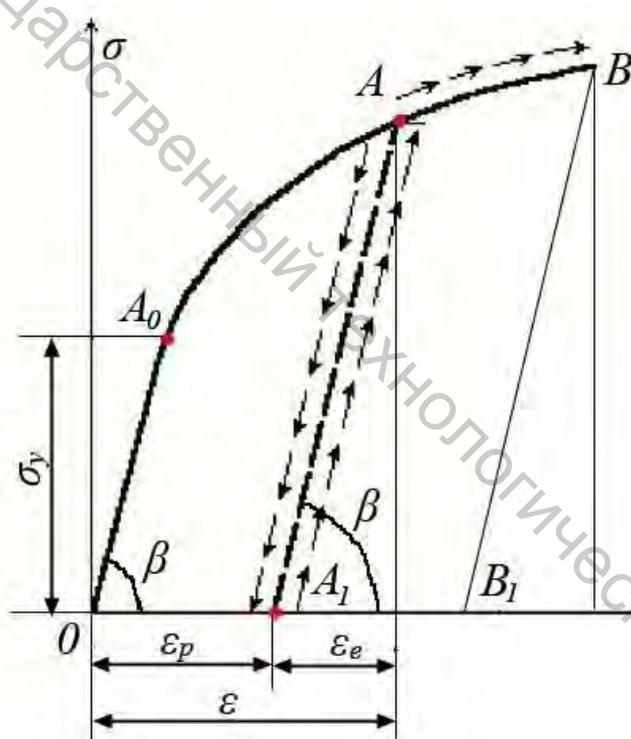


Рисунок 11.2 – Кривая деформирования

Если в точке  $A$  (при  $\sigma < \sigma_y$ ) прекратить нагрузку на образец и разгрузить его, деформация материала исчезнет – в этом восстановлении всех размеров элемента конструкции после снятия внешнего воздействия и заключается свойство упругости материала.

При возрастании напряжений, становившихся выше предела упругости  $\sigma_y$ , зависимость  $\sigma$  от  $\varepsilon$  перестанет быть линейной. Однако разгрузка в некоторый момент  $A$  пойдет по прямой  $AA_1$ , параллельной

(приблизительно) начальному участку  $OA_0$ . Точка  $A$  переместится в положение  $A_1$  – в материале сохранится остаточная (пластическая) деформация  $\varepsilon_p$ , изображенная (рис. 11.2) отрезком  $OA_1$ . Полная деформация в точке  $A$

$$\varepsilon = \varepsilon_p + \varepsilon_e. \quad (11.5)$$

Деформация  $\varepsilon_e$  в сумме (11.5) – упругая деформация

$$\varepsilon_e = \sigma/E. \quad (11.6)$$

Для металлов деформация (11.6) достигает значений 0,2–0,8 %, тогда как пластическая деформация – 20–40 %. Модуль упругости (11.4) в большинстве случаев не зависит от пластической деформации  $\varepsilon_p$ .

При повторном *нагрузении* образца, получившего деформацию  $\varepsilon_p$ , процесс нагружения изображается (рис. 11.2) прямой  $A_1A$ , предел упругости возрастает – происходит упрочнение материала. В дальнейшем нагружении переход от точки  $A$  к точке  $B$  идет так же, как в случае однократного нагружения. Однако, если повторные нагружения производить на сжатие, упрочнения не будет.

### 11.3 Пределы текучести и прочности

На рисунке 11.3 изображена кривая зависимости между условным напряжением и деформаций  $\varepsilon$ .

Условное напряжение

$$\sigma = \frac{F}{A_0} = \frac{4F}{\pi d_0^2}, \quad (11.7)$$

где  $d_0$  – первоначальный диаметр образца. Уже при  $\varepsilon \approx 1\%$  заметна разность между напряжениями (11.7) и истинным напряжением

$$\sigma_{\text{и}} = \frac{F}{A} = \frac{4F}{\pi d^2}, \quad (11.8)$$

где  $d$  – диаметр, изменившийся в процессе нагружения – деформирования.

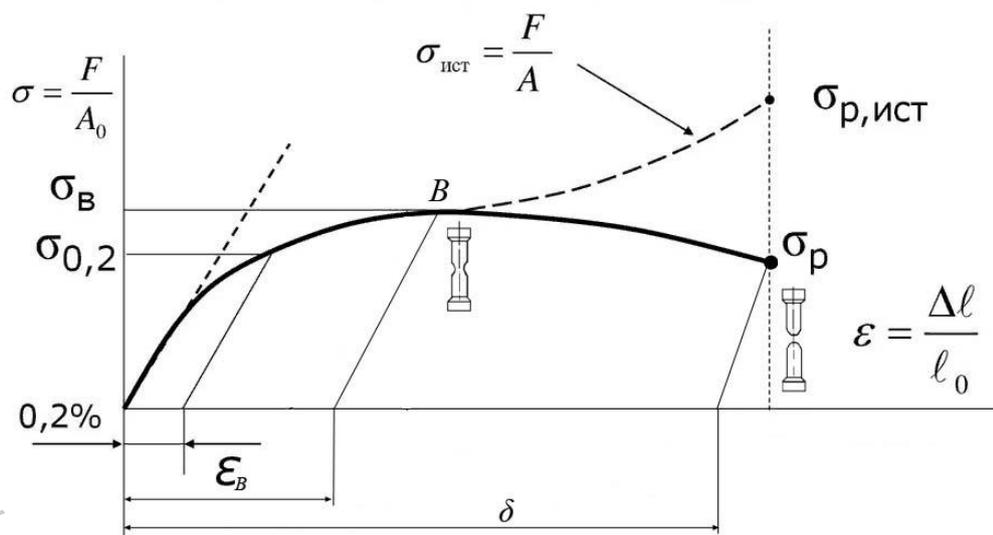


Рисунок 11.3 – Пределы пластичности и прочности на диаграмме деформирования

Наиболее важные характеристики сопротивления материала внешним нагрузкам – пределы текучести (пластичности) и прочности. Поскольку переход от упругости к появлению пластических деформаций плавный, условились назначить границу, по достижении которой пластическая деформация признается существенной – 0,2 %. Важнейшая характеристика – предел прочности

$$\sigma_{\sigma} = \frac{F_{\max}}{A_0} \quad (11.9)$$

На последнем этапе растяжения образца в цилиндрической части образца образуется местное сужение («шейка»). Процесс деформирования идет при уменьшающемся усилии  $F$ , ибо в момент  $B$  равномерное по длине пластическое сужение образца теряет устойчивость, на последнем этапе образец деформируется лишь в зоне шейки.

Истинное сопротивление (11.8) разрыву  $\sigma_{up} > \sigma_{\sigma}$  (рис. 11.3). Однако величины  $F_{\max}$  и  $A_0$  определяются просто, поэтому условились характеризовать прочность пределом (11.9).

#### 11.4 Пределы текучести и прочности при сжатии

При сжатии длинного образца ось его может искривиться (теряется устойчивость прямолинейной формы равновесия образца).

Образцы для испытания на сжатие следует делать короткими – с малым отношением  $l/d$ .

Но вместе с этим растет влияние сил трения между опорными поверхностями. Чтобы уменьшить влияние сил трения, торцы образца смазываются консистентными смазками – вазелином, парасоином и т. п.

Хрупкие образцы разрушаются при деформациях в несколько процентов, основное значение приобретает предел прочности. Заметим, что прочность хрупких материалов на сжатие во много раз больше прочности при растяжении.

Пластичные образцы расширяются при сжатии, за счет трения «расплющиваются». Четко определяется предел текучести (для большинства пластических конструкционных материалов такой же, как при растяжении). Предел прочности не выявляется.

При всестороннем сжатии материал выдерживает сверхвысокие давления, хрупкие материалы становятся пластичными.

Можно считать, что пластические материалы способны выдержать большие сжимающие нагружения и разрушаются из-за наличия касательных напряжений в наклонных площадках.

## 11.5 Пластичность и хрупкость

Диаграммы деформирования пластичных и хрупких материалов (рис. 11.4) редко различаются. Первые располагают к моменту разрушения остаточным удлинением  $\delta > 10$  %, вторые –  $\delta > 3$  %. Пластичные материалы способны к относительно высокому сопротивлению в условиях концентрации напряжений, при наличии трещин и поверхностных повреждений, ударных и тепловых воздействий.

Хрупкие материалы, даже отличающиеся высокими пределами прочности, не могут использоваться в конструкциях, ибо малейший поверхностный дефект (риска, царапина и т. п.) резко снижает прочность.

Они часто не позволяют сварку, клепку, правку, не выдерживают перегрузок в монтаже. Однако, если исключить концентраторы напряжений и работу на растяжение, хрупкие материалы даже при 1–3 % удлинения при разрыве могут оказаться работоспособными (пример тому жаропрочные литые материалы лопаток турбин).

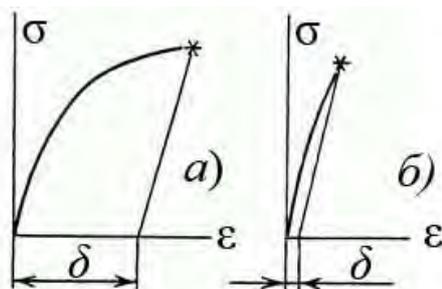


Рисунок 11.4 – Диаграммы деформирования пластичного а) и хрупкого б) материалов

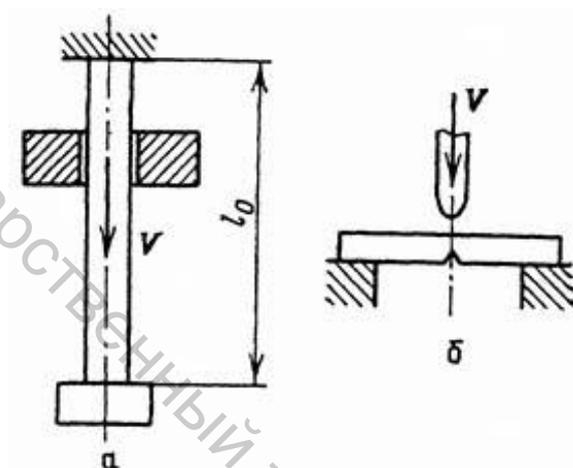


Рисунок 11.5 – Схемы испытания на удар: а) испытание на ударное растяжение, б) испытание на ударный изгиб

Оценить хрупкость и пластичность материала проектируемой детали возможно испытанием на удар (рис. 11.5). Груз падает и ударяет по образцу – разность «энергия груза до удара – энергия груза после удара» равна работе, поглощенной в деформацию образца. Работа деформации

$$W = \int_0^{u_k} F(u) du = A_0 \ell_0 \int_0^{u_k} \frac{F}{A_0} \frac{du}{\ell_0} = A_0 \ell_0 \int_0^{\delta} \sigma d\varepsilon = A_0 \ell_0 W_1, \quad (11.10)$$

где  $W_1$  – работа деформации единицы объема материала, равная (рис. 11.6) заштрихованной на рисунке 11.6 площади диаграммы деформирования,  $\delta$  – предельное удлинение, отвечающее перемещению головки образца  $u_k$  в момент, предшествующий разрушению.

В обычной практике образцы снабжают концентраторами напряжений – тогда энергия удара (11.10) поглощается в небольшой области, её относят к площади поперечного сечения образца, полагая ударную вязкость

$$a_H = \frac{W}{A_0} \quad (11.11)$$

Материалы с ударной вязкостью (11.11), не превышающей 30 Нм/см<sup>2</sup>, относят к хрупким.

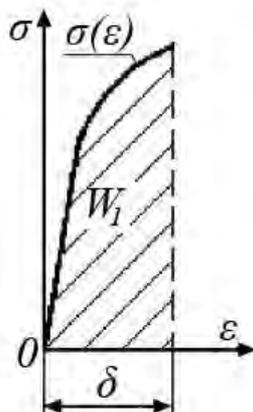


Рисунок 11.6 – Работа разрушения единицы объема

Еще одна важная характеристика хрупкости материала – чувствительность концентрации напряжений. С целью выяснить её, берут образцы с выточкой а) и образцы с предварительно нанесенной трещиной б) (рис. 11.7).

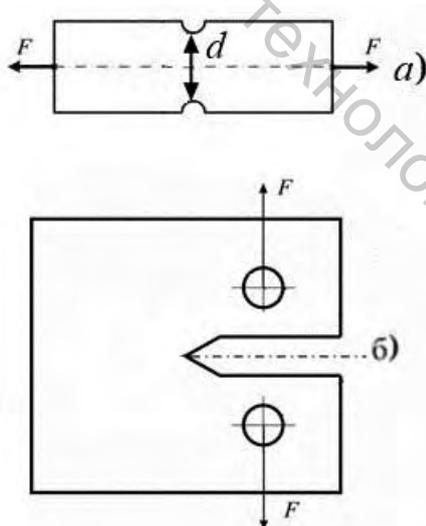


Рисунок 11.7 – Образцы с концентраторами напряжений

### 11.6 Характеристики пластичности

При растяжении увеличивается не только длина образца, уменьшаются его поперечные размеры – соответствующая упругая деформация

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{d-d_0}{d_0} = -\mu\varepsilon = -\mu \frac{l-l_0}{l_0}, \quad (11.12)$$

где  $d_0$ ,  $l_0$  – первоначальные размеры образца (рис. 11.1),  $\mu$  – коэффициент Пуассона (для большинства конструкционных материалов  $\mu \approx 0,3$ ).

Объемная деформация

$$\varepsilon_V = \frac{V-V_0}{V_0} = \frac{Al-A_0l_0}{A_0l_0}, \quad V_0 = A_0l_0, \quad (11.13)$$

или

$$\begin{aligned} \varepsilon_V &= \frac{Al}{A_0l_0} - 1 = \frac{\pi d^2 4}{4\pi d_0^2} \cdot \frac{l_0 + \varepsilon l_0}{l_0} - 1 = \\ &= \frac{(d_0 + \varepsilon_{\perp} d_0)^2}{d_0^2} \cdot \frac{l_0 + \varepsilon l_0}{l_0} - 1; \end{aligned}$$

Используя здесь определение (11.12), получим деформацию (11.13) в виде

$$\varepsilon_V = (1 - \mu\varepsilon)^2(1 + \varepsilon) - 1 \approx (1 - 2\mu)\varepsilon. \quad (11.14)$$

При растяжении деформация (11.14) не отрицательна, следовательно, коэффициент Пуассона

$$0 < \mu \leq 0,5.$$

В упругопластической стадии коэффициент (11.12) зависит от величины деформации  $\varepsilon$ ; при росте деформации (с появлением значительных пластических деформаций)  $\mu \rightarrow 0,5$ : пластическая деформация протекает без изменения объема материала (ибо пластическая деформация образуется за счет сдвига слоев материала).

Важная характеристика пластичности материала – остаточные (относительные) удлинения при разрыве (рис. 11.3)

$$\delta = \frac{l_K - l_0}{l_0} 100\%. \quad (11.15)$$

Вторая важная характеристика – сужение поперечного сечения при разрыве

$$\Psi = \frac{A_0 - A_K}{A_0} \cdot 100\%. \quad (11.16)$$

В характеристиках (11.15), (11.16)  $l_K$  и  $A_K$  – конечная длина контрольного участка и площадь поперечного сечения шейки (рис. 11.3). Величина (11.16) не зависит от геометрической формы цилиндрического образца, чего нельзя сказать о величине (11.15), зависящей от отношения  $l_0/d_0$  (поскольку длина шейки, входящая в длину  $l_K$ , не зависит от этого отношения).

Выделим слой материала, содержащего шейку (рис. 11.8): из условия постоянства объема

$$A_K \Delta_K = A_0 \Delta_0 \quad (11.17)$$

находим на основе определений (11.15–11.16)

$$\frac{A_K}{A_0} = 1 - \Psi,$$

$$\frac{\Delta_K}{\Delta_0} = 1 + \varepsilon_K,$$

$$\frac{A_K}{A_0} = \frac{\Delta_0}{\Delta_K}, \quad 1 - \Psi = \frac{1}{1 + \varepsilon_K}, \quad (11.18)$$

условие (11.17, 11.18) дает равенство

$$\Psi = \frac{\varepsilon_K}{1 + \varepsilon_K}, \quad \varepsilon_K = \frac{\Psi}{1 - \Psi}. \quad (11.19)$$

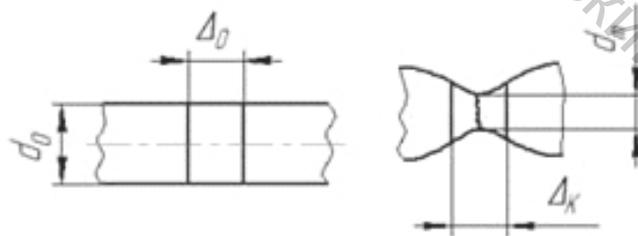


Рисунок 11.8 – Деформация в зоне шейки

Заметим: деформация  $\varepsilon_K$  в формулах (11.19) существенно больше остаточного удлинения (11.15), поскольку выражает местную, а не среднюю деформацию на длине  $l_0$ ,

$$\delta < \Psi < \varepsilon_K.$$

## Лекция 12

### Истинные диаграммы деформирования и их схематизация

#### 12.1 Истинная и условная диаграммы деформирования

Истинная диаграмма (рис. 12.1) представляет зависимость истинного напряжения от истинного удлинения. Истинное и условное напряжения (11.8, 11.7)

$$\sigma_{\text{и}} = \frac{F}{A}, \quad \sigma = \frac{F}{A_0},$$

приращение истинного удлинения меньше условного:

$$d\varepsilon_{\text{и}} = \frac{dl}{l} < \frac{dl}{l_0}, \quad (12.1)$$

истинное удлинение

$$\varepsilon_{\text{и}} = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right). \quad (12.2)$$

При относительно небольших деформациях ( $\varepsilon < 5\%$ ) различие между диаграммами незначительно.

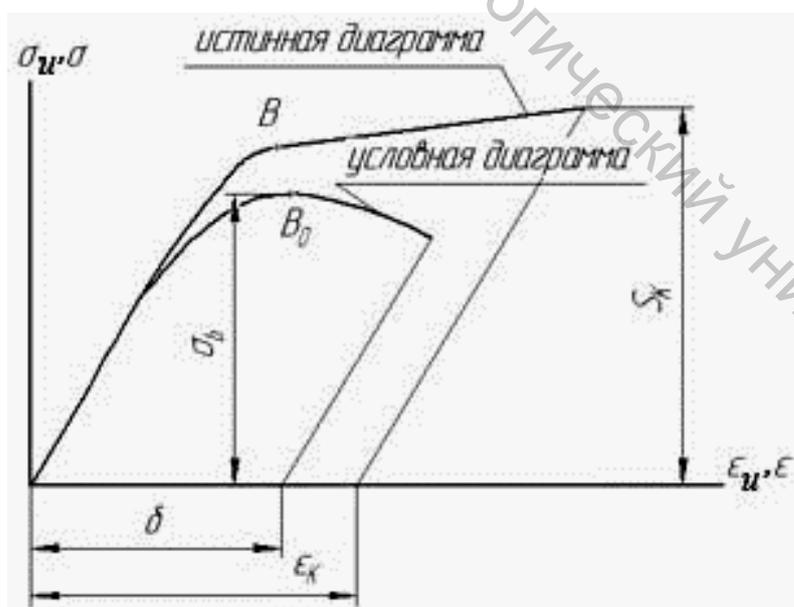


Рисунок 12.1 – Условная и истинная диаграммы

## 12.2 Истинные предел прочности и сопротивление разрыву

Усилие, растягивающее образец,

$$F = \sigma_{и}A. \quad (12.3)$$

В момент достижения  $F_{max}$  (рис. 11.3)

$$dF = \sigma_{и}dA + Ad\sigma_{и} = 0,$$

откуда

$$\frac{d\sigma_{и}}{\sigma_{и}} = -\frac{dA}{A}, \quad (12.4)$$

положим, объем образца неизменным:

$$d(Al) = ldA + Adl = 0,$$

откуда

$$\frac{dA}{A} = -\frac{dl}{l},$$

или – см. приращение (12.1) –

$$\frac{dA}{A} = -d\varepsilon_{и}, \quad (12.5)$$

что вкупе с уравнением (12.4) дает производную в точке В

$$\frac{d\sigma_{и}}{d\varepsilon_{и}} = \sigma_{иВ}. \quad (12.6)$$

Наибольшее усилие (12.3)

$$F_{max} = \sigma_{иВ} \cdot A_B = \sigma_b \cdot A_0,$$

откуда истинный предел прочности – см. соотношения (11.18) и рисунок 11.8 –

$$\sigma_{иВ} = \sigma_b \frac{A_0}{A_B} = \sigma_b \frac{\Delta_B}{\Delta_0} = \sigma_b (1 + \varepsilon_b). \quad (12.7)$$

В формуле (12.7)  $\varepsilon_b$  – относительное удлинение материала, соответствующее пределу прочности  $\sigma_b$ , равное  $(0,1-0,4)\delta$ .

Истинное сопротивление отрыву, т. е. напряжение в момент разрушения

$$S_K = \frac{F_{\text{разр}}}{A_K} = \frac{F_{\text{разр}}}{F_{\text{max}}} \cdot \frac{F_{\text{max}}}{A_K} = K \sigma_b \cdot \frac{A_0}{A_K} = K \frac{\sigma_b}{1-\psi}. \quad (12.8)$$

В формуле (12.8)  $K = F_{\text{разр}}/F_{\text{max}}$  – коэффициент разрушающей нагрузки (обычно  $0,6 < K < 1$ ).

Истинное удлинение в разрушениях (12.2) – см. рисунок 11.8 –

$$\varepsilon_K = \ln \frac{\Delta_K}{\Delta_0} = \ln \frac{A_0}{A_K} = \ln \frac{1}{1-\psi}. \quad (12.9)$$

В формулах (12.8), (12.9)  $\psi$  – относительное сужение при разрыве.

### 12.3 Касательный модуль

В расчете элементов конструкций в упругопластической стадии используют истинные кривые деформирования (индекс и в обозначениях истинных напряжений и деформаций опустим). На рисунке 12.2 показана истинная диаграмма деформирования. Важная характеристика – касательный модуль,

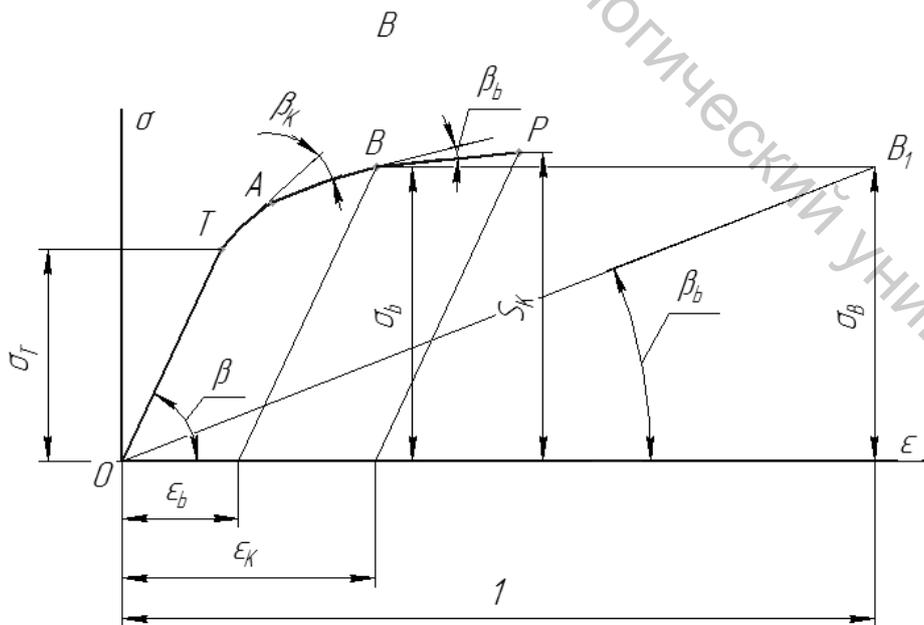


Рисунок 12.2 – Истинная кривая деформирования

$$E_k = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}. \quad (12.10)$$

В упругой стадии модуль

$$E = \operatorname{tg}\beta.$$

В момент образования шейки

$$dF = d(\sigma A) = Ad\sigma + \sigma dA = A \left( \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \Big|_b - \sigma_b \right) d\varepsilon = 0$$

см. соотношение (12.5), откуда находим касательный модуль в точке В:

$$E_{KB} = \operatorname{tg}\beta_b = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \Big|_b = \sigma_{nB}.$$

## 12.4 Схематизация кривых деформирования

В простой схематизации диаграмму полагают состоящей из двух участков – упругого и линейного упрочнения. На рисунке 12.3 в качестве «опорных» точек берут точки Т и В. На рисунке 12.4 берут предел текучести и истинные сопротивления отрыву (12.8).

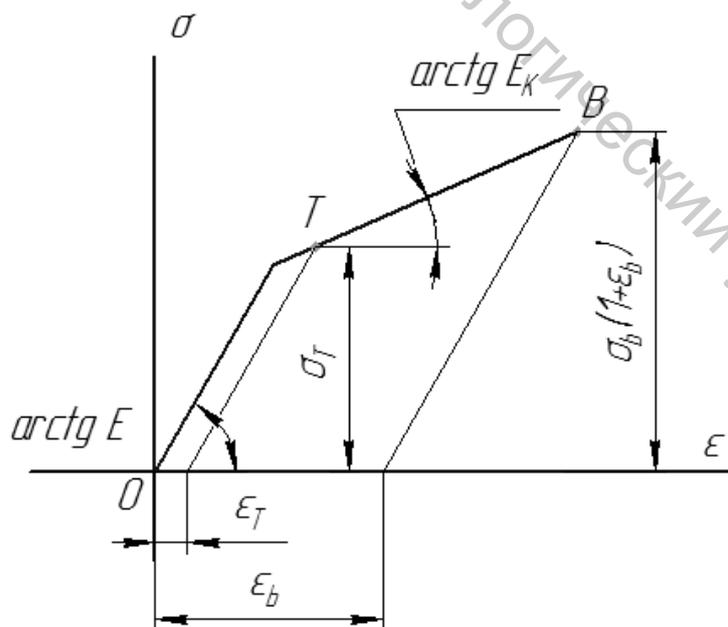


Рисунок 12.3 – Линейное упрочнение по пределам прочности и текучести

### Соответствующие касательные модули

$$E_k = \frac{\sigma_b(1 + \varepsilon_b) - \sigma_T}{\varepsilon_b - \varepsilon_T}, \quad E_k \approx \frac{S_k - \sigma_T}{\varepsilon_k - \varepsilon_T}.$$

Во многих задачах принимают схематизации без упрочнения (рис. 12.5).

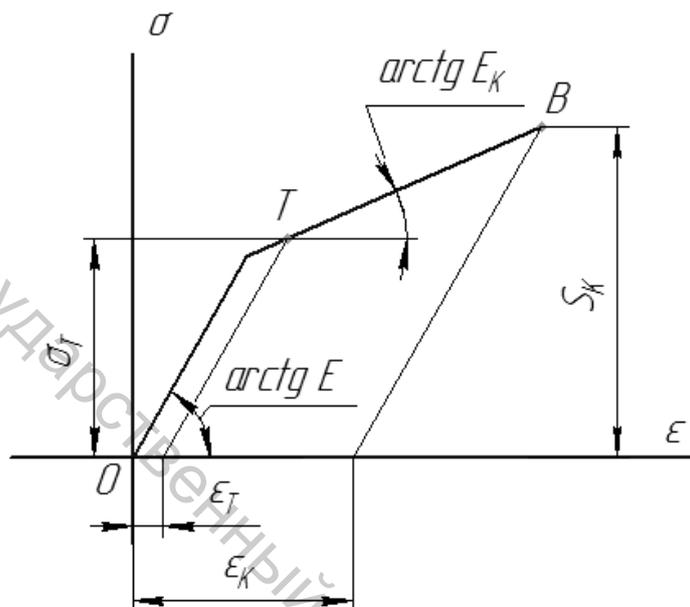


Рисунок 12.4 – Линейное упрочнение по истинному сопротивлению отрыва и пределу текучести

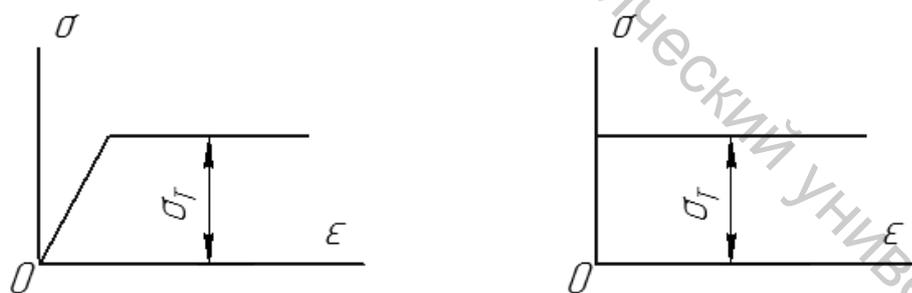


Рисунок 12.5 – Идеальные пластическое и жесткопластическое тела

Развитые пластические деформации учитываются степенной аппроксимацией

$$\varepsilon = \varepsilon_T \left( \frac{\sigma}{\sigma_T} \right)^n = B \sigma^n. \quad (12.11)$$

## Лекция 13

### Ползучесть, длительная прочность, усталость

#### 13.1 Ползучесть и длительная прочность

Работа конструкции часто сопрягается с высокими температурами (например, элементы конструкций сверхзвуковых самолетов нагреваются в полете до 200 градусов и выше, детали газовых турбин двигателей работают при 600–1000 градусов), в таких условиях конструкционные материалы обнаруживают свойства ползучести и длительной прочности. В ползучести пластические деформации растут при постоянных нагрузках, под длительной прочностью понимают зависимость пределов прочности от длительности работы.

Указанные свойства проявляются у углеродистых сталей при температуре выше 350 градусов, у некоторых материалов, например у бетонов и полимеров – при нормальных температурах.

Пределы прочности и текучести, определенные в кратковременных испытаниях, снижаются, снижается и модуль упругости (на 30–40 %).

Соответственно возникает необходимость в длительных испытаниях материалов.

#### 13.2 Пределы ползучести

На рисунке 13.1 изображена кривая ползучести. Начальная деформация образца не учитывается. Пластическая (остаточная) деформация  $\varepsilon_c$ , растущая во времени  $t$  при постоянном напряжении, называется деформацией ползучести,  $V$  – скорость ползучести:

$$V = \frac{d\varepsilon_c}{dt}. \quad (13.1)$$

В стадии I (OA) неустановившейся ползучести скорость ползучести постепенно снижается. Минимальная скорость (13.1) достигается в стадии II (AB). Третья стадия отвечает разрушению образца: на образце возникает сетка трещин, стадия заканчивается хрупким изломом или вязким изломом с шейкой при сравнительно высоких напряжениях.

Ползучесть материала оценивается пределом ползучести, т. е. напряжением, при котором деформация  $\varepsilon_c$  достигает за определенное время заданной величины. В обозначении предела ползучести указывается величина деформации, например, 0,2 %, температура, например, 700° С, время, например, 100 ч:

$$\sigma_{\frac{0,2}{100}}(700) = 400 \text{ МПа}$$

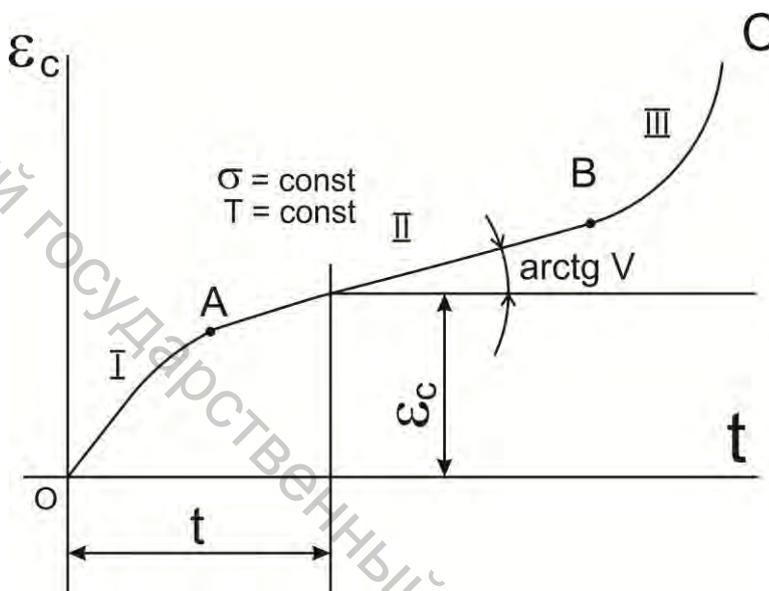


Рисунок 13.1 – Кривая ползучести

Деформации ползучести вполне сопоставимы с упругими деформациями, что приводит, например, к релаксации (падению) напряжений затяжки болтов.

### 13.3 Скорость ползучести

В стадии II (AB) скорость (13.1) постоянна. На основе экспериментов была установлена степенная зависимость

$$V = B\sigma^n. \quad (13.2)$$

В зависимости (13.2)  $B$  и  $n$  – параметры материала, зависящие от температуры  $T$ . В логарифмических координатах  $lgV$ ,  $lg\sigma$  зависимость (13.2) выглядит линейной. Параметр  $n$  обычно находится в пределах 3–6, т. е. зависимость скорости (13.1) от напряжения  $\sigma$  весьма существенна.

### 13.4 Предел длительной прочности

Длительная прочность материала ограничивает ресурс изделий, возникает необходимость в учете времени нагружения. Пределом длительной прочности называют напряжение, при котором материал разрушается не ранее заданного времени. В обозначении предела указывается длительность нагружения в часах и температура испытания в градусах Цельсия, например,

$$\sigma_{\text{дл}1000}(700)=330 \text{ МПа}$$

(1000 часов, 700 °С). В случае кратковременных испытаний того же сплава

$$\sigma_b = 830 \text{ н/мм}^2, \quad \sigma_{0,2} = 560 \text{ н/мм}^2$$

(во многих случаях пределы длительной прочности ниже пределов текучести в кратковременных испытаниях).

На рисунке 13.2 показана степенная зависимость предела  $\sigma_{\text{дл}}$  от времени  $t_p$  нагружения.

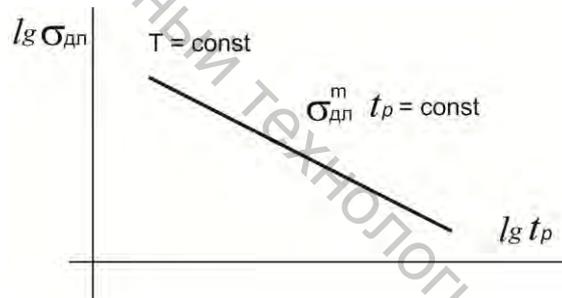


Рисунок 13.2 – Длительная прочность в логарифмических координатах

С увеличением температуры предел длительной прочности падает (рис. 13.3). Параметр  $m = 4 \div 10$ , что указывает не сильную зависимость времени до разрушения от уровня действующих напряжений.

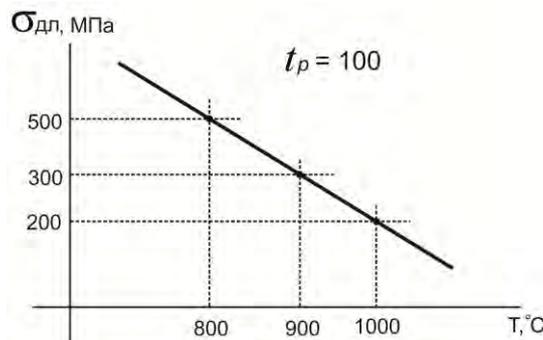


Рисунок 13.3 – Зависимость предела длительной прочности от температуры

### 13.5 Усталость материалов

Основной вид разрушения деталей машин – внезапно возникающие усталостные поломки без заметной пластической деформации (как правило, в зонах концентрации напряжений).

При повторном циклическом деформировании в неблагоприятно расположенных зернах материала накапливаются микропластические деформации, приводящие к растущей микротрещине с концентрацией напряжений у ее краев. Поперечное сечение детали ослабевает, его статическая прочность оказывается недостаточной, следует разрушение (излом) детали. На поверхности излома обнаруживаются 2 зоны. Зона развития трещины гладкая, ибо при повторяющихся сближениях неровности на «берегах» трещины стираются. Если нагрузка невелика, усталостная зона излома может составить 50–70 % общей площади излома.

Усталостный излом начинается в местах, где действуют наибольшие переменные напряжения, обычно на поверхности детали, причём может возникнуть несколько очагов развития усталостной трещины (от забоин, рисок, концентраторов напряжений). Разрушение от усталости носит (в отличие от статического) резко выраженный местный характер.

### 13.6 Циклы переменных напряжений

На рисунке 13.4 изображён цикл переменных напряжений. Цикл может быть получен как результат наложения постоянной составляющей (среднего напряжения)

$$\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_{max} + \sigma_{min}) \quad (13.3)$$

и периодически изменяющихся напряжений с амплитудой

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min}). \quad (13.4)$$

Переменная составляющая изменяется во времени:

$$\sigma(t) = \sigma_a \cos\left(\frac{2\pi}{t_c} t\right) = \sigma_a \cos(2\pi ft), \quad (13.5)$$

где  $f = 1/t_{ц}$  – частота колебаний с амплитудой (13.4) напряжений (13.5). Если среднее напряжение (13.3)  $\sigma_m = 0$ , цикл (рис. 13.4) называется симметричным, при  $\sigma_m \neq 0$  цикл асимметричный.

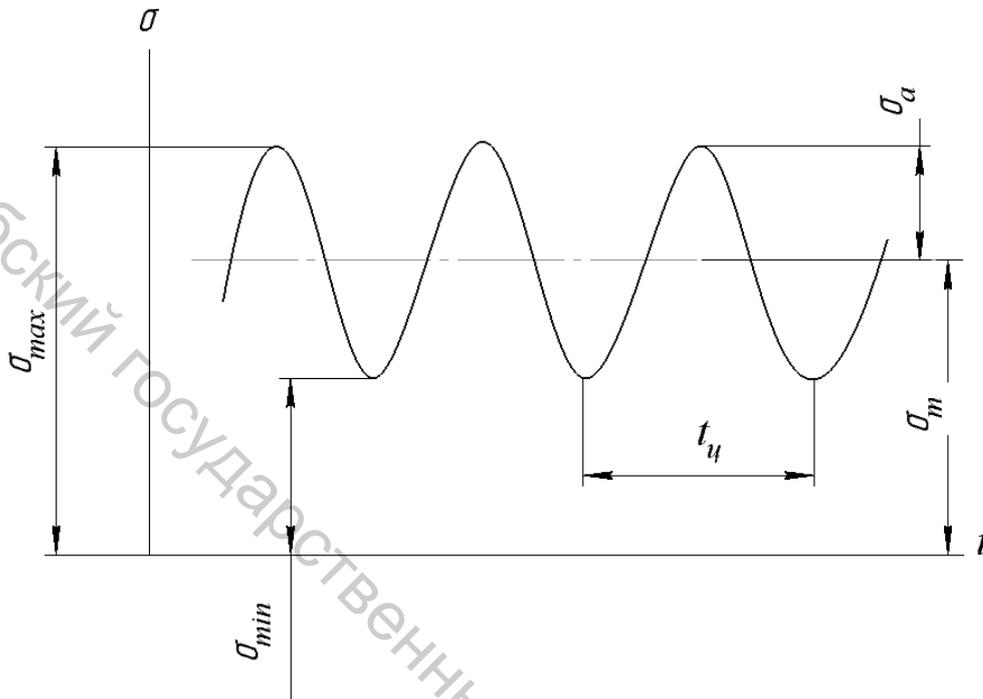


Рисунок 13.4 – Цикл переменных напряжений

Цикл напряжений (рис. 13.4) характеризуется коэффициентом асимметрии

$$r = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}. \quad (13.6)$$

Для симметричных циклов коэффициент (13.6)  $r = -1$ ; для пульсирующих (отнулевых)  $\sigma_{min} = 0$ , т. е.  $r = 0$ ; при действии постоянных напряжений  $\sigma_{min} = \sigma_{max}$ , т. е.  $r = +1$ .

### 13.7 Кривые выносливости

На рисунке 13.5 показаны кривые выносливости (в логарифмических координатах) трёх типов – зависимости среднего числа циклов до разрушения  $N$  от амплитуды переменных напряжений  $\sigma_a$ .

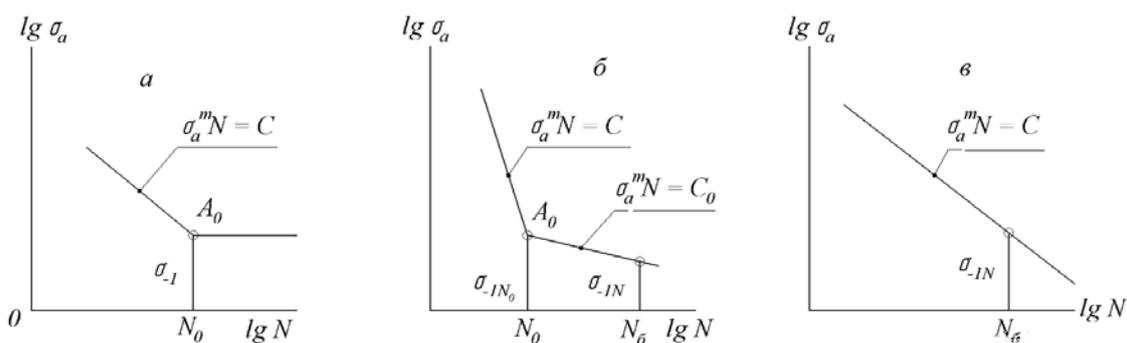


Рисунок 13.5 – Кривые выносливости

Кривая типа *a* свойственна углеродистым сталям. Точка перелома кривой  $A_0$  отвечает числу  $N = 10^6 - 10^7$ , её ордината называется пределом выносливости. При амплитуде  $\sigma_a < \sigma_{-1}$  усталостное разрушение невозможно.

Ранее, когда работали, в основном, с углеродистыми сталями, считалось, что предел выносливости существует для всех конструкционных материалов. В дальнейшем убедились, что для многих материалов снижение усталостной прочности продолжается (кривые *b* и *v*). Усталостное разрушение после точки  $A_0$  замедляется (кривая *b* – характерна для легированных сталей) или снижается неизменным темпом (кривая *v* – характерна для алюминиевых сплавов). Условным пределом выносливости  $\sigma_{-1N}$  называется амплитуда напряжения, при котором материал образца разрушается при базовом числе циклов  $N_6$  ( $2 \cdot 10^6 - 5 \cdot 10^7$ ).

Уравнение кривых выносливости см. на рисунке 13.5 (значения  $m$  обычно лежат в пределах  $4 \div 12$ , значения  $m_0 = (5 \div 10)m$ , с возрастанием  $m_0$  линия второго участка приближается к направлению оси абсцисс).

### 13.8 Влияние постоянных напряжений (13.3), концентрации напряжений, поверхностного слоя, абсолютных размеров деталей

Из экспериментов следует: наличие средних (13.3) растягивающих ( $\sigma_m > 0$ ) напряжений снижает предел выносливости (рис. 13.6).

Замечено, что при сжимающих напряжениях ( $\sigma_m < 0$ ) усталостная прочность возрастает, что даёт основания для применения упрочняющих технологий (обдувка дробью, шариками и т. п.), создающих остаточные сжимающие напряжения в наиболее напряжённых поверхностных слоях деталей.

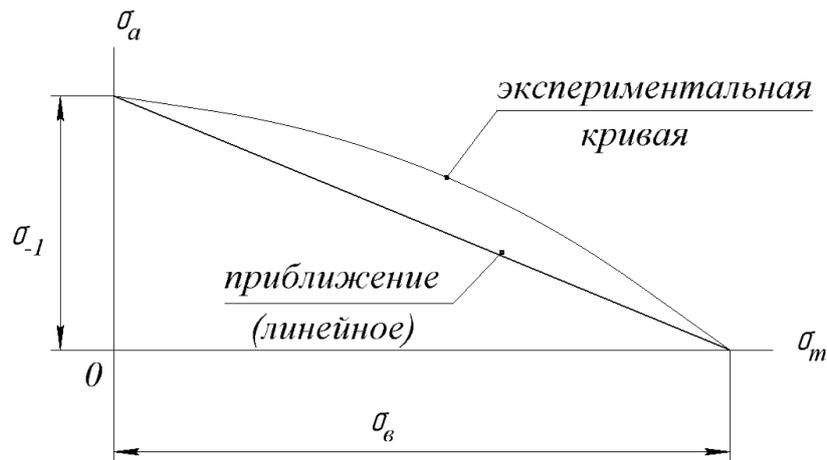


Рисунок 13.6 – Зависимость предела выносливости от среднего напряжения

Приближённая зависимость предельной амплитуды от среднего напряжения  $\sigma_m$  – нелинейная зависимость

$$\sigma_k = \sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_m, \quad (13.7)$$

коэффициент в аппроксимации (13.7)  $\psi_\sigma = \sigma_{-1}/\sigma_B$ , или

$$\sigma_r = \sigma_{-1} \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_B}\right).$$

Усталостное разрушение носит местный характер, чем определяется очень сильное влияние на усталостную прочность концентрации напряжений. Наибольшее напряжение в месте концентрации напряжений (для упругого материала)

$$\sigma_{max} = \alpha_\sigma \sigma_H, \quad (13.8)$$

где  $\alpha_\sigma$  – теоретический коэффициент концентрации напряжений  $\sigma$ ,  $\sigma_H$  – номинальное напряжение, способ определения которого должен быть оговорен (он должен отвечать данному в справочнике коэффициенту  $\alpha_\sigma$ ). Для случая концентрации напряжений вблизи отверстия в пластине (рис. 13.7)  $\sigma_H = \sigma(H - d)/H$ .

Если считать, что усталостное разрушение происходит в момент, когда в точке максимума напряжения достигается предел выносливости, предел выносливости детали с концентрацией напряжений – см. формулу (13.8) –

$$\sigma_{-1k} = \frac{\sigma_{-1}}{\alpha_\sigma}.$$

В действительности

$$\sigma_{-1k} = \frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma}, K_\sigma < \alpha_\sigma, \quad (13.9)$$

где  $K_\sigma$  – эффективный коэффициент концентрации напряжений.

В практических расчетах коэффициент

$$K_\sigma = 1 + q(\alpha_\sigma - 1). \quad (13.10)$$

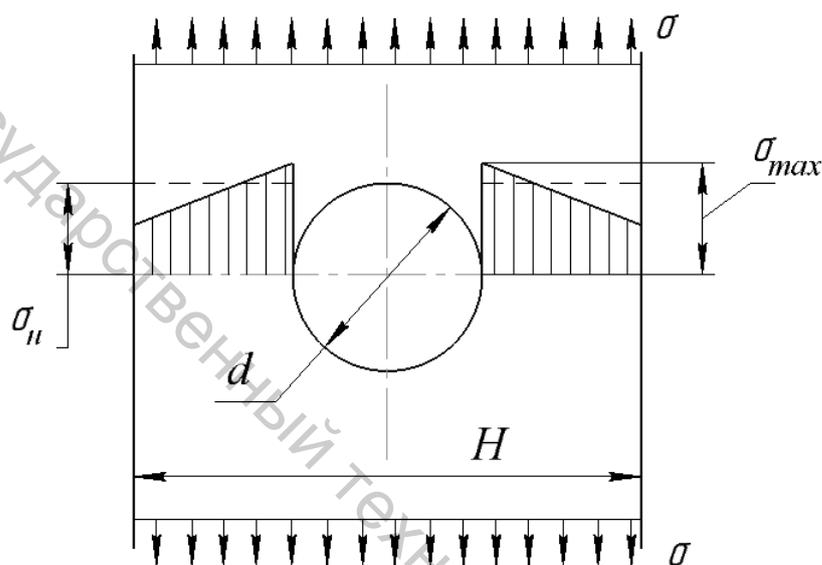


Рисунок 13.7 – Концентрация напряжений вблизи отверстия

Коэффициент  $q$  в формуле (13.10) – коэффициент чувствительности к концентрации напряжений (для малоуглеродистых сталей  $q = 0,2 - 0,4$ , для алюминиевых сплавов  $q = 0,3 - 0,5$ , для легированных сталей  $q = 0,6 - 0,8$ ).

Влияние поверхностного слоя зависит от качества поверхности (шероховатости) и поверхностного упрочнения:

$$\sigma_{-1n} = \beta \sigma_{-1}, \quad (13.11)$$

где коэффициент влияния поверхностного слоя

$$\beta = \beta_{ш} \cdot \beta_{уп}. \quad (13.12)$$

В произведении (13.12)  $\beta_{ш}$  – коэффициент, учитывающий шероховатость поверхности (для полированной поверхности  $\beta_{ш} = 1$ , для шлифованной, например,  $\beta_{ш} = 0,8-0,9$ );  $\beta_{уп}$  – коэффициент, учитывающий технологическое упрочнение (при обдувке дробью, например,  $\beta_{уп} = 1,1-1,4$ ).

С увеличением размеров деталей машин предел выносливости уменьшается (масштабный эффект), ибо в связи с этим растёт вероятность дефектов в зонах повышенных напряжений. Добавим, что с увеличением размеров деталей машин усложняются технологические процессы обработки, нарушается однородность материала и т. п.

Предел выносливости

$$\sigma_{-1д} = \varepsilon_{\sigma} \sigma_{-1}, \quad (13.13)$$

где  $\varepsilon_{\sigma}$  – коэффициент масштабного фактора,  $\sigma_{-1}$  – предел выносливости образца диаметром 10 мм.

Используя теперь определения (13.7, 13.9, 13.11), определим предел выносливости детали:

$$\sigma_{-1д} = \frac{\beta \varepsilon_{\sigma}}{K_{\sigma}} \sigma_{-1} \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_B} \right). \quad (13.14)$$

Определение (13.14) распространяется на случай кручения:

$$\tau_{-1д} = \frac{\beta \varepsilon_{\tau}}{K_{\tau}} \tau_{-1} \left( 1 - \frac{\tau_m}{\tau_B} \right),$$

где предел выносливости  $\tau_{-1} \approx 0,65 \sigma_{-1}$ .

### 13.9 Малоцикловая усталость

Малоцикловой усталостью называют разрушение при повторных упругопластических деформациях. Они происходят обычно при числе циклов  $N < 10^5$ . В машиностроении малоцикловая усталость определяет долговечность (ресурс) изделий в повторении циклов «запуск – работа – останов».

В обычной усталости в качестве характеристики нагруженности используются амплитуды напряжений  $\sigma_a$  (13.4). Переменные деформации однозначно определяются соотношением

$$\varepsilon_a = \frac{1}{E} \sigma_a.$$

В малоцикловой усталости, протекающей в упругопластической области (в процессах нагрузки и разгрузки), зависимость  $\varepsilon_a = f(\sigma_a)$  имеет сложный характер: для материалов с отсутствующим или малым упрочнением практически не является однозначной (рис. 13.8).

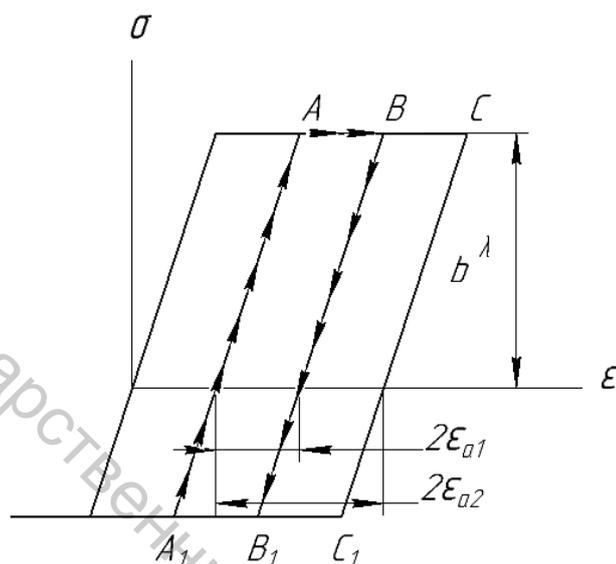


Рисунок 13.8 – Циклы напряжений и деформаций  $ABB_1A_1$ ,  $ACC_1A_1$

На рисунке 13.9 показаны циклы с близкими амплитудами  $\sigma_{a1}$  и  $\sigma_{a2}$  (мгновенными пределами текучести), но значительно отличающимися амплитудами переменных деформаций. Именно их целесообразно использовать при анализе малоцикловой усталости.

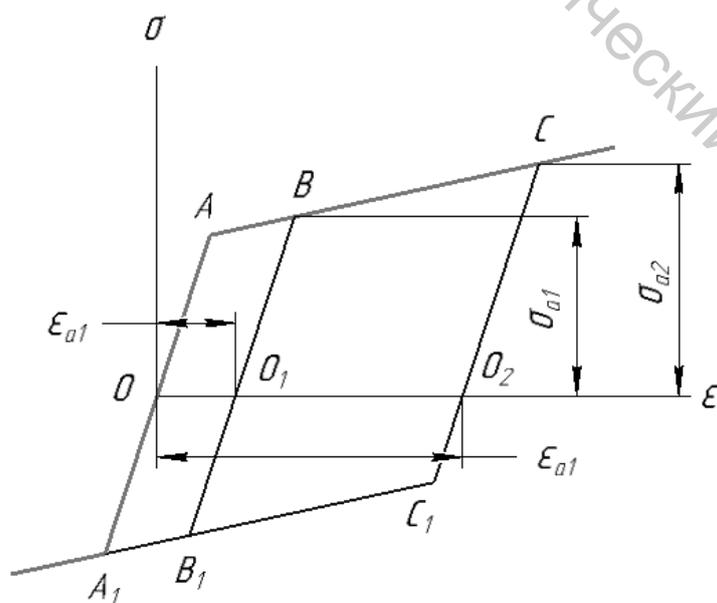


Рисунок 13.9 – Циклы напряжений и деформаций с пластическим упрочнением

### 13.10 Условия малоциклового разрушения

В жёстком нагружении (с постоянной амплитудой пластических деформаций  $\varepsilon_{ap} = (\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min})/2$ ) установлена зависимость (предложена Коффином)

$$\varepsilon_{ap}^{m_p} N_p = C_p. \quad (13.15)$$

В зависимости (13.15)  $N_p$  – среднее число циклов до малоциклового разрушения;  $C_p, m_p$  – параметры материала. Коффин определил константу  $C_p$ , используя уравнение (13.15) для случая однократного (статического) разрушения, приняв (условно)  $N_p = 1/4$  (нагружение производится в первой четверти цикла), положив  $m_p = 2$ ,  $\varepsilon_{ap} = \varepsilon_k / 2$ , где исходная деформация в момент разрушения (12.9)

$$\varepsilon_k = \ln \frac{1}{1-\psi};$$

$$C_p = \left( \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1-\psi} \right)^2 \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \left( \ln \frac{1}{1-\psi} \right)^2. \quad (13.16)$$

Внося постоянную (13.16) в условие малоциклового разрушения, получим

$$\varepsilon_{ap}^2 N_p = \frac{1}{16} \left( \ln \frac{1}{1-\psi} \right)^2. \quad (13.17)$$

Из соотношения (13.17) следует, что малоцикловая прочность зависит от пластичности материала; чем больше относительное сужение в шейке (11.16), тем выше прочность при повторных пластических деформациях.

Условие (13.17) не включает упругую деформацию цикла, т. е. должно использоваться в случаях, когда пластическая часть переменной деформации существенно превышает упругую часть ( $N_p < 10^3$ ). Формула Менсона, установленная экспериментально, связывает амплитуду полных деформаций (рис. 13.9) с числом  $N_p$ :

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2} \left( \ln \frac{1}{1-\psi} \right)^{0.6} N_p^{-0.6} + \frac{1.75\sigma_\varepsilon}{E} N_p^{-0.12}. \quad (13.18)$$

Учёт постоянной составляющей цикла  $\sigma_m$  (13.7) даст равенство (формулу Менсона)

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2} \left( \ln \frac{1}{1-\psi} \right)^{0.6} N_p^{-0.6} + 1.75 \frac{\sigma_b - \sigma_m}{E} N_p^{-0.12}.$$

Витебский государственный технологический университет

## Лекция 14 Модели пластичности

### 14.1 Модель пластичности

Во многих деталях машин (в особенности, в концентраторах напряжений) возникают в работе пластические деформации. Оценка надёжности в этих случаях требует разработки модели пластичности. Опять же это важно для определения несущей способности изделий, а также для теории многих технологических процессов (штамповки, вытяжки, волочения, гибки и т. п.).

В простейших случаях одноосного растяжения-сжатия и чистого сдвига связь напряжений с упругими деформациями устанавливалась законом Гука

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \tau = G\gamma. \quad (14.1)$$

В сложном напряжённом состоянии используется собственный закон Гука (7.8).

Вводя в рассмотрение интенсивность напряжений (4.9)

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{окт}, \quad (14.2)$$

где  $\tau_{окт}$  – октаэдрическое касательное напряжение – см. формулу (4.8) –

$$\tau_{окт} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{I_1^2 - 3I_2},$$

или, если использовать здесь инварианты тензора напряжений (2.5),

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)},$$

т. е. интенсивность напряжений (14.2) принимает вид

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \quad (14.3)$$

Закон Гука даёт решение уравнений (7.8) относительно деформаций  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ . Интенсивность напряжений (14.3),

выраженная в деформациях,

$$\sigma_i = E \frac{\sqrt{2}}{2(1+\mu)} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}. \quad (14.4)$$

Интенсивность деформации (6.9), выраженная через октаэдрический сдвиг (6.8),

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{\sqrt{2}}{2(1+\mu)} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2(1+\mu)} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}. \end{aligned} \quad (14.5)$$

Как видно из определений (14.4, 14.5), справедливо соотношение

$$\sigma_i = E \varepsilon_i. \quad (14.6)$$

Соотношение (14.6) можно рассматривать как одну из форм обобщённого закона Гука.

Переход из упругого состояния в пластическое связывается с удельной потенциальной энергией изменения формы (7.12) (Хубер, Мизес), а она (7.14) пропорциональна квадрату октаэдрического касательного напряжения.

Переход в пластическое состояние можно связать с напряжением  $\tau_{окт}$ , или с интенсивностью напряжений (14.3).

Для законов пластичности удобно избрать форму закона Гука (14.1):

$$\sigma = E' \varepsilon, \quad (14.7)$$

где величина  $E'$  рассматривается как функция деформации  $\varepsilon$  (рис. 14.1): секущий модуль

$$E' = \frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

В упругой стадии  $\phi' = \phi$ ,  $E' = E$ . Переходя к сложному напряжённому состоянию, обобщим соотношение (14.7), приняв

$$\sigma_i = E' \varepsilon_i, \quad (14.8)$$

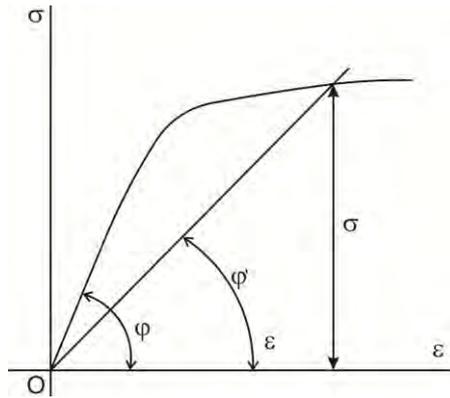


Рисунок 14.1 – Диаграмма растяжения

где величина  $E'$  рассматривается как переменная величина, а соотношение (14.8) переходит в выражение (14.6), переход упругого состояния в пластическое отвечает условию

$$\sigma_i = \sigma_\tau;$$

приходим к гипотезе Хубера-Мизеса.

Экспериментально установлено, что вид функции (14.8) определяется свойствами материала и не зависит (почти) от вида напряжённого состояния. Это положение – исходный пункт модели пластичности.

## 14.2 Соотношения пластичности

Второе положение – упругость изменения объёма (6.11). Пластические деформации, как правило, заметно больше упругих. Объёмная деформация (6.11) – величина порядка упругих удлинений. Можно принять неизменность деформации (6.11) в упругопластической стадии деформирования материала и, следовательно, (7.9) коэффициент Пуассона  $\mu = 1/2$ .

Выписывания соотношения пластичности по аналогии с обобщенным законом Гука (7.8), приняв в них вместо модуля Юнга  $E$  секущий модуль  $E'$ , вместо модуля сдвига (7.7) модуль  $G' = E'/3$  и коэффициент Пуассона  $\mu = \frac{1}{2}$ , получим

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E'} \left[ \sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right], \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E'} \left[ \sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x) \right], \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E'} \left[ \sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \right], \\
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G'}, \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G'}, \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G'},
\end{aligned}
\tag{14.9}$$

Согласно первому положению модели пластичности зависимость (14.8) одинакова для всех напряжённых состояний. В одноосном напряжённом состоянии (рис. 14.2) напряжения

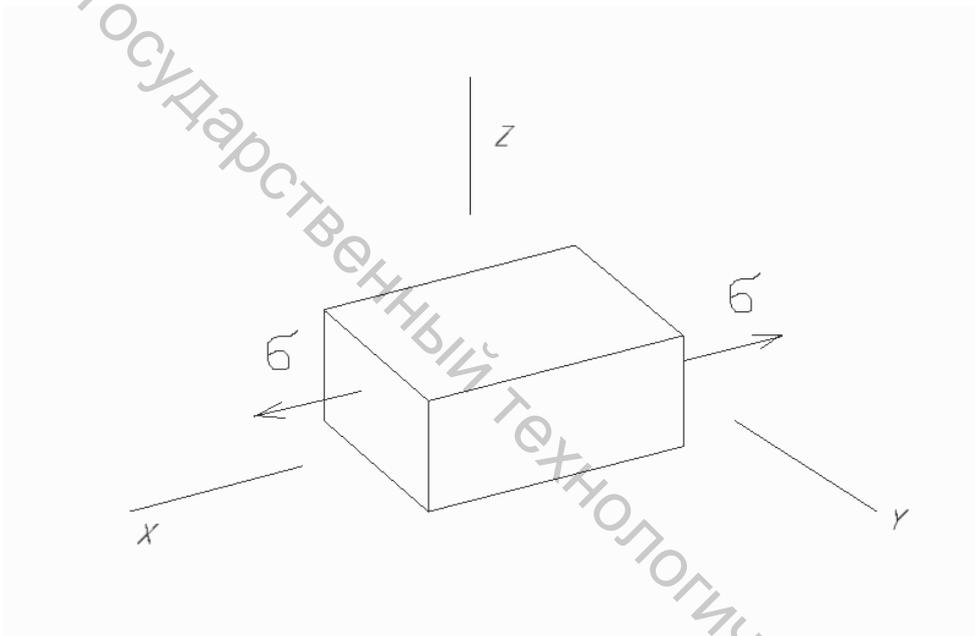


Рисунок 14.2 – Одноосное растяжение

$$\sigma_x = \sigma, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0,$$

деформации

$$\varepsilon_x = \varepsilon, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu\varepsilon, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0,$$

т. е. интенсивность напряжения (14.3)

$$\sigma_i = \sigma_x = \sigma,$$

интенсивность деформации (14.5)

$$\varepsilon_i = \varepsilon,$$

т. е. выражение (14.8) переходит в выражении (14.7) – зависимость (14.8) не отличается от обычной зависимости, задаваемой диаграммой растяжения (рис. 14.1, 14.3). Тогда секущий модуль

$$E' = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}. \quad (14.10)$$

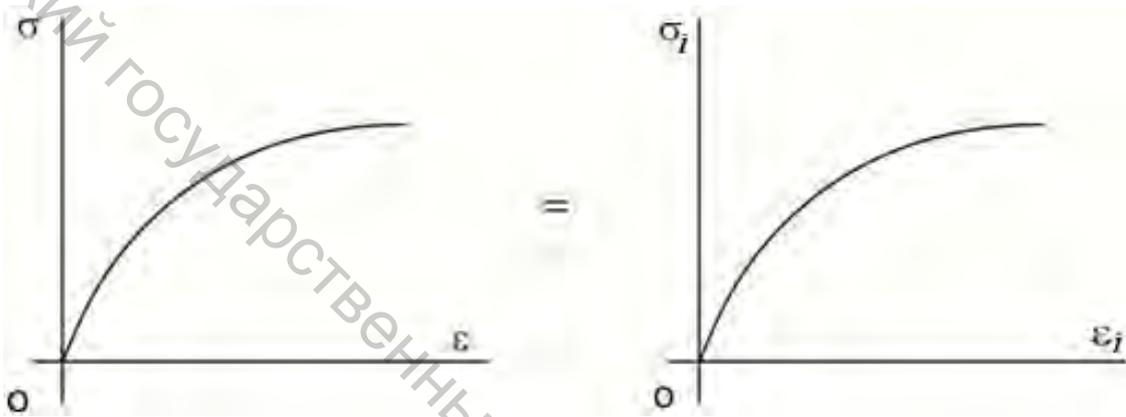


Рисунок 14.3 – Диаграммы деформирования (14.7) и (14.8)

Используя его в законе (14.9), перепишем (14.9):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \left[ \sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right], \\ \varepsilon_y &= \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \left[ \sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x) \right], \\ \varepsilon_z &= \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \left[ \sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \right], \\ \gamma_{yz} &= \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{yz}, \quad \gamma_{zx} = \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{zx}, \quad \gamma_{xy} = \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{xy}. \end{aligned} \quad (14.11)$$

Заметим: соотношения пластичности (14.11) считаются верными для тех видов нагружения, при которых внешние силы возрастают в процессе нагружения пропорционально некоторому параметру, например, времени. Тогда главные оси тензора напряжений сохраняют

свои направления. Такой вид нагружения называется простым нагружением.

### 14.3 Пример

Определим приращение диаметра цилиндрического бака (рис. 14.4) в зависимости от давления  $p$ . Диаграмма растяжения материала дана на рисунке 14.6.

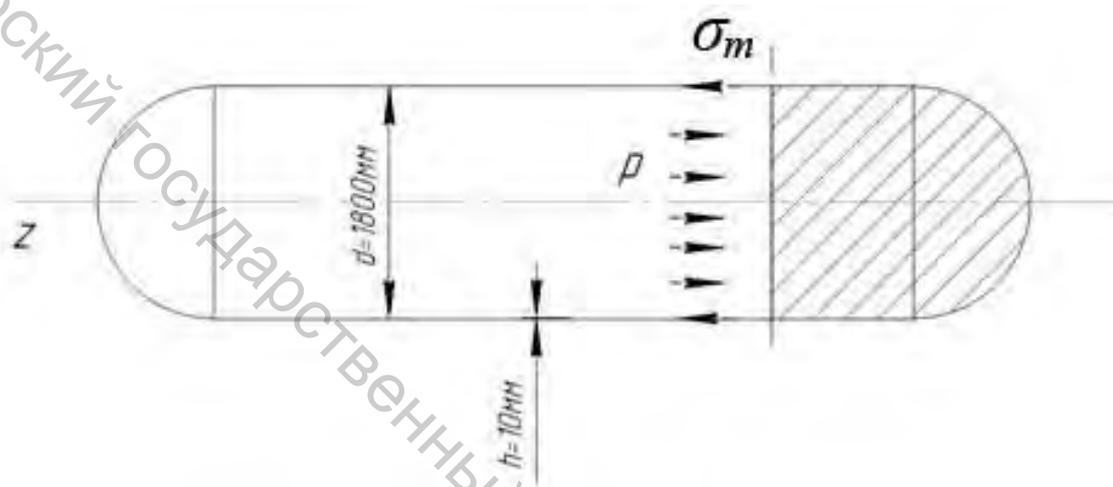


Рисунок 14.4 – Цилиндрический бак

Мысленно «вырежем» из оболочки (рис. 14.4) бесконечно малый фрагмент бесконечно короткого цилиндра длиной  $dz$  (рис. 14.5).

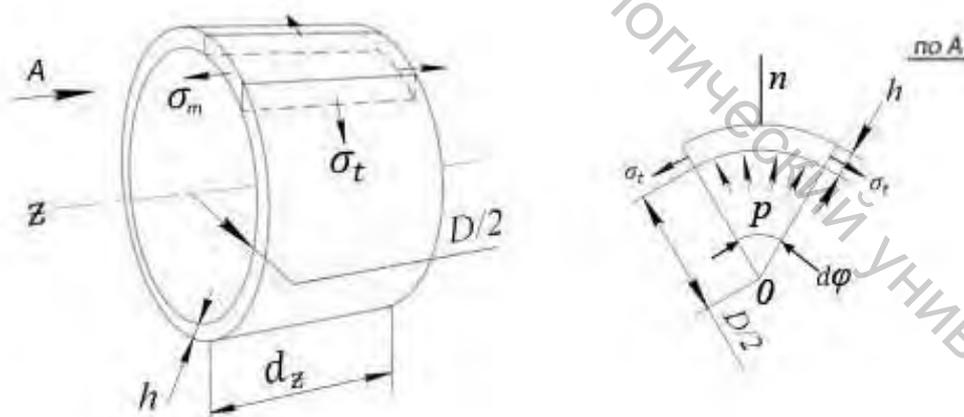


Рисунок 14.5 – Фрагмент цилиндрической оболочки

На него действуют равномерно распределенные по толщине  $h$  меридиональные  $\sigma_m$  и окружные напряжения  $\sigma_t$ , возникающие под давлением  $p$ . Спроектируем силы, действующие на фрагмент, на нормаль к оболочке  $n$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} p \cdot dz \left( \frac{D}{2} \cdot d\varphi \right) = 2\sigma_t h dz \frac{\sin(d\varphi)}{2}. \quad (14.12)$$

Из уравнения равновесия (14.12) находим окружные напряжения:

$$\sigma_t = \frac{pD}{2h} \gg p. \quad (14.13)$$

Рассмотрим теперь равновесие заштрихованной части оболочки:

$$\Sigma_z = 0, \quad p \frac{\pi D^2}{4} = (\pi Dh) \sigma_m,$$

$$\sigma_m = \frac{pD}{4h} \gg p.$$

Согласно закону (14.11)

$$\varepsilon_t = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \left[ \sigma_t - \frac{1}{2} \sigma_m \right] = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \frac{pD}{h} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) = \frac{3}{8} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \frac{pD}{h}. \quad (14.14)$$

Окружная деформация (относительное удлинение окружности цилиндра)

$$\varepsilon_t = \frac{\pi(D + \Delta D) - \pi D}{\pi D} = \frac{\Delta D}{D},$$

т. е. приращение диаметра

$$\Delta D = \varepsilon_t \cdot D = \frac{3}{8} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \frac{pD^2}{h}. \quad (14.15)$$

Интенсивность напряжений (14.3)

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_t - \sigma_m)^2 + (\sigma_t - p)^2 + (\sigma_m - p)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\sigma_t^2 - 2\sigma_t\sigma_m + \sigma_m^2 + \sigma_t^2 + \sigma_m^2} = \sqrt{\sigma_t^2 - 2\sigma_t\sigma_m + \sigma_m^2}. \end{aligned} \quad (14.16)$$

Используем в интенсивности (14.16) значения (14.13, 14.14):

$$\delta_i = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\rho D}{h}$$

Воспользуемся диаграммой деформирования на рисунке 14.6. Возьмем  $p = 2 \text{ МПа}$ . Соответствующие интенсивность напряжения (14.17)  $\sigma_i = 160 \text{ МПа}$ , интенсивность деформации по рисунку 14.6  $\varepsilon_i = 0,001$ . Приращение диаметра (14.15)

$$\Delta D = \frac{3}{8} \frac{0,001 \cdot 2 \cdot 1800^2}{160 \cdot 10} = 1,5 \text{ мм}$$

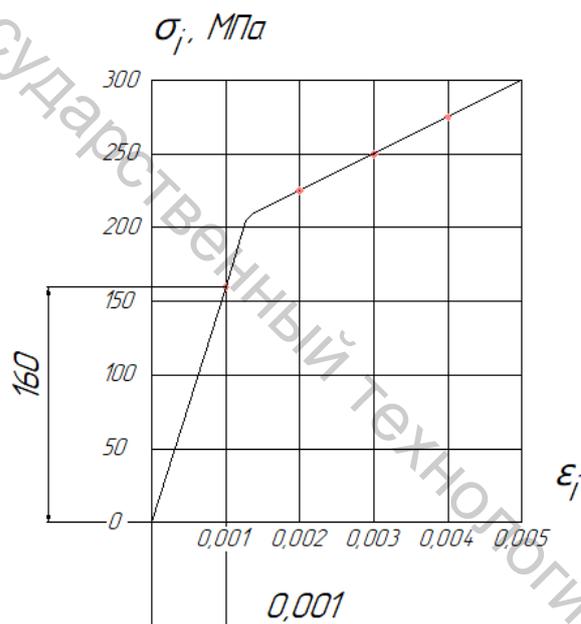


Рисунок 14.6 – Кривая деформирования

## Лекция 15 Модель ползучести

### 15.1 Последствие

Напряжения и деформация при нагружении элементов конструкций изменяются во времени (даже при постоянных нагрузках). Одна из сторон этого явления (ползучесть материала) – изменение во времени деформаций (собственно, ползучесть, или последствие). Последствие может быть упругим и пластическим. В первом случае упругие деформации исчезают со временем после разгрузки (15.1). Во втором случае они, в основном, необратимы и уменьшаются незначительно.

В одноосном растяжении напряжения

$$\sigma = E\varepsilon + \chi\dot{\varepsilon}, \quad (15.1)$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $\chi$  – линейная вязкость,  $\varepsilon$  – упругая деформация,  $\dot{\varepsilon}$  – её скорость. Уравнение (15.1) в другом виде:

$$\sigma = E\varepsilon + Hn\dot{\varepsilon}, \quad (15.2)$$

В уравнении (15.2) модуль  $E$  называют длительным модулем упругости,  $H$  – мгновенным модулем ( $H$  всегда больше  $E$ ). Полагая в уравнении (15.2)  $\sigma = const$ , найдем его решение как сумму решения соответствующего однородного уравнения (с разделяющимися переменными)

$$E\varepsilon + Hn\dot{\varepsilon} = 0, \quad (15.3)$$

и какого-либо частного решения уравнения (15.2):

$$\int \frac{Hn}{E} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = -\int dt;$$

$$\varepsilon = Ce^{-\frac{Et}{Hn}}$$

Частное решение возьмём в виде  $\varepsilon = const$  :

$$\varepsilon = \frac{\delta}{E}.$$

Общее решение исходного неоднородного уравнения (15.2)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + Ce^{-\frac{Et}{Hn}}. \quad (15.4)$$

Произвольная постоянная интегрирования в решении (15.4) найдется из начального условия (при внезапном приложении нагрузки)

$$\varepsilon_0 = \varepsilon(t=0) = \frac{\sigma}{H}, \quad (15.5)$$

$$C = \delta \left( \frac{1}{H} - \frac{1}{E} \right).$$

Решение при заданном начальном условии (15.5)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \sigma \left( \frac{1}{H} - \frac{1}{E} \right) e^{-\frac{Et}{Hn}}. \quad (15.6)$$

При разгрузке в некоторый момент  $t_1$  положим в решении  $\sigma = 0$  и вместо  $t$  время  $t - t_1$ . Тогда

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-\frac{E(t-t_1)}{Hn}}. \quad (15.7)$$

На рисунке 15.1 показаны обе стадии нагружения: до разгрузки и после разгрузки.

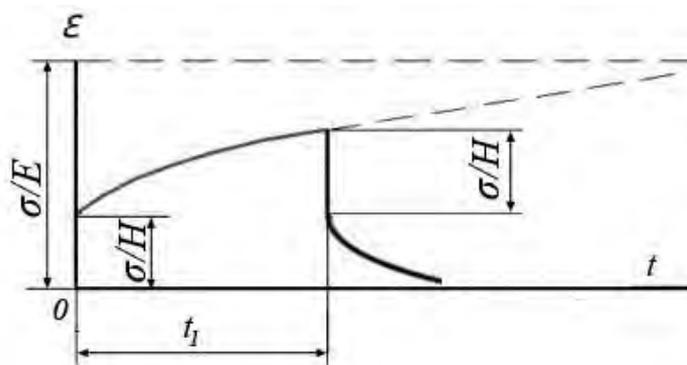


Рисунок 15.1 – Последствие с разгрузкой (15.6, 15.7).

## 15.2 Релаксация

Другая сторона ползучести – изменение напряжений в случае постоянной деформации. Соответствующее дифференциальное уравнение получается из общего уравнения

$$\sigma + n\dot{\sigma} = E\varepsilon + Hn\dot{\varepsilon}.$$

При заданной неизменной деформации  $\dot{\varepsilon} = 0$ , получаем уравнение

$$\sigma + n\dot{\sigma} = E\varepsilon. \quad (15.8)$$

Его решение складывается из решения однородного уравнения

$$\sigma = Ce^{-\frac{t}{n}}$$

и частного решения  $\sigma = E\varepsilon = const$ . Общее решение имеет вид

$$\sigma = E\varepsilon + Ce^{-\frac{t}{n}}.$$

В момент  $t = 0$   $\sigma = H\varepsilon$  (используется мгновенный модуль упругости), постоянная интегрирования

$$C = (H - E)\varepsilon.$$

Решение уравнения (15.8) при указанном начальном условии

$$\sigma = E\varepsilon\left(1 + \frac{H - E}{E}e^{-\frac{t}{n}}\right) = E\varepsilon + (\sigma_0 - E\varepsilon)e^{-\frac{t}{n}}. \quad (15.9)$$

Решение (15.9) показано на рисунке 15.2.

## 15.3 Модели Максвелла и Фойгта

Уравнение (15.2), описывающее последствие, может быть проиллюстрировано моделью Фойгта (рис. 15.3), представляющей параллельное соединение элементов упругости и вязкости.

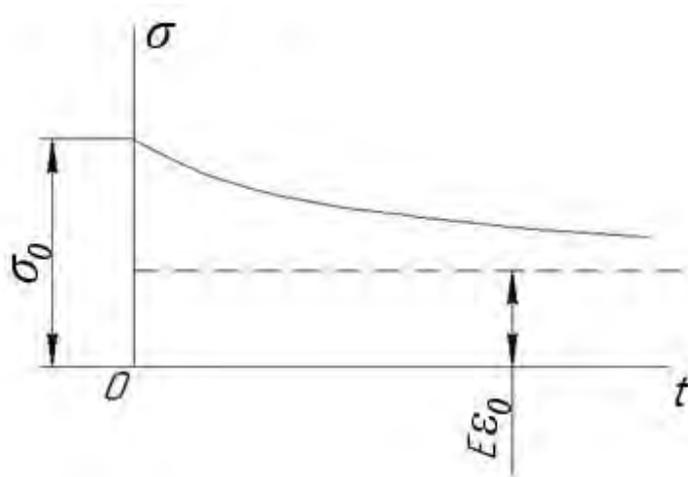


Рисунок 15.2 – Релаксация напряжений со временем релаксации  $\tau$

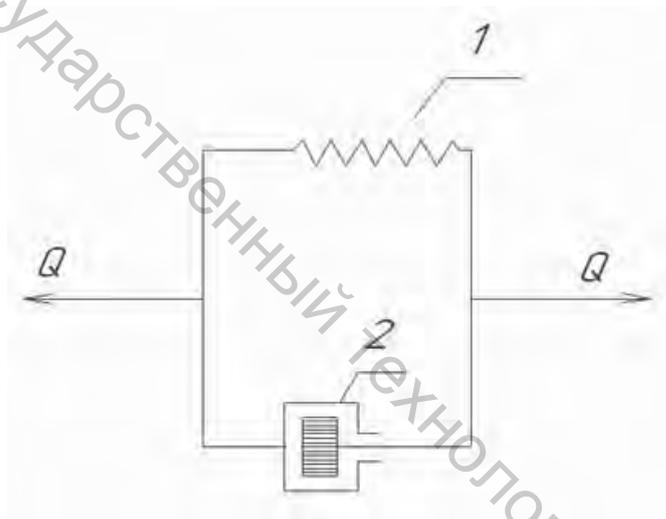


Рисунок 15.3 – Модель Фойгта: 1 – упругий элемент, 2 – поршень с зазором внутри цилиндра с вязкой жидкостью

Уравнение (15.8) описывает модель Максвелла – последовательного соединения упругого элемента и элемента вязкости (рис. 15.4)



Рисунок 15.4 – Модель Максвелла

## 15.4 Изохронные кривые ползучести

Расчет на ползучесть базируется на кривых (рис. 13.1), построенных при постоянных температурах для различных напряжений (рис. 15.5). На рисунке 15.6 представлена кривая  $\zeta$ - $\epsilon_c$ .

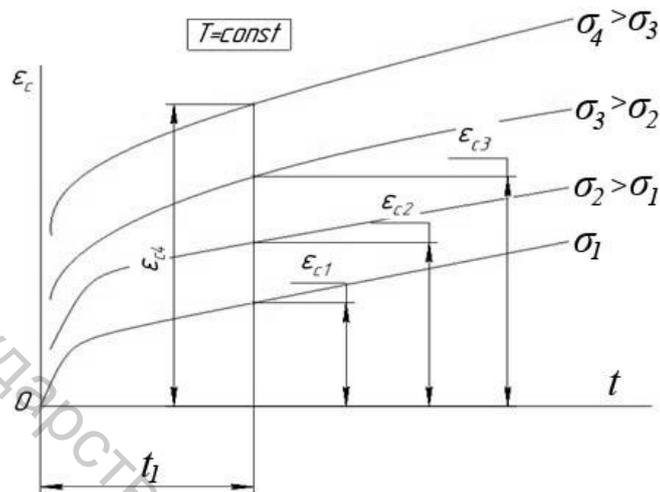


Рисунок 15.5 – Семейство кривых ползучести

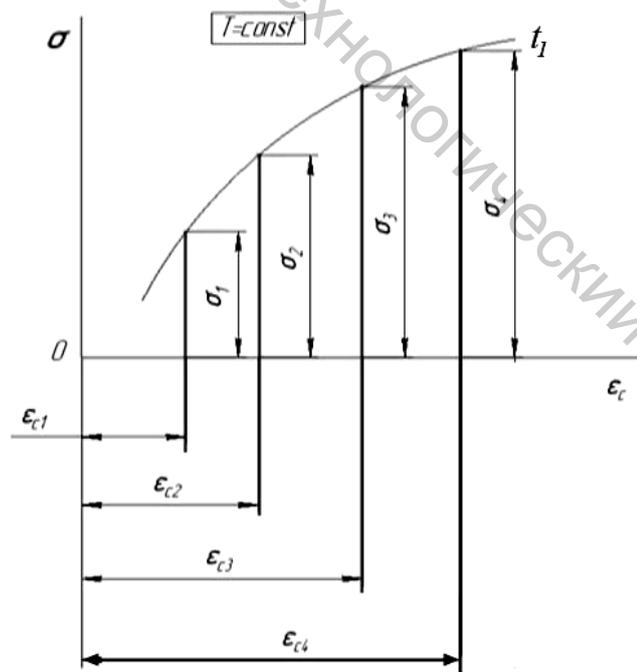


Рисунок 15.6 – Зависимость напряжения от деформации ползучести для фиксированного момента времени  $t_1$

После нахождения изохронных кривых ползучести расчет на ползучесть сводится к расчету упругопластического тела по деформационной теории ползучести (Лекция 14). Для начального момента времени ( $t=0$ ) расчет полностью совпадает с определением напряжений и деформаций по деформационной теории. Для момента  $t$  производится такой же расчет, но в качестве кривой деформирования берут кривую на рисунке 15.6. Для аналитического описания используется степенная зависимость вида (12.11):

$$\varepsilon_i = B(T)\sigma_i^{n(T)}$$

Витебский государственный технологический университет

## Лекция 16 Модели разрушения

### 16.1 Модели статического и длительного разрушения

Статическое нагружение – медленный рост нагрузки от нуля до наибольшей величины. Предполагается однократное нанагружение (примеры: нагружение каркасов зданий, болтов при их затяжке и др.). К статическому нагружению относят и случаи, когда нагружение повторяется несколько раз; однако встречается заметное снижение прочности даже при малом числе циклов ( $N < 10$ ).

Модели статического и длительного разрушения представляют в виде

$$\sigma_{\text{эkv}} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \lambda_0, \lambda_1, \dots) = \sigma_{\text{кр}}(T, t), \quad (16.1)$$

где  $\sigma_{\text{эkv}}$  – эквивалентное напряжение,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ) – главные напряжения;  $\lambda_0, \lambda_1, \dots$  – параметры, зависящие от механических свойств материала;  $\sigma_{\text{кр}}$  – критическое напряжение, в общем случае зависящее от температуры  $T$  и времени напряжения  $t$ .

Если в любой из точек конструкции

$$\sigma_{\text{эkv}} < \sigma_{\text{кр}},$$

условие прочности считается выполненным; если в опасной точке

$$\sigma_{\text{эkv}} > \sigma_{\text{кр}},$$

наступает разрушение.

Зависимость (16.1) называется критерием прочности. Критерий прочности сводит напряженное состояние к одноосному растяжению, прочность при нем полагается известной.

### 16.2 Критерий интенсивности напряжений Хубера-Мизеса

Возьмем в качестве критерия прочности интенсивность напряжений (14.3):

$$\sigma_{экв} = \sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \quad (16.2)$$

Модель статического разрушения

$$\sigma_i = \sigma_\sigma. \quad (16.3)$$

В частном случае плоского напряженного состояния (оси  $x$  и  $y$  – главные оси,  $\zeta_z = 0$ ) модель (16.3) с интенсивностью (16.2) выразится в виде

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_y^2 + \sigma_x^2} = \sigma_\sigma,$$

им в виде уравнения плоской кривой 2-го порядка

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 = 2\sigma_\sigma^2 \quad (16.4)$$

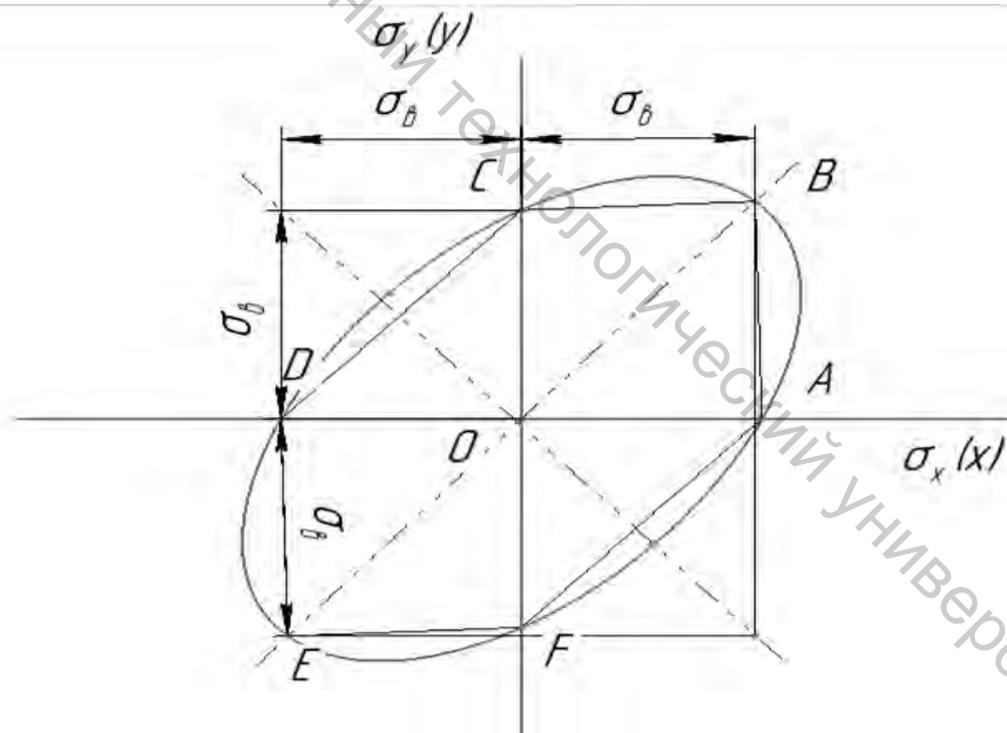


Рисунок 16.1 – Модели статического разрушения пластичных материалов в плоскости главных напряжений

(в главных осях  $x$  и  $y$ , вдоль которых откладываются величины  $\zeta_x$  и  $\zeta_y$ ). Очевидно, точки  $(\zeta_y, \zeta_x)$  и  $(-\zeta_y, -\zeta_x)$  наряду с точкой  $(\zeta_x, \zeta_y)$

удовлетворяют уравнению (16.4). Следовательно, кривая (16.4) симметрична относительно биссектрис первого и второго квадрантов системы координат, являясь эллипсом, «повёрнутым» на  $45^\circ$  (рис. 16.1). Заметим: критерий прочности для пластичных материалов (16.2) часто используют как критерий появления пластических деформаций:

$$\sigma_i = \sigma_T,$$

где  $\sigma_T$  – предел текучести в одноосном растяжении.

Если точка  $(\zeta_x, \zeta_y)$ , изображающая напряженное состояние, находится внутри эллипса (рис. 16.1), материал остаётся прочным. При выходе точки за пределы эллиптической области материал разрушается.

### 16.3 Критерий максимальных касательных напряжений Треска-Сен-Венана

В одноосном растяжении ( $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = 0$ ) максимальное касательное напряжение (4.1)

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{\sigma}{2},$$

в момент разрушения

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_e}{2}.$$

Взяв  $\tau_{\max}$  в сложном напряженном состоянии (4.1), получим модель разрушения

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_e}{2},$$

или

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_e. \quad (16.5)$$

В двухосном ( $\sigma_z = 0$ ) напряженном состоянии получим согласно уравнению (16.5) шестиугольник, вписанный в эллипс на рисунке 16.1.

#### 16.4 Предельные поверхности по критериям интенсивности напряжений и максимальных касательных напряжений

Рисунок 16.1 указывает предельные кривые по критериям (16.2, 16.5) в условиях двухосного плоского напряженного состояния. В объемном напряженном состоянии предельные кривые являются сечениями  $\sigma_z = 0$  предельных поверхностей.

Проведем в пространстве главных напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  ось  $u$ , одинаково наклоненную к осям  $x, y, z$ , с направляющими косинусами  $l = \cos \alpha, m = \cos \beta, n = \cos \gamma$

$$l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ось  $u$  называется гидростатической, ибо величина

$$u = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

пропорциональна среднему (гидростатическому) напряжению (7.9).

Плоскость  $D$ , содержащая точку  $M(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  и перпендикулярная направлению  $u$  (рис. 16.2), называется девиаторной. Расстояние точки  $M$  от оси – см. выражение (16.2) –

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x)} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_i, \end{aligned}$$

соответствующая модель разрушения (16.3) изображается круговым цилиндром с осью, совпадающей с гидростатической, и радиусом (рис. 16.3). Соответственно, предельная поверхность по критерию максимальных касательных напряжений изображается правильной шестигранной призмой, вписанной в цилиндр на рисунке 16.3.

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_e$$

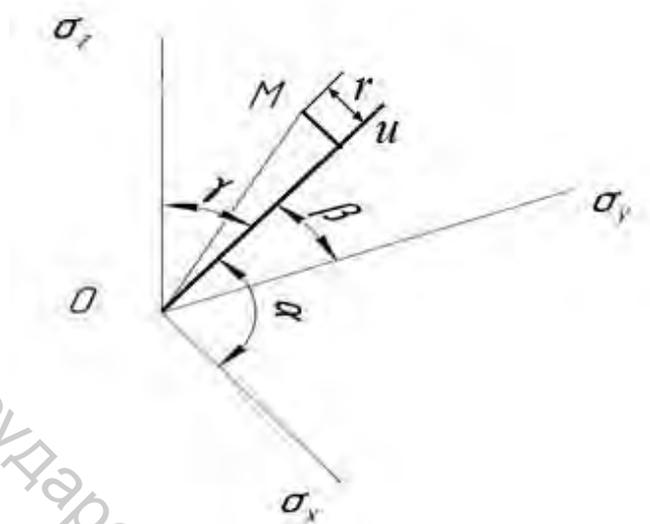


Рисунок 16.2 – Расстояние точки  $M (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  от гидростатической оси  $u$

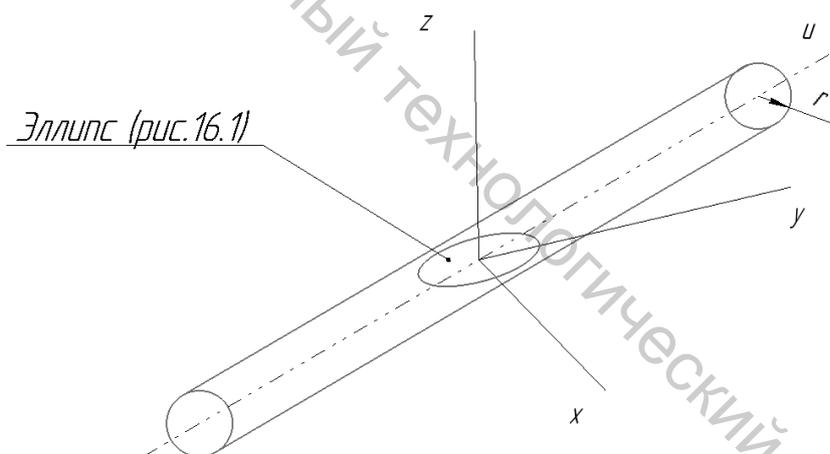


Рисунок 16.3 – Предельная поверхность по критерию интенсивности напряжений

В объемном напряженном состоянии, характеризуемом тензором  $(\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_0)$ , т. е. в равномерном растяжении оба критерия предсказывают бесконечную прочность, не имеющую физического смысла. Да и в случае, когда все три главных напряжения растягивающие (не обязательно одинаковые), наиболее растягивающее напряжение должно быть ограничено:

$$\sigma_1 < S_k,$$

где  $S_k \approx \sigma_b(1 + \varepsilon_b)$  – истинное сопротивление отрыву (12.7). Модель разрушения пластических материалов принимает вид

$$\sigma_i \geq \sigma_b \vee \sigma_1 \geq S_k, \quad (16.6)$$

условие статической прочности

$$\sigma_i < \sigma_b \wedge \sigma_1 < S_k, \quad (16.7)$$

Знаки  $\vee$  и  $\wedge$  в условиях (16. 6) и (16.7) означает сложение («или») и логическое умножение («и»).

Заметим: в случае равномерного сжатия  $\sigma_i = 0$ . Действительно, из опытов следует: в этом случае практически неограниченная прочность, поэтому наибольшее из сжимающих напряжений не ограничивают.

### 16.5 Модель статического разрушения хрупких материалов

Разрушение хрупких материалов ( $\delta(11.15) < 3\%$ ,  $a_H(11.11) < 30 \text{ Нм/мм}^2$ ) происходит путём отрыва (практически, без пластических деформаций). Наиболее простая модель разрушения хрупких материалов.

$$\sigma_1 \geq \sigma_b, \quad (16.8)$$

где  $\sigma_1$  – наибольшее растягивающее напряжение,  $\sigma_b$  – предел прочности при растяжении.

Очевидно, условие (16.8) указывает на невозможность разрушения при сжатии. Однако в соответствующих опытах хрупкие материалы разрушались – по площадкам с максимальными касательными напряжениями. Модель разрушения материалов имеет вид:

$$\sigma_1 \geq \sigma_b \vee \tau_{max} \geq \frac{1}{2} \sigma_{сж},$$

Условие прочности

$$\sigma_1 < \sigma_b \wedge \tau_{max} < \frac{1}{2} \sigma_{сж},$$

где  $\sigma_{сж}$  – предел прочности хрупкого материала при сжатии.

## 16.6 Критерий Мора

Итак, при построении моделей разрушения пластичных и хрупких материалов считались с возможностью разрушения путём среза или путём отрыва. Прочем и те и другие материалы обнаружили при всестороннем растяжении и всестороннем сжатии и те и другие свойства, что подвигло на создание более общих моделей статического разрушения, справедливых как для пластических, так и хрупких материалов.

Пример тому – критерий Мора

$$\tau_{\text{пр}} = f(\sigma_{\text{пр}}), \quad (16.9)$$

где  $\tau_{\text{пр}}$  и  $\sigma_{\text{пр}}$  – касательное и нормальное напряжения (на площадке с максимальными касательными напряжениями) в момент разрушения.

На рисунке 16.4 изображена предполагаемая зависимость (16.9).

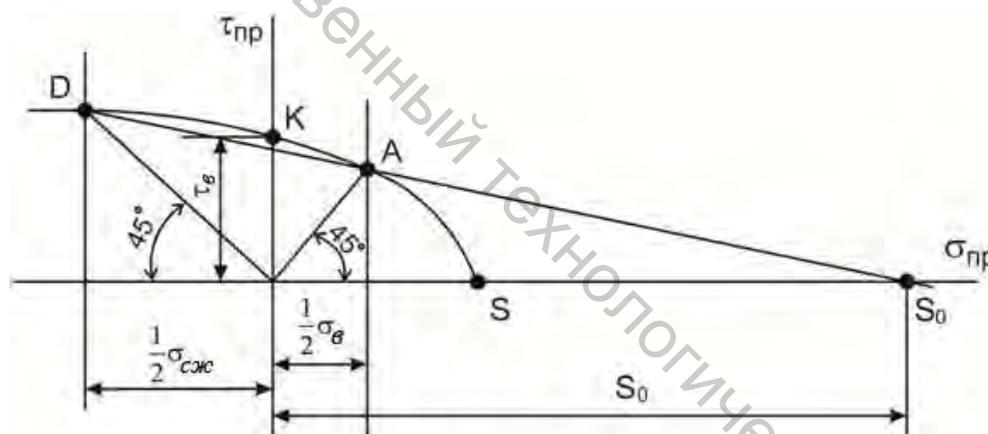


Рисунок 16.4 – Кривая предельных напряжений по критерию Мора

В общем случае напряжённого состояния (см. наибольший круг на рисунке 3.3 б)

$$\tau_{\text{пр}} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), \quad (16.10)$$

$$\sigma_{\text{пр}} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3).$$

На рисунке 16.4 точка А отвечает одноосному растяжению (см. рисунок 4.2) точка D – одноосному сжатию, точка К – кручению. В первом приближении кривая (16.9) заменяется прямой

$$\eta_{\text{пр}} = \zeta_{\text{пр}} + b, \quad (16.11)$$

проходящей через точки А и D. В точке А напряжения (16.10)  $\tau_{пр} = \sigma_{пр} = \frac{1}{2}\sigma_b$ , в точке D –  $\tau_{пр} = -\sigma_{пр} = \frac{1}{2}\sigma_{сж}$ . Подставляя эти значения в уравнение (16.11), получим два уравнения относительно параметров  $a$  и  $b$ :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma_b = \alpha \frac{1}{2}\sigma_b + b, \\ \frac{1}{2}\sigma_{сж} = -\alpha \frac{1}{2}\sigma_{сж} + b, \end{cases} \quad (16.12)$$

где  $\sigma_b$  и  $\sigma_{сж}$  – пределы прочности при растяжении и сжатии.

Решение уравнений (16.12):

$$a = -\frac{\sigma_{сж}-\sigma_b}{\sigma_{сж}+\sigma_b}, \quad b = \frac{\sigma_b\sigma_{сж}}{\sigma_{сж}+\sigma_b}. \quad (16.13)$$

Используя теперь параметры (16.13) в уравнении (16.11) с переменными (16.10), получим условие разрушения

$$\sigma_1 - \frac{\sigma_b}{\sigma_{сж}}\sigma_3 = \sigma_b. \quad (16.14)$$

Предельное сопротивление отрыву  $S_0$  находится при  $\tau_{пр}(16.11) = 0$ :

$$S_0 = -\frac{b}{a} = \frac{\sigma_b\sigma_{сж}}{\sigma_{сж}-\sigma_b} = \frac{\sigma_b}{1-\frac{\sigma_b}{\sigma_{сж}}}. \quad (16.15)$$

Предел прочности на срез (в кручении) находится при  $\sigma_{пр}(16.11) = 0$ :

$$\tau_b = b = \frac{\sigma_b}{1 + \frac{\sigma_b}{\sigma_{сж}}}.$$

Если положено  $\sigma_b = \sigma_{сж}$ , условие (16.14) переходит в условие разрушения пластичных материалов (16.5), при  $\sigma_{сж} \rightarrow \infty$  получается условие разрушения хрупкого материала при растяжении (16.8).

Второй пример – критерий Писаренко-Лебедева

$$\sigma_i = f(\sigma_1),$$

в линейном приближении

$$\sigma_i = \alpha\sigma_1 + b. \quad (16.16)$$



Витебский государственный технологический университет

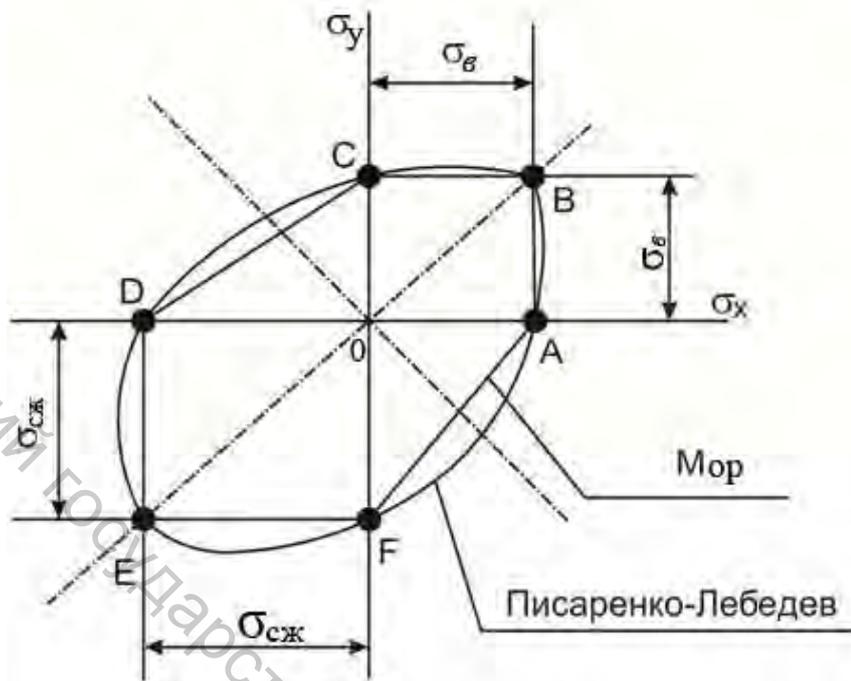


Рисунок 16.6 – Критерий Мора и Писаренко-Лебедева в плоском напряжённом состоянии

### 16.7 Модель длительного разрушения

Модель длительного разрушения в постоянном (во времени) нагружении

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_{\text{дл}}(t, T),$$

где  $\sigma_{\text{дл}}(t, T)$  – предел длительной прочности при растяжении,  $t$  и  $T$  – длительность и температура напряжения, эквивалентное напряжение можно принять по критерию Мора (16.14):

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{\text{дл}}}{\sigma_{\text{дл.сж}}} \sigma_3. \quad (16.18)$$

По экспериментальным данным

$$\sigma_{\text{дл.сж}} > 2\sigma_{\text{дл}},$$

принимая

$$\sigma_{\text{дл.сж}} = 2\sigma_{\text{дл}},$$

получим напряжение (16.18):

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \frac{1}{2} \sigma_3.$$

Аналогичным образом найдём по критерию Писаренко-Лебедева (16.16, 16.17) критерий Сдобырева –

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1}{2} (\sigma_i + \sigma_1).$$

### 16.8 Случай нестационарного нагружения

Пусть нагружение (рис. 16.7) состоит из k режимов, причём в пределах i-го режима длительностью  $t_i$  действует температура  $T_i$  и напряжение  $\sigma_i$ , суммарное время работы  $t_\Sigma$ . Время до разрушения при непрерывной работе в условиях i-го режима –  $t_{pi}$ .

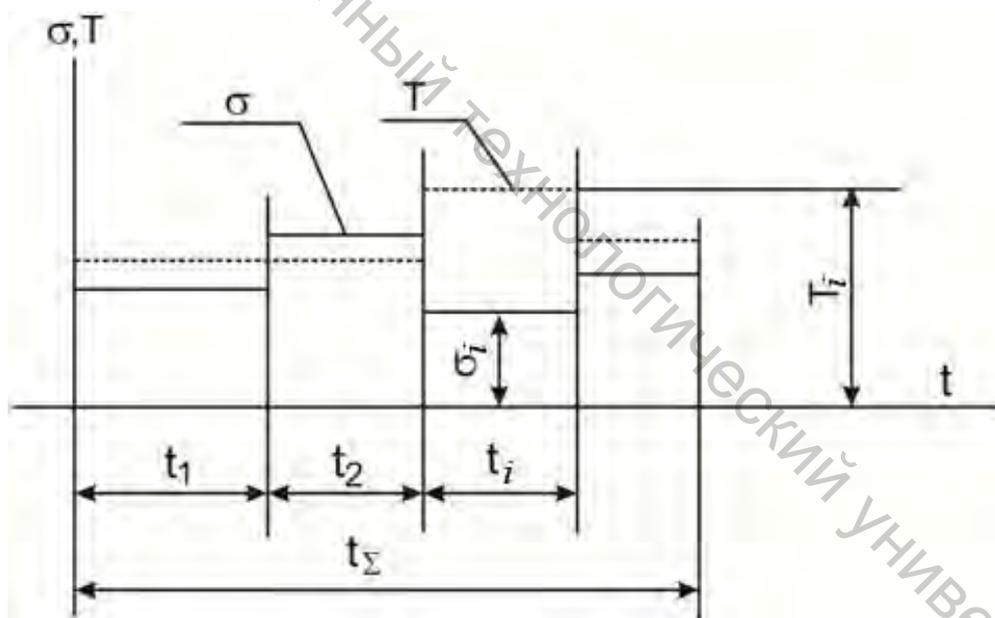


Рисунок 16.7 – Нестационарное нагружение

Соответствующее повреждение материала

$$r_i = \frac{t_i}{t_{pi}}. \quad (16.19)$$

Повреждение (16.19) равно 0 при  $t_i = 0$ , материал полностью разрушается в результате работы на  $i$ -м режиме при  $t_{pi} = t_i$  ( $r_i = 1$ ), т. е.

$$0 \leq r_i \leq 1.$$

Разрушение наступает согласно принципу линейного суммирования повреждений (16.19): условие разрушения

$$\frac{t_1}{t_{p1}} + \frac{t_2}{t_{p2}} + \dots + \frac{t_k}{t_{pk}} = \sum_{i=1}^k \frac{t_i}{t_{pi}} = 1. \quad (16.20)$$

Рассмотрим длительную прочность на  $i$ -м режиме (рис. 13.2, 16.8). Точка А характеризует  $i$ -й режим.

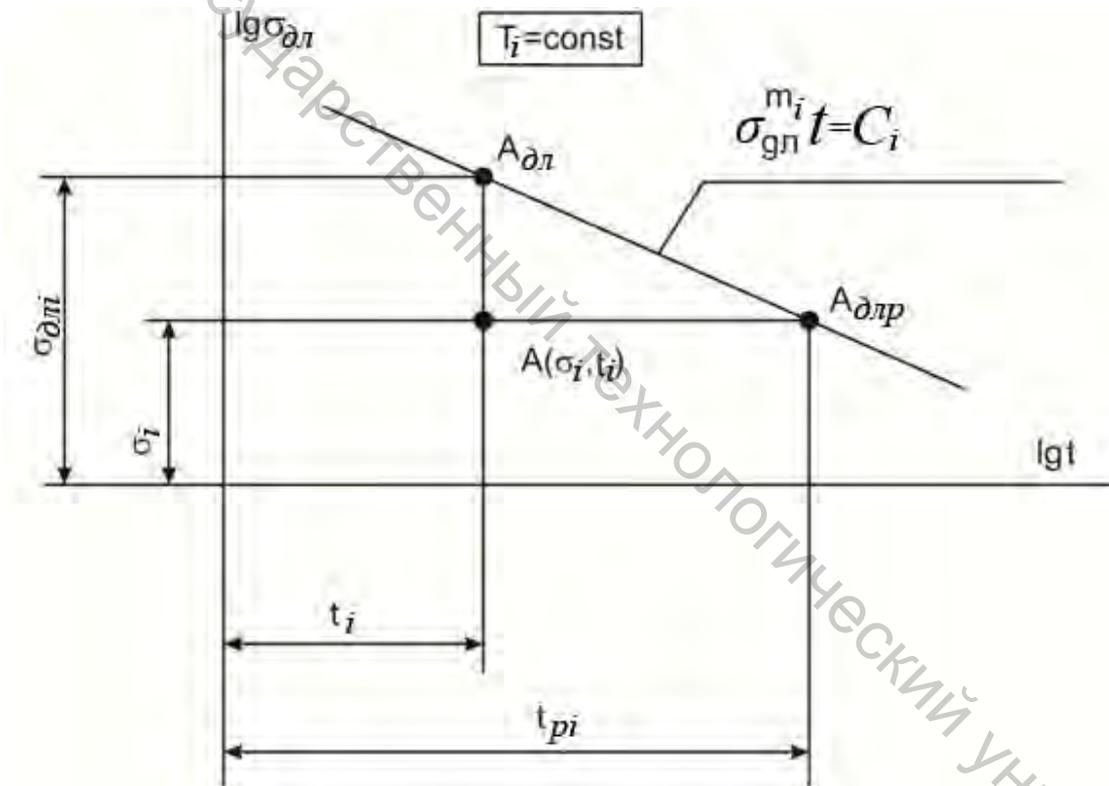


Рисунок 16.8 – Длительная прочность на  $i$ -м режиме

Запас длительной прочности по напряжениям

$$n_{\sigma_i} = \frac{\sigma_{длi}}{\sigma_i}, \quad (16.21)$$

запас длительной прочности по времени нагружения

$$n_{t_i} = \frac{t_{pi}}{t_i}. \quad (16.22)$$

Соотношения запасов (16.21) и (16.22) устанавливаются по уравнению длительной прочности на рисунке 13.2.

Точки  $A_{дл}$  и  $A_{длр}$  удовлетворяют уравнению:

$$\sigma_{длi}^{m_i} t_i = \sigma_i^{m_i} t_{pi},$$

или

$$\frac{t_i}{t_{pi}} = \left( \frac{\sigma_i}{\sigma_{длi}} \right)^{m_i}; \quad (16.23)$$

$$n_{t_i} = (n_{\sigma_i})^{m_i}.$$

Показатель длительной прочности  $m = 4 \div 16$  – запас по долговечности  $n_{t_i}$  значительно превышает запас по напряжению  $n_{\sigma_i}$ .

Перепишем условие разрушения (16.20):

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_{дл1}} \right)^{m_1} + \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_{дл2}} \right)^{m_2} + \dots + \left( \frac{\sigma_k}{\sigma_{длк}} \right)^{m_k} = \\ & = \frac{1}{n_{\sigma_1}^{m_1}} + \dots + \frac{1}{n_{\sigma_k}^{m_k}} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_{\sigma_i}^{m_i}} = 1. \end{aligned} \quad (16.24)$$

Приведём все режимы к условиям первого режима:

$$\left( \frac{\sigma_{экв}}{\sigma_{дл1}} \right)^{m_1} = \frac{1}{n_{\sigma_{экв}}^{m_1}} = 1, \quad (16.25)$$

потом перепишем равенство (16.24):

$$\left( \frac{\sigma_1}{\sigma_{дл1}} \right)^{m_1} \left( 1 + \frac{n_{\sigma_1}^{m_1}}{n_{\sigma_2}^{m_2}} + \dots + \frac{n_{\sigma_1}^{m_1}}{n_{\sigma_k}^{m_k}} \right) = 1, \quad (16.26)$$

Приравнявая выражения (16.25), (16.26), найдём эквивалентное напряжение:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 \left( 1 + \frac{n_{\sigma_1}^{m_1}}{n_{\sigma_2}^{m_2}} + \dots + \frac{n_{\sigma_1}^{m_1}}{n_{\sigma_k}^{m_k}} \right).$$

За первый режим обычно принимают наиболее тяжёлый (с наименьшим запасом прочности).

Эквивалентный запас прочности находится по формуле – см. выражения (16.24, 16.25):

$$\frac{1}{n_{\sigma_{\text{экв}}}^{m_1}} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_{\sigma_i}^{m_i}}.$$

Как видим, наибольшее влияние на повреждаемость оказывают режимы с наименьшими запасами прочности (что используется в ускоренных испытаниях на надёжность).

## Лекция 17

### Модели усталостного и малоциклового разрушения

#### 17.1 Усталостное и малоцикловое разрушение

Усталостное и малоцикловое разрушение возникает при числе циклов  $N > 10^5$  и отличается сильной чувствительностью к концентрации напряжений и качеству поверхности. Пластические деформации в очагах зарождения трещин не наблюдаются.

При числе циклов нагружения  $N < 10^5$  локальный характер усталостной прочности, зависимость её от состояния поверхности проявляется в меньшей степени.

#### 17.2 Модель усталостного разрушения в одноосном напряженном состоянии

Модель усталостного разрушения принимается в виде

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{K_{\sigma}}{\beta \varepsilon_{\sigma}} \sigma_{\text{ар}} + \psi_{\sigma} \sigma_{\text{тр}} = \sigma_{-1},$$

где  $\sigma_{\text{ар}}$  и  $\sigma_{\text{тр}}$  – переменная (13.4) и постоянная (13.3), составляющие в момент разрушения,  $K_{\sigma}$  (13.9, 13.10) – эффективный коэффициент концентрации напряжений,  $\beta$  (13.12) и  $\varepsilon_{\sigma}$  (13.13) – коэффициенты влияния поверхности и масштабного эффекта,  $\psi_{\sigma}$  – коэффициент в линейной аппроксимации (13.7) зависимости предела выносливости (рис. 13.6) от среднего напряжения (13.3);  $\sigma_{-1}$  – предел выносливости стандартного гладкого образца.

Предельные напряжения получаются в пропорциональном росте рабочих напряжений (13.3, 13.4):

$$\sigma_{\alpha p} = n \sigma_{\alpha}, \quad \sigma_{\text{тр}} = n \sigma_{\text{т}}$$

( $n$  – запас усталостной прочности по подобному разрушающему циклу).

Искомый запас (рис. 17.1)

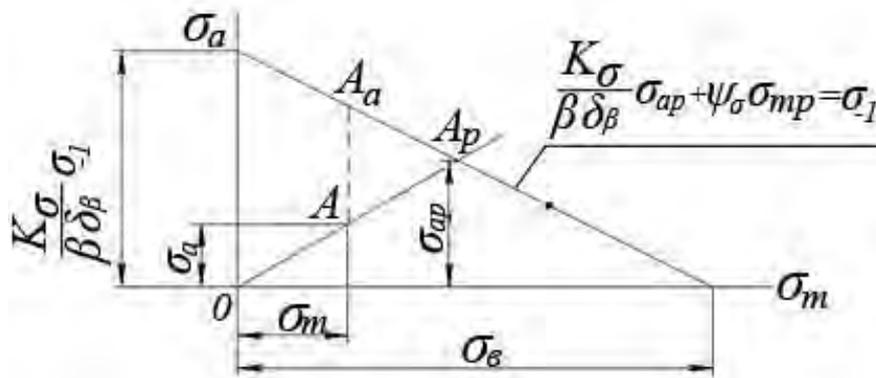


Рисунок 17.1 – Определение запаса усталостной прочности

$$n = \frac{OA_p}{OA} = \frac{\sigma_{ap}}{\sigma_{\alpha}},$$

где предельная ордината (точка  $A_p$ ) находится из уравнения прямой на рисунке 17.1:

$$\sigma_{ap} = \frac{\sigma_{-1} - \psi_{\sigma} \sigma_{mp}}{\frac{K_{\sigma}}{\beta \varepsilon_{\beta}}} = \frac{\sigma_{-1} - \psi_{\sigma} n \sigma_m}{\frac{K_{\sigma}}{\beta \varepsilon_{\beta}}},$$

получаем уравнение относительно запаса  $n$ :

$$\frac{K_{\sigma}}{\beta \varepsilon_{\beta}} n \sigma_{\alpha} + \psi_{\sigma} n \sigma_m = \sigma_{-1},$$

откуда

$$n = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_{\sigma}}{\beta \varepsilon_{\beta}} \sigma_{\alpha} + \psi_{\sigma} \sigma_{mp}} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{\text{экв}}},$$

где выражение для эквивалентного напряжения, конечно, даётся моделью (п. 17.2). Используется и другая модель, в которой растёт только амплитуда (13.4) переменных напряжений на рисунке 13.4. В этой модели

$$\sigma_{\alpha p} = n_{\alpha} \sigma_{\alpha}, \quad \sigma_{mp} = \sigma_m$$

– см. отрезок  $AA_{\alpha}$  на рисунке 17.1. Заметим, что запас  $n_{\alpha}$  всегда больше запаса  $n$ , одного, допускаемые значения запасов:  $[n] = 1.5 \div 2$ ,  $[n_{\alpha}] = 2.5 \div 4$ .

### 17.3 Усталостное разрушение в сложном напряжённом состоянии

Пусть составляющие тензора напряжений (рис. 1.1) циклически изменяются во времени, имея постоянные и переменные части

$$\sigma_x = \sigma_{xa} + \sigma_{xm}, \dots; \quad \tau_{zx} = \tau_{zxa} + \tau_{zxm}.$$

Интенсивность переменных частей  $\sigma_{xa}, \dots; \tau_{zxa}$  (14.3)

$$\sigma_{ia} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xa} - \sigma_{ya})^2 + \dots + 6\tau_{zxa}^2}. \quad (17.1)$$

Модель разрушения в симметричном цикле изменения напряжений принимается в виде

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_{ia} = \sigma_{-1}. \quad (17.2)$$

При переменных нормальных и касательных напряжениях (в сочетании изгиба и кручения) найдём интенсивность (17.1) и получим условие разрушения (17.2) в виде

$$\sqrt{\sigma_{\alpha}^2 + 3\tau_{\alpha}^2} = \sigma_1;$$

предел усталостной прочности в кручении

$$\tau_{-1} = \sigma_1 / \sqrt{3} \approx 0.57\sigma_{-1} \quad (17.3)$$

– хорошее приближение для пластичных конструкционных материалов.

Модель усталостного разрушения для хрупких материалов

$$\sigma_{\text{экв}} = \lambda_0 \sigma_{ia} + \lambda_1 \sigma_{1a} = \sigma_{-1}. \quad (17.4)$$

Рассматривая переменное растяжение-сжатие и переменное кручение, найдём константы в уравнении (17.4):

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} \left( \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} - 1 \right),$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} \left( \sqrt{3} - \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} \right).$$

Если  $\sigma_{-1}/\tau_{-1} = \sqrt{3}$  (17.4), получим условие (17.2), если  $\sigma_{-1}/\tau_{-1} = 1$  (хрупкие материалы), уравнение (17.4) даёт условие  $\sigma_{1a} = \sigma_{-1}$ .

Пусть теперь цикл напряжений (рис.13.4) асимметричный. Обобщение условия (17.2) даст

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_{ia} + \psi_{\sigma} \sigma_{1m} = \sigma_{-1} \quad (17.5)$$

( $\sigma_{1m}$  – наибольшее постоянное нормальное напряжение).

При наличии концентрации напряжений берётся интенсивность истинных амплитуд напряжений

$$\sigma_{ia} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(K_x \sigma_{x\alpha} - K_y \sigma_{y\alpha})^2 + \dots + 6K_{zx}^2 \tau_{zx\alpha}^2} = K_i \sigma_{i\alpha},$$

где  $K_x, K_y, \dots, K_{zx}$  – в общем случае различные коэффициенты концентрации напряжений,  $K_i$  – коэффициент концентрации интенсивности напряжений (17.1).

## 17.4 Модели усталостного разрушения в стационарном нагружении

Модель усталостного разрушения в одноосном стационарном нагружении изображалась на рисунке 13.5:

$$\sigma_{\alpha}^m N = C, \quad \sigma_{\alpha} > (\sigma_{-1N_0}), \quad \sigma_{\alpha}^{m_0} N = C_0, \quad \sigma_{\alpha} \leq (\sigma_{-1N_0}),$$

где, предполагая кривую выносливости непрерывной при  $N = N_0$ ,

$$N_0 = \frac{C}{\sigma_{-1N_0}^m} = \frac{C_0}{\sigma_{-1N_0}^{m_0}},$$

и

$$C_0 = C(\sigma_{-1N_0})^{m_0-m}$$

( $\sigma_{-1N_0}$  – предел выносливости при числе циклов  $N_0$ ).

В многоосном напряжённом состоянии и асимметричном цикле напряжений следует положить (17.5)

$$\sigma_a = \sigma_{экс} = \sigma_{ia} + \psi\sigma_{1m}.$$

### 17.5 Модели усталостного разрушения в нестационарном нагружении

Пусть в  $j$ -м режиме амплитуды напряжений  $\sigma_j$ . Число циклов напряжений  $N_j$ . Суммарное число циклов

$$N_\Sigma = N_1 + N_2 + \dots + N_n = \sum_{j=1}^n N_j.$$

Относительная длительность  $j$ -го режима

$$q_j = \frac{N_j}{N_\Sigma}. \quad (17.6)$$

Модель усталостного разрушения использует принцип линейного суммирования повреждений:

$$\frac{N_1^p}{N_{p1}} + \dots + \frac{N_k^p}{N_{pk}} = \sum_{j=1}^k \frac{N_j^p}{N_{pj}} = 1. \quad (17.7)$$

В условии (17.7)  $N_j^p$  – число циклов, накопленных к моменту разрушения в  $j$ -м режиме,  $N_{pi}$  – число циклов до разрушения в работе только в  $j$ -м режиме. Так как (17.6)

$$N_j^p = q_j N_{p\Sigma},$$

условие разрушения (17.7) записывается в виде

$$N_{p\Sigma} \sum_{j=1}^k \frac{q_j}{N_{pj}} = 1.$$

Запас долговечности по числу циклов

$$n_N = N_{p\Sigma} / N_\Sigma = (N_\Sigma \sum_{j=1}^k \frac{q_j}{N_{pj}})^{-1}$$

( $N_\Sigma$  – суммарное число нагружений), или

$$n_N = \left( \sum_{j=1}^k \frac{N_j}{N_{pj}} \right)^{-1}. \quad (17.8)$$

Здесь  $N_j$  – число циклов нагружения в  $j$ -м режиме в условиях эксплуатации,  $N_{pj}/N_j$  – запас по долговечности  $n_{jN}$  при работе только в  $j$ -м режиме, т. е. равенство (17.8) даёт

$$\frac{1}{n_N} = \sum_{j=1}^k \frac{1}{n_{jN}}.$$

Запасы по долговечности и по напряжённости в работе в  $j$ -м режиме связаны соотношением

$$n_{jn} = n_{j\sigma}^{m_j} = \left( \frac{\sigma_{pj}}{\sigma_j} \right)^{m_j},$$

вытекающим из равенства (рис. 16.8)

$$\sigma_j^{m_j} N_{pj} = \sigma_{pj}^{m_j} N_j,$$

где  $\sigma_{pj}$  – переменное напряжение, при котором происходит разрушение за  $N_j$  циклов.

## 17.6 Модели малоциклового разрушения

Формула Мэнсона (13.18) даёт модель малоциклового разрушения в одноосном напряжённом состоянии.

В сложном напряженном состоянии одноосной деформации  $\varepsilon_a$  заменяется эквивалентной деформацией

$$\varepsilon_{\text{экв}} = \varepsilon_{ia},$$

где  $\varepsilon_{ia}$  – интенсивность амплитуд деформаций. В асимметричном цикле деформаций

$$\varepsilon_{\text{экв}} = \varepsilon_{ia} + \psi_{\varepsilon} \varepsilon_{1m},$$

где  $\varepsilon_{1m}$  – наибольшая постоянная линейная деформация.

В работе на разных режимах с деформациями, изменяющимися циклически,  $\varepsilon_{a1}, \varepsilon_{a2}, \dots, \varepsilon_{ak}$  условие малоциклового разрушения принимается в виде (17.7). Запас долговечности определяется по формуле (17.8).

## Лекция 18

### Механика разрушения

#### 18.1 Оценка прочности в реальных условиях эксплуатации

Все более важная в последнее время характеристика прочности материала – трещиностойкость. В реальных изделиях из реальных материалов всегда содержатся дефекты структуры, пустоты, раковины, включения других материалов, которые со временем превращаются в трещины. Нельзя исключать и просчеты конструкторов, а также коррозию и естественное старение материалов. Особую важность приобретает прогноз времени, по истечении которого потеря прочности становится критической.

Одна из причин возникновения трещин, ведущих к разрушению твёрдого тела, – присутствие на его поверхности материала с другими механическими свойствами. Если на кристалл чистого цинка нанести каплю жидкой ртути, разрушение кристалла происходит при удлинении, составляющем несколько процентов, против разрушения чистого цинка при удвоении его длины. Под каплей нанесенного металла возникает и развивается трещина, растущая рывками. Атомы расплавленного металла из капли проникают в кристалл, образуя упрочненный пограничный слой. Трещина образуется и растет в результате конфликта между этим слоем и пластичным монокристаллом, возобновляясь после накопления очередной порции проникающего внутрь жидкого металла.

#### 18.2 Теоретическая оценка прочности

Разрушение твердых тел – довольно сложный процесс, зависящий от многих факторов. Прочность определяется в первую очередь силами взаимодействия между атомами или ионами, образующими кристаллическую решетку твердого тела. На рисунке 18.1 показаны силы притяжения (кривая 2) и силы отталкивания (кривая 3), зависящие от расстояния  $r$  между атомами. Зависимость равнодействующей от расстояния  $r$  – кривая 1. Расстояние  $r_0$  отвечает равновесию сил. В сближении атомов преобладают силы отталкивания,

в удалении – силы притяжения. Предел прочности при растяжении (временное сопротивление) определяется силой  $F_{max}$ . Если  $N_{CB}$  – число

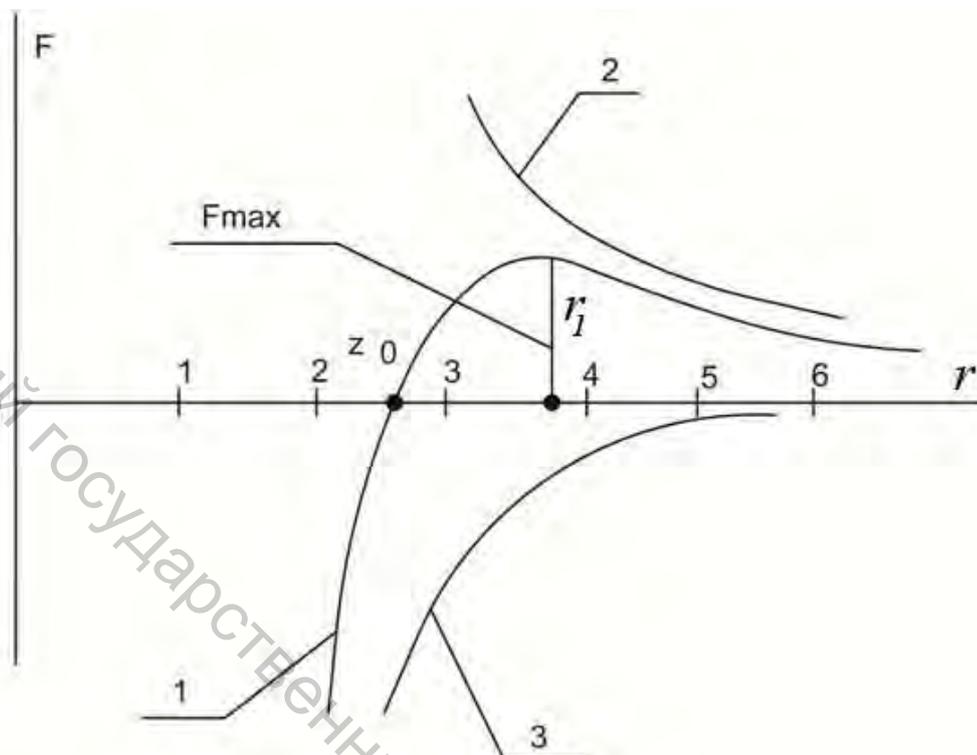


Рисунок 18.1 – Силы взаимодействия между двумя атомами:  $r_0 = 0.1 \text{ нм} = 10^{-10} \text{ м}$

разрываемых связей на единице площади сечения, перпендикулярного направлению действующей силы, теоретическая оценка предела прочности

$$\sigma_{\text{теор}} = F_{\text{max}} \cdot N_{\text{CB}} \quad (18.1)$$

Сила  $F_{\text{max}}$  в оценке (18.1) (и на рисунке 18.1) находится по закону Кулона:

$$F_{\text{max}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{r^2} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ Н},$$

соответствующее относительное упругое удлинение  $\epsilon_{\text{max}} \approx 17\%$ , число разрываемых связей  $N_{\text{CB}} \approx 10^{19} \text{ м}^{-2}$ . Тогда оценки (18.1)

$$\sigma_{\text{теор}} \approx 2 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2.$$

Используя далее закон Гука, найдем модуль Юнга:

$$E = \frac{\sigma_{\text{теор}}}{\varepsilon_{\text{max}}} = 1,2 \cdot 10^{11} \text{Па},$$

результат согласуется с экспериментальными данными

$$E_{\text{чугун}} = (0,8 \dots 1,6) \cdot 10^{11} \text{Па}, E_{\text{медь}} = (1,1 \dots 1,3) \cdot 10^{11} \text{Па}, \\ E_{\text{стекло}} = 0,56 \cdot 10^{11} \text{Па}.$$

### 18.3 Удельная поверхностная энергия

Поверхностный слой атомов в принятой модели твердого тела можно уподобить растянутой упругой пленке, стремящейся сократить свою поверхность. Чтобы оторвать «пленку» от других слоев атомов, необходимо совершить работу против сил поверхностного натяжения материала. Как следствие, происходит распад тела на две части (разрушение) – с образованием новых поверхностей. За меру сопротивления разрушению можно взять коэффициент поверхностного натяжения. В механике разрушения твердого тела его трактуют как отношение энергии  $W$  на границе тела к единице площади

$$\gamma = \frac{W}{S}$$

(его называют удельной поверхностной энергией разрушения). Заметим, что рост трещины сопровождается образованием двух ее берегов, так что на образование единицы площади трещины требуется энергия  $2\gamma$ .

Общая площадь новых поверхностей  $S_1 = 2S$ ; удельная энергия единицы поверхности плоскости разрыва  $W_{\text{пов}} = W_1 \cdot N_{\text{CB}}$  ( $W_1$  – энергия одной связи,  $N_{\text{CB}}$  – число связей на  $1 \text{ м}^2$  поверхности); энергия всей поверхности плоскости

$$W = W_{\text{пов}} \cdot S$$

– это энергия слоев атомов с обоих берегов разрыва.

Энергия одной связи равна работе, требуемой для удаления атомов друг от друга на расстояние, где силы взаимодействия уже незначительны

$$W_1 = F_{\text{cp}} \cdot l,$$

где (рис. 18.1)  $l = 4r_0 - r_0$ ,  $F_{cp} = 0,5F_{max}$ , т. е. энергия

$$W_1 = 0,5F_{max}(2r_0 - r_0) = 3 \cdot 10^{-19} \text{ Дж};$$

удельная поверхностная энергия

$$\gamma = \frac{W_{нов} S}{S_1} = 1,5 \text{ Дж} / \text{м}^2. \quad (18.2)$$

У поваренной соли NaCl  $\gamma = 1,3 \text{ Дж} / \text{м}^2$ .

#### 18.4 Линейная и нелинейная механика разрушения

На практике разрушение твёрдого тела происходит при напряжениях, значительно меньших теоретического предела прочности (в 10...100 раз). Причинами тому выступают различные неоднородности: трещины, поры, включения и др.

Под разрушением понимают не только распад тела, но и необратимое пластическое течение, а также разрушение в ползучести и от усталости.

Линейная механика разрушения описывает хрупкое разрушение, т. е. разрушение в результате роста трещины в отсутствие заметных пластических деформаций вдали от вершины трещины. Соответствующие задачи можно сформулировать в терминах коэффициентов интенсивности напряжений.

В случае значительных размеров пластичной зоны у вершины трещины, превышающих длину трещины (более чем на 10 %), следует перейти к описанию в терминах нелинейных моделей разрушения. Характеризовать его могут  $J$ -интеграл и раскрытие трещины (COD).

Разумеется, практически невозможно добиться полного отсутствия трещин, скорее следует препятствовать их развитию.

## Лекция 19 Теория разрушения Гриффитса

### 19.1 Трещины и прочность

До Гриффитса прочность связывалась с той или иной константой материала, например, с пределом прочности  $\sigma_B$  (16.3). По Гриффитсу (1921 г.) процесс разрушения связывается с трещинами в теле. В экспериментах по разрушению стеклянных стержней обычные стеклянные стержни в 30–40 раз менее прочны, чем тонкие волокна, вытянутые из расплава. В снижении прочности Гриффитс «обвинял» именно трещины.

В 1924 г. Иоффе установил, что после растворения слоя с поверхностными трещинами (на кристаллах каменной соли) в воде прочность кристаллов приблизилась к теоретической (18.1). В начале 1970-х годов образцы стекла омывались проточной водой, снимавшей поверхностный слой, – в результате прочность образцов значительно выросла (рис. 19.1).

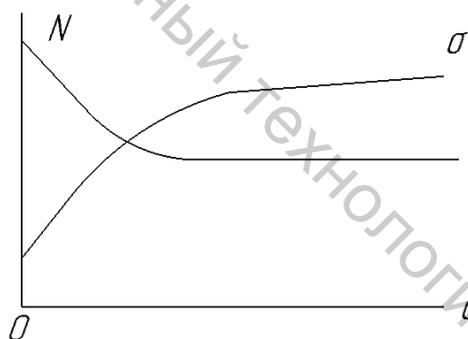


Рисунок 19.1 – Зависимости прочности  $\sigma$  и плотности распределения исходных дефектов  $N$  от толщины съема поверхностного слоя  $\delta$

### 19.2 Движение трещины

Теория Гриффитса объяснила катастрофический характер хрупкого разрушения, огромные ускорения в движении трещин и невозможность остановить рост трещины, если он «прошёл критическую точку». Вывод: материал способен работать при заданной нагрузке, если размеры трещины не превышают критических.

В хрупком металле трещины, находясь в докритической стадии процесса, движутся со скоростью порядка 1 мм/час. По достижении

критического размера скорость за 0,001 с вырастала до 10000 км/час (с ускорением порядка  $10^8 \text{ м/с}^2$ ). Трещина в стекле летит быстрее пули (со скоростью 1,5 км/с), в алмазах со скоростью 8 км/с (космическая скорость!). Скорость трещины составляет обычно 0,6...0,7 скорости звука в материале.

### 19.3 Задача Гриффитса

На рисунке 19.2 показана пластина с прямолинейной трещиной. Пластина растягивается напряжениями, равными не бесконечности  $\sigma$ , перпендикулярными трещине.

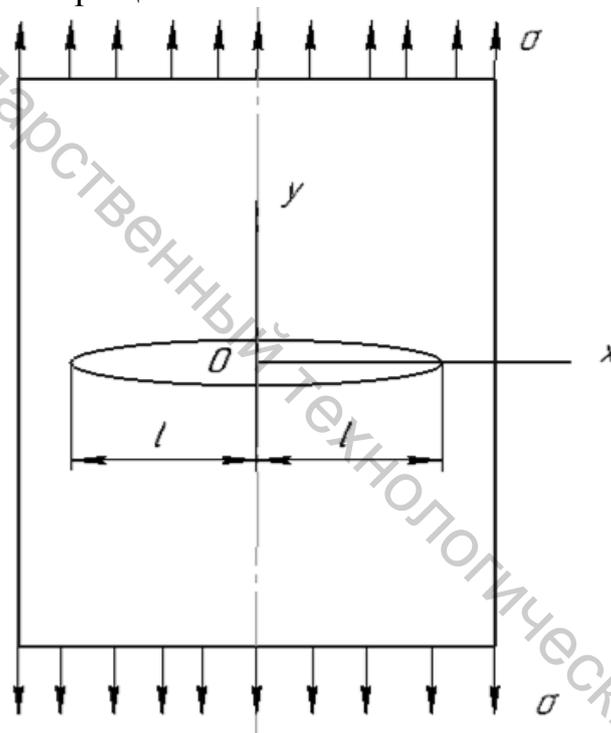


Рисунок 19.2 – Растяжение плоскости с одиночной трещиной

Условие развития трещины состоит в энергетическом балансе.

$$\frac{\partial}{\partial l}(W - \Gamma) = 0. \quad (19.1)$$

В условии (19.1)  $W$  – потенциальная энергия деформации пластины,  $\Gamma$  – поверхностная энергия трещины,  $l$  – полудлина трещины. В неудержимом росте трещины скорость высвобождения потенциальной энергии в условии (2.1) больше прироста поверхностной энергии (за счёт образования новых поверхностей):

$$\left| \frac{\partial W}{\partial \ell} \right| > \left| \frac{\partial \Gamma}{\partial \ell} \right|. \quad (19.2)$$

Поверхностная энергия трещины в пластине единичной толщины – в балансе (19.1) и условии (19.2) –

$$\Gamma = 4\ell\gamma, \quad (19.3)$$

где  $\gamma$  – удельная поверхностная энергия разрушения (18.2).

Потенциальная энергия единицы объёма пластины без трещины  $\sigma^2/2E$ . Введём в пластину трещину и положим, что исчезновение напряжений произошло в эллиптической области, окружающей трещину, – разность энергий

$$\frac{\sigma^2}{2E} \pi(\ell \cdot 2\ell) = \frac{\pi}{E} \sigma^2 \ell^2, \quad (19.4)$$

( $\ell$  и  $2\ell$  – малая и большая полуоси области,  $\pi(\ell \cdot 2\ell)$  – площадь эллипса). Это же выражение Гриффитс получил из решения Инглиса (1912 г.) о растяжении плоскости с эллиптическим отверстием.

Используя значения (19.3–19.4) в балансе (19.1), найдём разрушающее напряжение в случае плоского напряженного состояния (тонкой пластины):

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi\ell}}. \quad (19.5)$$

В случае плоского деформированного состояния (толстой пластины)

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi\ell(1-\mu^2)}} \quad (19.6)$$

– см. закон Гука (8.4) с модулем сдвига (7.7) и коэффициентом Пуассона  $\mu$  (8.3). Формула (19.6) вполне аналогична формуле (19.5).

На рисунке 19.3 показаны графики зависимостей энергий (19.1) и их суммы от длины трещины.

По достижении полной энергией максимума равновесия, очевидно, нет; критическая длина трещины – см. рисунок 19.3 и формулу (19.5) –

$$l_c = \frac{2E\gamma}{\pi^2\sigma_c^2}. \quad (19.7)$$

При превышении напряжения  $\sigma_c$  (19.5, 19.6) наступает закритическое состояние – трещина быстро растёт (рис. 19.4).

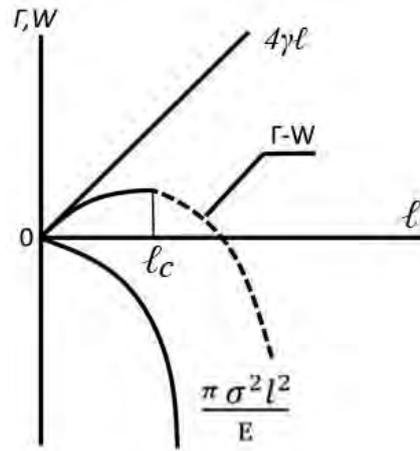


Рисунок 19.3 – Зависимости энергий  $\Gamma$ ,  $W$ ,  $\Gamma-W$  от длины трещины

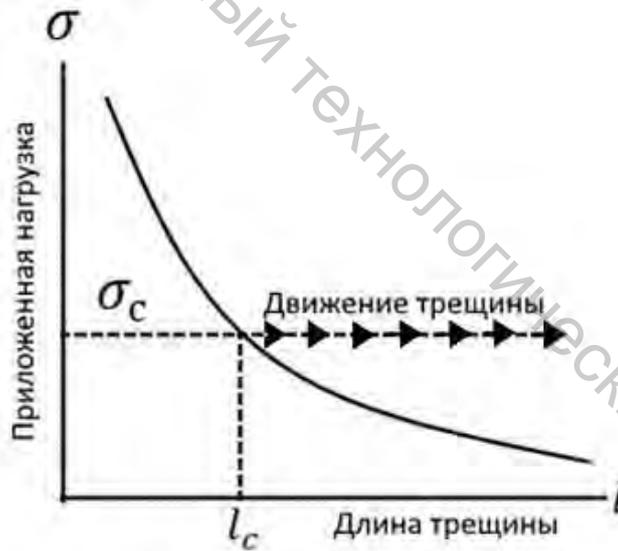


Рисунок 19.4 – Неустойчивость в задаче Гриффитса

#### 19.4 Поверхностная энергия разрушения материала

Поверхностная энергия разрушения материала равна работе, требуемой на появление единицы новой поверхности тела из заданного

материала. Теория Гриффитса не рассматривает медленное докритическое развитие трещины, предшествующее её быстрому росту (рис. 19.5). У вершины трещины в реальном теле возникает пластическая деформация, неизбежная в концентрации напряжений у вершины трещины. На пластическую деформацию требуется энергия, при этом поверхностная энергия составляет малую часть от общих затрат энергии. Именно затратами энергии на пластическую деформацию объясняется сравнительно медленный докритический рост трещины. Работа на образование единицы новой поверхности равна сумме

$$\gamma_0 + \gamma_{\text{п}}, \quad (19.8)$$



Рисунок 19.5 – Докритический рост трещины

где  $\gamma_0$  – удельная поверхностная энергия разрушения,  $\gamma_{\text{п}}$  – удельная работа, затрачиваемая на пластическую деформацию у вершины трещины. Сумма (19.8) называется эффективной удельной работой разрушения  $\gamma_{\text{эфф}}$ . Приведём фрагмент таблицы 19.1, содержащий величины  $\gamma_0$  и  $\gamma_{\text{п}}$ .

Таблица 19.1 – Удельная энергия разрушения

Материал	$\gamma_0$ , Дж/кг	$\gamma_{\text{п}}$ , Дж/кг
Сталь при 150 °С	2	4000
Силикатное стекло	1,2	3
Цементный камень	0,4	2,3

Обобщение подхода Гриффитса было предпринято в исследовании разрушения полимеров с трещинами: условие начала разрушения (19.2) получает вид

$$\lambda \frac{\sigma^2}{E} \ell \geq 2\gamma + \eta_0. \quad (19.9)$$

В условии (19.9)  $\gamma \approx \gamma_{II}$  (см. табл. 19.1),  $\eta_0$  – характеристика диссипации энергии, характерная для полимеров,  $\lambda$  – постоянная порядка единицы. Разрушающее напряжение определяется по формуле, аналогичной формулам (19.5, 19.6),

$$\sigma_c = \lambda_I \sqrt{\frac{E(2\gamma + \eta_0)}{l}},$$

где  $\lambda_I = 1/\sqrt{\lambda}$ . Во многих случаях  $\eta_0 \gg 2\lambda$ , так что

$$\delta_c = \lambda_I \sqrt{\frac{E\eta_0}{l}}.$$

## Лекция 20 Напряжённое состояние у вершины трещины

### 20.1 Деформации при растрескивании

Наиболее важно напряжённое состояние у вершины трещины. При растрескивании возможны три основных типа деформаций (рис. 20.1).

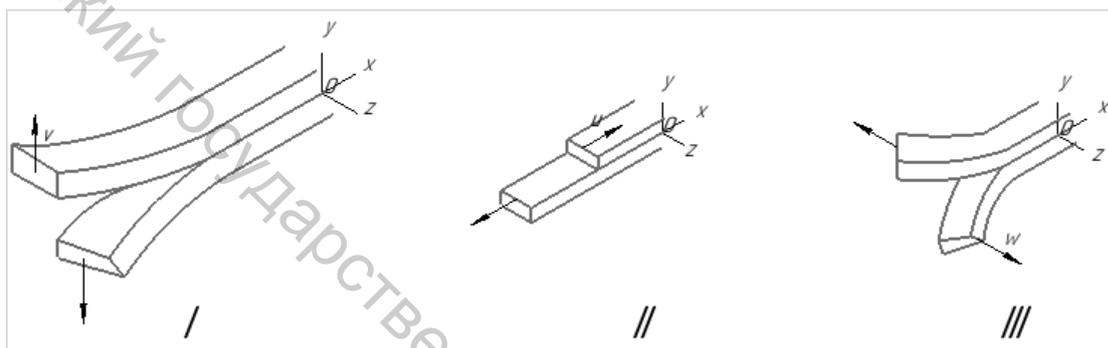


Рисунок 20.1 – Растрескивание отрывом (I), поперечным сдвигом (II), продольным сдвигом (III)

Различают их по направлению относительно фронта трещины (рис. 20.2). Там же показана полярная система координат.

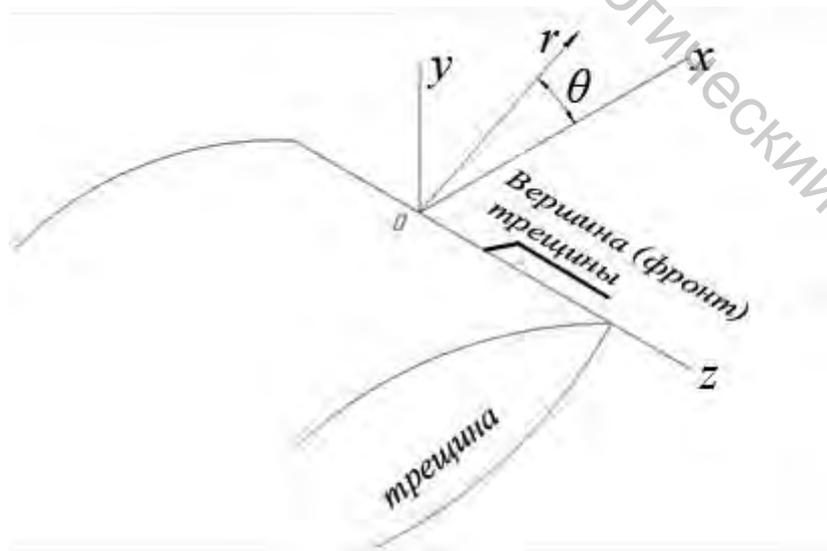


Рисунок 20.2 – Трещина: декартовы и полярные координаты

## 20.2 Напряжённое состояние в окрестности вершины трещины

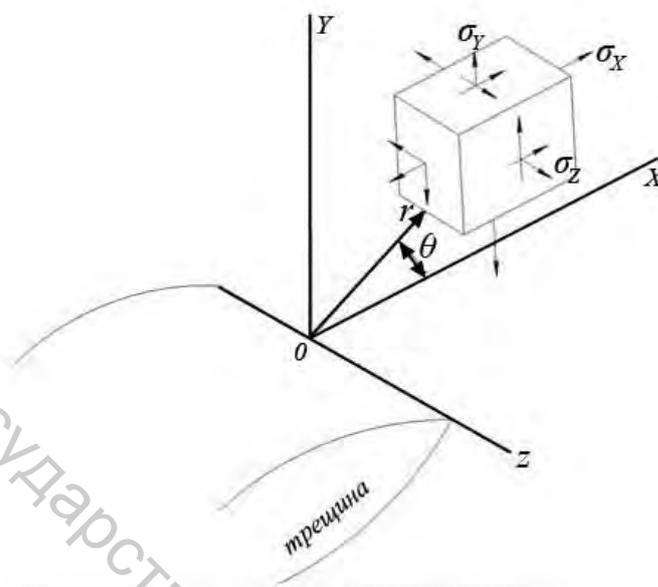


Рисунок 20.3 – Напряжённое состояние у кончика трещины

На рисунке 20.3 показано напряжённое состояние в точке  $(x, y, z, \theta)$ . Напряжения в случае трещины I (рис. 20.1)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \\ \sigma_y \end{aligned} \right\} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 \pm \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right], \quad (20.1)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{1}{2} \theta \sin \frac{3}{2} \theta.$$

В случае трещины II (рис. 20.1)

$$\sigma_x = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right],$$

$$\sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \quad (20.2)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{1}{2} \theta \sin \frac{3}{2} \theta \right].$$

Коэффициенты  $K_I, K_{II}$  в асимптотических выражениях (20.1, 20.2) зависят от размеров и формы тела (разумеется, от схемы нагружения) и не зависят от координат (рис. 20.2). Они называются коэффициентами интенсивности напряжений. Их размерность – сила/длина<sup>3/2</sup>. В задаче Гриффитса (рис. 19.2)

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi l}. \quad (20.3)$$

### 20.3 Перемещения у кончика трещины

Перемещения  $u$  и  $v$  связаны с деформациями формулами (5.5, 5.6), последние – законом Гука (7.8) с напряжениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]. \end{aligned} \quad (20.4)$$

В плоской деформации  $\varepsilon_z = 0$ , откуда  $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$ . После интегрирования уравнений (20.4) перемещения

$$u = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - 2\mu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right],$$

$$v = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2(1 - \mu) - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right], \quad (20.5)$$

$$u = \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2(1 - \mu) + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right],$$

$$v = \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ -1 + 2\mu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (20.6)$$

В асимптотических выражениях (20.5, 20.6)  $G$  – модуль сдвига (7.7),  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

По формулам (20.1, 20.2, 20.5, 20.6) можно вычислить главные напряжения, максимальное значение напряжения и прочие величины, требуемые при оценке прочности материала. На рисунке 20.4 показаны графики главных напряжений (разделённых на  $K_I/\sqrt{2\pi r}$ ), а также их разности  $2\tau_{max} = \sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_{\text{ЭКВ}}$  вблизи трещины отрыва I (рис. 20.1). На рисунке 20.5 показаны линии равных эквивалентных напряжений  $\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 - \sigma_2$ .

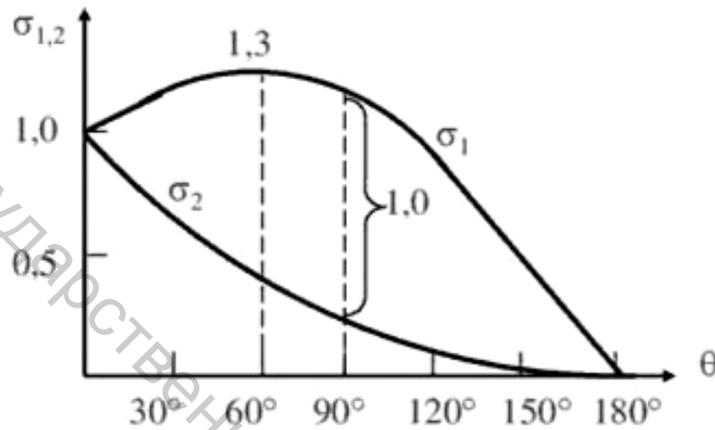


Рисунок 20.4 – Главные напряжения вблизи вершины трещины отрыва

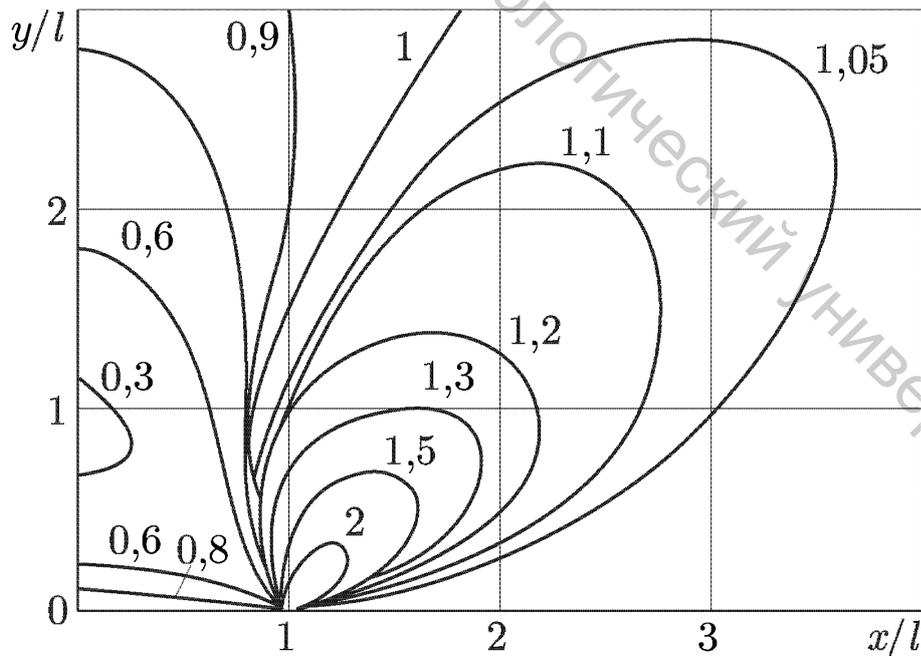


Рисунок 20.5 – Линии  $\sigma_{\text{ЭКВ}} = \text{const}$  для трещины отрыва разреза

## 20.4 Некоторые особенности напряженного состояния в окрестности кончика разреза

1. На продолжении трещины отрыва (перед ее кончиком), т. е. при  $y = 0, \theta = 0$ , напряжения (20.1)  $\sigma_x = \sigma_y$  (являясь главными). Следовательно, пластическое скольжение будет наблюдаться под углом  $45^\circ$  к лицевой поверхности пластинки (в плоском напряженном состоянии), т. е. в направлении наибольших касательных напряжений  $\tau_{max} = \sigma_y/2$ . В плоской деформации  $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y) = 2\mu\sigma_y$  – возникает объемное напряженное состояние (при меньшем  $\tau_{max}$ ), пластическое скольжение затруднено, иными словами, стеснение деформации вдоль фронта трещины (20.2) препятствует развитию пластического течения.

2. В трещинах II (рис. 20.1) напряжение  $\sigma_x$  достигает максимума, но максимум  $\sigma_y$  достигается при  $\theta = 60^\circ$  (на 30 % больший  $\sigma_y$  при  $\theta = 0$ ), но трещина развивается все-таки в направлении  $\theta = 0$ . Если от  $\max \sigma_y$  и возникают надрывы материала, они располагаются, как показано на рисунке (20.6).

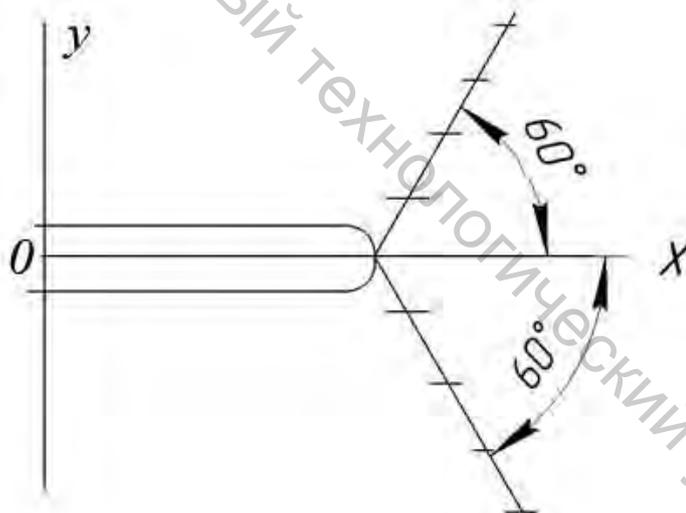


Рисунок 20.6 – Вторичные трещины от  $\max \sigma_y$

3. Из асимптотических формул (20.1, 20.2) следует, что при  $r \rightarrow 0$  напряжения неограниченно растут. Задолго до «бесконечности» закон Гука оказывается несправедливым. Развивается пластическая деформация, в итоге напряжения оказываются ограниченными.

## Лекция 21

### Коэффициент интенсивности напряжений

#### 21.1 Расчет коэффициента интенсивности напряжений по коэффициенту концентрации напряжений

Зависимость напряжений, перемещений и деформаций от геометрии и размеров тела, длины трещины, характера внешних нагрузок заключена в коэффициент . В частности, величина напряжений у вершины трещины прямо пропорциональна (20.1, 20.2, 20.4, 20.5) коэффициенту . Вместо напряжений можно прямо использовать его.

Основное определение коэффициента, например, в случае трещины  $I$  (рис. 20.1)

$$K_I = \lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ r \rightarrow 0}} [\sqrt{2\pi r} \cdot \sigma_y(r, \theta)]. \quad (21.1)$$

Формулы для  $K_{II}, K_{III}$  имеют аналогичный вид. В случае разреза с конечным радиусом кривизны наибольшее местное напряжение

$$\sigma_{max} = \alpha_\sigma \sigma_{ном}. \quad (21.2)$$

Коэффициент  $\alpha_\sigma$  в формуле (21.2) – коэффициент концентрации напряжений,  $\sigma_{ном}$  – номинальное напряжение, расчет его не учитывает концентрации напряжений.

Пусть имеется разрез с малым радиусом кривизны  $\rho$ . Для трещин  $I$  (рис. 20.1) напряжение

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{\rho}{2r} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \right],$$

при  $\theta = 0, r = \rho/2$

$$\sigma_y = \frac{2K_I}{\sqrt{\pi\rho}};$$

коэффициент интенсивности напряжений (21.1).

$$K_I = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\pi\rho}}{2} \sigma_{y \max} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\pi\rho}}{2} \alpha_\sigma \sigma_{ном}. \quad (21.3)$$

При растяжении плоскости с эллиптическим разрезом

$$\alpha_{\sigma} = 1 + 2\sqrt{l/\rho}$$

( $l$  – большая полуось эллипса). Коэффициент (21.3)

$$K_I = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\pi\rho}}{\rho} \left( 1 + 2\sqrt{\frac{l}{\rho}} \right) \sigma = \sigma\sqrt{\pi l}$$

– см. формулу (20.3).

Взяв из справочников тот или иной коэффициент  $\alpha_{\sigma}$ , можно (используя экстраполяцию) получить коэффициент интенсивности напряжений.

## 21.2 Метод сечений в приближенном определении коэффициента $K$

Для вычисления коэффициентов  $K$  можно использовать известный в механике материалов метод сечений.

Выделим каким-либо сечением (можно и ломаным) часть плоского тела, содержащую трещину. Сечение должно проходить вдоль трещины. Оставшаяся часть тела должна находиться в равновесии. Условие равновесия состоит в компенсации усилия, не передающегося через линию трещины, усилием от концентраций напряжений у вершины трещины.

Рассмотрим в качестве примера задачу Гриффитса (рис. 19.2). Усилие, не передающееся через линию трещины, равно  $2\sigma l$  ( $2l$  – длина трещины, толщина равна 1). Возросшее напряжение у трещины создает дополнительное усилие

$$2 \int_0^a \sigma_y dr \quad (21.4)$$

– см. формулу (20.1) для  $\sigma_y$  при  $\theta = 0$ , где предел интегрирования  $a$  определяется из условия  $\sigma_y = \sigma$  (при  $r = a$ ):

$$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi a}} = \sigma,$$

откуда предел

$$a = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma^2}. \quad (21.5)$$

Условие равновесия с учетом (21.5)

$$2\sigma l = 2 \int_0^a \sigma_y dr = 2 \int_0^a \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} dr = \frac{2K_I}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2\sqrt{a} = \frac{4K_I}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}\sigma}. \quad (21.6)$$

Находим в итоге коэффициент  $K_I$ : результат

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi l},$$

совпадает с точным (20.3).

Рассмотрим пример с трещиной, изображенной на рисунке 21.1. Проведем сечение вдоль трещины. Номинальные напряжения в этом сечении (1.11)

$$\sigma_n = \sigma \cos^2 \alpha,$$

$$\tau_{nt} = \sigma \sin \alpha \cos \alpha.$$

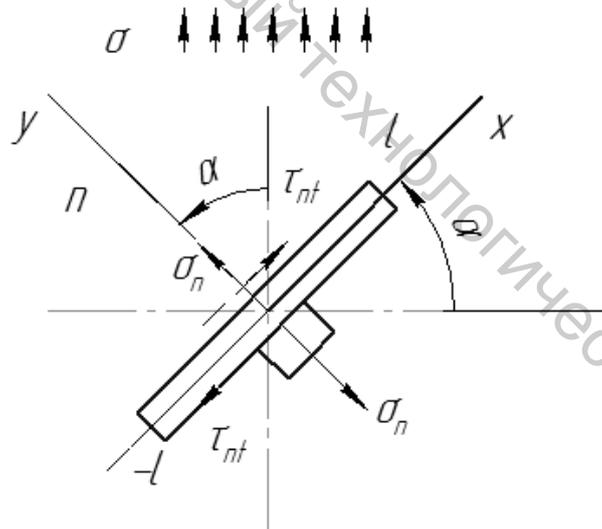


Рисунок 21.1 – Номинальные напряжения в сечении с трещиной

Рассудим также, как в первом примере, найдем:

$$K_I = (\sigma \cos^2 \alpha) \cdot \sqrt{\pi l}. \quad (21.7)$$

Понятно: формула (21.7) аналогична формуле (20.3).

В направлении сечения дополнительное усилие записывается аналогично формулам (21.4, 21.5):

$$2 \int_0^{a_2} \tau_{xy} dr,$$

где касательное напряжение (20.2)  $\tau_{xy} = K_{II}/\sqrt{2\pi r}$ , верхний предел интегрирования

$$a_2 = \frac{K_{II}^2}{2\pi\tau_{nt}^2}.$$

Условие равновесия, аналогичное условию (21.6), дает

$$K_{II} = (\sigma \cos\alpha \sin\alpha)\sqrt{\pi l}. \quad (21.8)$$

И здесь формула (21.8) аналогична формуле (20.3).

### 21.3 Случай деталей сложной формы

В случаях сложных форм деталей возможно численное решение задачи теории упругости.

Приведем на рисунках (21.2–21.5) некоторые формы тел с трещинами и соответствующие им коэффициенты интенсивности напряжений  $K_I, Y$  – поправочные коэффициенты.

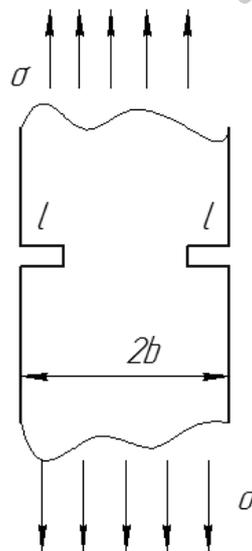


Рисунок 21.2 – Симметричные двухсторонние трещины (Ирвин, 1958 г.)

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi l} \cdot Y; \quad Y = \left[ \frac{2b}{\pi l} \cdot \left( \operatorname{tg} \frac{\pi l}{2b} + 0,1 \sin \frac{\pi l}{b} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

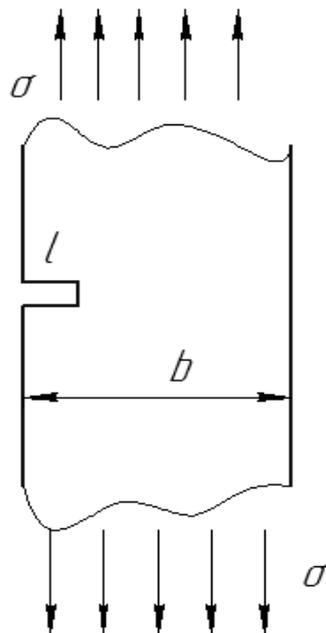


Рисунок 21.3 – Односторонняя трещина (Гросс, 1965 г.)

$$K = \sigma \sqrt{\pi l} \cdot Y;$$

$$Y = 1,12 - 0,23 \cdot \lambda + 10,55 \cdot \lambda^2 - 21,72 \cdot \lambda^3 + 330,39 \cdot \lambda^4,$$

$$\lambda = \frac{l}{b} < 0.7.$$

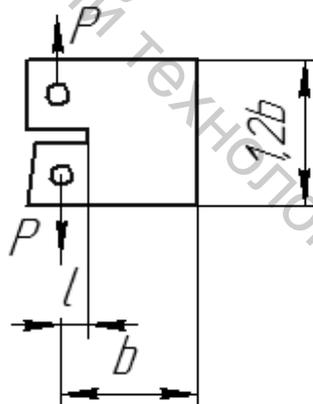


Рисунок 21.4 – Внецентренное растяжение образца с односторонней трещиной (Гросс, 1966 г.)

$$K_I = \frac{P}{t\sqrt{b}} \cdot Y;$$

$$Y = \sqrt{\lambda}(2,96 - 185,5 \cdot \lambda + 665,5 \cdot \lambda^2 - 1017 \cdot \lambda^3 + 628,9 \cdot \lambda^4),$$

$$\lambda = \frac{l}{b}$$

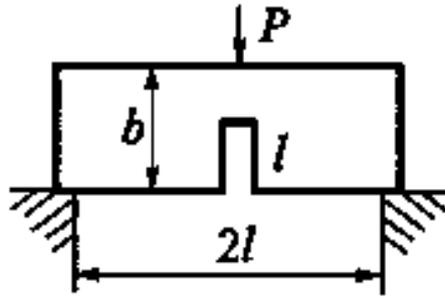


Рисунок 21.5 – Поперечный изгиб образца с поперечной трещиной  
(Гросс, Сроули, 1965 г.)

$$K_I = \frac{3Pl}{tb^{3/2}} \cdot Y;$$

$$Y = \sqrt{\lambda}(1,93 - 3,07 \cdot \lambda + 14,53 \cdot \lambda^2 - 25,11 \cdot \lambda^3 + 25,8 \cdot \lambda^4),$$

$$\lambda = \frac{l}{b}$$

## Лекция 22

### Критерии разрушения твердых тел

#### 22.1 О критерии разрушения

Критерий устанавливает величину усилия, при котором трещина начинает распространяться. Длина трещины и нагрузка становятся взаимосвязанными - изменять длину трещины, не изменяя нагрузки, невозможно. Если трещина получает возможность расти (быстро или медленно), такое состояние тела называют предельным или критическим. Критерий разрушения при этом удовлетворяется.

Установление и изучение критерия разрушения – основной вопрос теории трещин. Общий вид критерия

$$F(p, \ell) \leq F_c, \quad (22.1)$$

где  $F(p, \ell)$  – зависимость величины, принятой за критерий, от нагрузки  $p$  и длины трещины  $\ell$ ;  $F_c$  – характеристика трещиностойкости (определяемая из эксперимента в критическом состоянии). Выражение (22.1) является уравнением линии на плоскости  $p$ - $\ell$  – диаграммы разрушения, отделяющей на плоскости  $p$ - $\ell$  безопасную область,  $p < p_c, \ell < \ell_c$  от опасной, где  $p > p_c, \ell > \ell_c$ . Заметим: при

$$\frac{\partial p}{\partial \ell} > 0 \quad (22.2)$$

трещина медленно растет (при соответственно медленном росте нагрузки) – малому приращению нагрузки отвечает малое приращение длины трещины; при

$$\frac{\partial p}{\partial \ell} < 0 \quad (22.3)$$

трещина способна развиваться при постоянной нагрузке; чтобы трещина остановилась, нужно успеть снизить нагрузку, что, скорее всего, не удастся ввиду сверхвысоких скоростей роста трещины. Значения производных (22.2) и (22.3) отвечают устойчивости критического состояния равновесия и, соответственно, его неустойчивости.

Рассмотрим в качестве примера подкрепленную стрингерами растянутую панель с центральной трещиной (рис. 22.1).

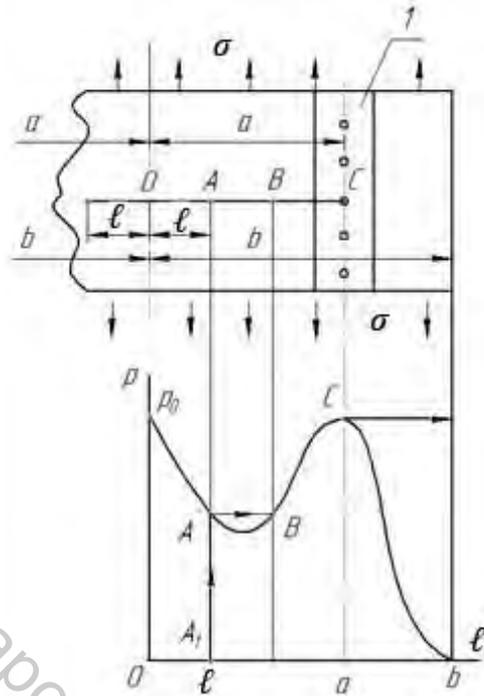


Рисунок 22.1 – Диаграмма разрушения подкрепленной панели;  $p_0$  – разрушающее напряжение панели без трещины

Положим в уравнении (22.1)  $F(p, l) = K(p, l)$ . Соответствующая кривая изображается под рисунком 22.1. Нетрудно заметить ниспадающие и восходящий участки, отвечающие неустойчивым и устойчивому состояниям критического равновесия.

Пусть полудлина исходной трещины равна  $l$  (ее конец в точке  $A_1$  на диаграмме). Рост нагрузки сопровождается подъемом точки  $(l, p)$  до точки  $A$ , отвечающей критическому состоянию панели, и, ввиду его неустойчивости, перескоком в устойчивое состояние  $B$  – трещина останавливается. При дальнейшем росте нагрузки трещина растет вместе с ней, достигает холма  $C$ , в котором происходит окончательный долом панели – трещина проскакивает до ее края.

Если нагрузка не дорастает до точки  $C$ , панель остается работать с трещиной, полностью перерезающей центральную часть панели (между стрингерами), достигая размера  $2a$ .

## 22.2 Силовой критерий разрушения

В росте трещины разрушение сосредоточено в окрестности ее конца. Можно полагать, что процесс разрушения определяется, в основном, асимптотическими напряжениями (20.1, 20.2),

пропорциональными коэффициенту  $K$  (рис. 22.2). По Ирвину (1957 г.) зона безопасных напряжений ограничена предельной кривой, отвечающей критическому коэффициенту  $K_c$  – характеристика трещиностойкости материала. Трещина не растет, если  $K < K_c$ .

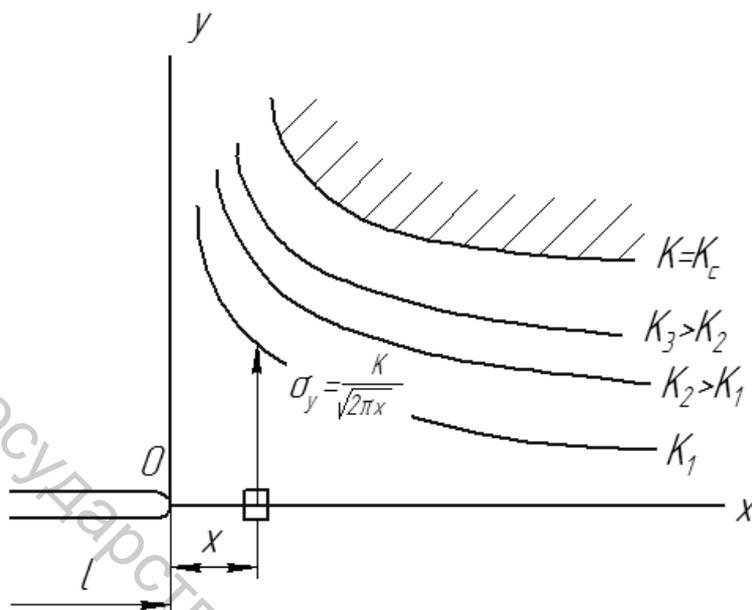


Рисунок 22.2 – Асимптотические напряжения  $\sigma_y$  перед вершиной трещины отрыва

Наиболее эффективен критерий Ирвина, когда размеры пластичной зоны у конца трещины малы по сравнению с длиной трещины, что характерно для хрупких материалов.

### 22.3 Энергетический критерий Гриффитса

По Гриффитсу величина поверхностей энергии, требуемой для образования новой поверхности отрыва площадью  $\delta S$ ,

$$\delta \Gamma = G \delta S. \quad (22.4)$$

В произведении (22.4) величина

$$G = - \frac{dW}{dS} \quad (22.5)$$

– интенсивность освобождающейся упругой энергии. Энергия  $\Gamma$  – поверхностная, выражение (22.4) запишем в виде

$$\delta \Gamma = 2\gamma \delta S \quad (22.6)$$

( $\gamma$  – приходящаяся на единицу площади (удельная) поверхностная энергия, затрачиваемая на разрушение). Сопоставляя выражения (22.4, 22.5, 22.6), напишем критерий Гриффитса:

$$G \leq G_c,$$

где  $G = |dW/dS|$ , вязкость разрыва (характеристика трещиностойкости материала)

$$G_c = 2\gamma_{эфф}.$$

Мысленно проведём разрез, на поверхностях которого действуют (перед фронтом трещины) напряжения  $\sigma_y$  (20.1). При продвижении трещины (рис. 22.3) на единицу площади поверхности края мысленного разреза удаляются друг от друга. Искомый приток энергии (22.5) равен работе упругих сил  $\sigma_y dx$  на перемещениях  $v$  (20.5; рис. 20.1, I)

$$G = -\frac{1}{2} \int_0^1 \sigma_y * 2v(dx). \quad (22.7)$$

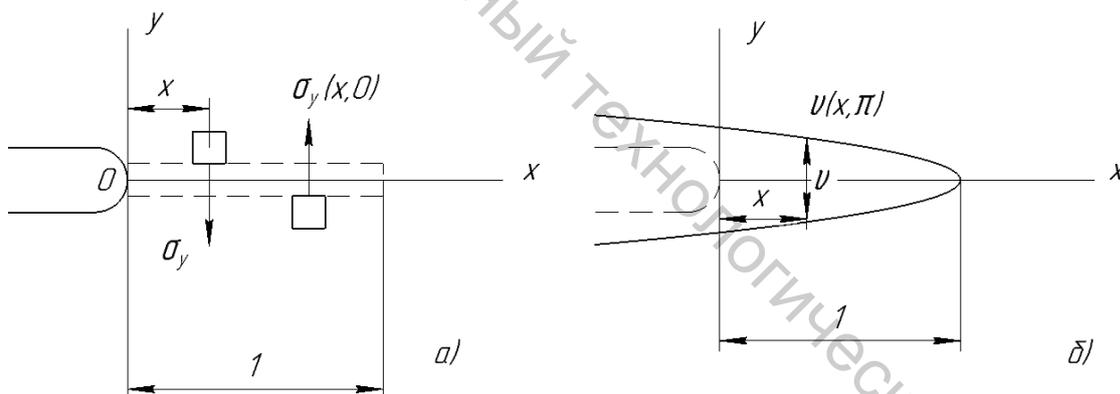


Рисунок 22.3 – Продвижение кончика трещины на единицу (длины):  
а) до продвижения; б) после продвижения

Используем в работе (22.7)

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}},$$

перемещения, с учётом выражения (7.7) модуля сдвига в формуле (20.5),

$$v(x, \pi) = \frac{4(1-\mu^2)K_I}{E} \sqrt{\frac{1-x}{2\pi}}.$$

После интегрирования (22.7) получим: в условиях плоской деформации

$$G = (1 - \mu^2) \frac{K_I^2}{E}, \quad (22.8)$$

в условиях плоского напряженного состояния

$$G = \frac{K_I^2}{E}. \quad (22.9)$$

Заметим: вязкость разрушения  $K_c$  (рис. 22.2) не одинакова в плоской деформации и плоском напряжённом состоянии, ибо размеры пластической зоны в этих двух случаях различны.

Связь между критическими характеристиками материала даётся формулами (22.8, 22.9):

$$(1 - \mu^2) K_{Ic}^2 = E G_{Ic},$$

$$K_c^2 = E G_c$$

(в первом случае вводится индекс  $I$  – чтобы подчеркнуть отрывной характер (рис. 20.1) движения трещины; в плоском напряженном состоянии разрушение происходит (часто) срезом (косым изломом) – индекс  $I$  не ставят).

Величины  $G_c$  и  $G_{Ic}$  зависят от сопротивления материала пластической деформации, но  $G$  не зависят от этого, ибо определяются по асимптотическим формулам для поля напряжений (размеры пластических зон принимаются Ирвином и Орованом малыми в сравнении с длиной трещины).

В более общем случае поток упругой энергии в конец трещины записывается в виде

$$G = - \frac{dW}{dl} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \int_0^a \frac{1}{2} (\sigma_y v + \tau_{xy} u + \tau_{zy} w) dx. \quad (22.10)$$

Напряжения в формуле (22.10) отвечают перемещениям кромок трещины, растущей в направлении  $x$  – см. рис. 20.1. В итоге получаем в плоской деформации

$$G = \frac{1-\mu^2}{E} K_I^2 + \frac{1-\mu^2}{E} K_{II}^2 + \frac{1+\mu}{E} K_{III}^2 = G_I + G_{II} + G_{III}, \quad (22.11)$$

в плоском напряжённом состоянии выражение  $1 - \mu^2$  в формуле (22.11) следует заменить на 1.

В сложном нагружении уравнение предельной поверхности, ограничивающей в пространстве коэффициентов  $K_I, K_{II}, K_{III}$  область допустимых состояний, принимается в виде

$$\left(\frac{K_I}{K_{Ic}}\right)^\alpha + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIc}}\right)^\beta + \left(\frac{K_{III}}{K_{IIIc}}\right)^\gamma = 1, \quad (22.12)$$

Показатели в уравнении (22.12) определяются в экспериментах.

#### 22.4 Формула податливости Ирвина

Пусть на упругое тело действует сила  $P$ . По мере приращения длины трещины на  $d\ell$  точка приложения силы  $P$  смещается на  $d\Delta$  – сила  $P$  совершает работу  $Pd\Delta$ . Накопленная упругая энергия равна  $0,5P\Delta$  (перемещение  $\Delta$  определяется для тела с трещиной длиной  $\ell$ ). При этой длине трещины  $\Delta = \lambda P$ ,  $\lambda$  – податливость тела. Поток энергии в вершину трещины

$$Gdl = -\frac{dW}{dl}dl + Pd\Delta,$$

или

$$G = -\frac{dW}{dl} + P\frac{d\Delta}{dl}. \quad (22.13)$$

Подставим в выражение (22.13) формулы

$$W = \frac{1}{2}Pd\Delta = \frac{1}{2}P^2\lambda,$$

$$\Delta = \lambda P,$$

$$G = -\frac{1}{2}P^2\frac{d\lambda}{dl} + P^2\frac{d\lambda}{dl} = \frac{1}{2}P^2\frac{d\lambda}{dl}.$$

В определении потока энергии следует построить предварительно (испытывая образцы с разными длинами трещин) кривую зависимости  $\lambda(\ell)$ . После этого можно найти производную податливости по длине трещины.

Вычислим величину  $G$  при изгибе образца – двухконсольной балки (рис. 22.4). Прогиб такой балки

$$\frac{1}{2}\Delta = \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{Pl^3}{3E \frac{th^3}{12}}, \Delta = \frac{8Pl^3}{Eth^2}, \lambda = \frac{8l^3}{Eth^3};$$

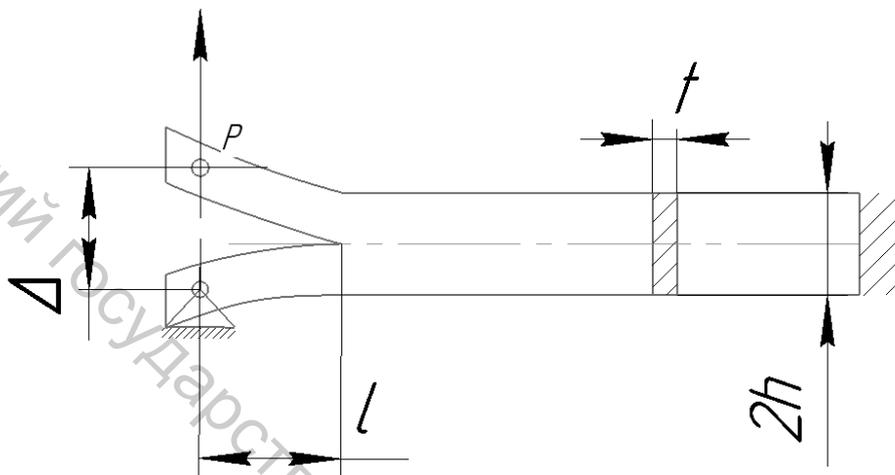


Рисунок 22.4 – ДКБ-образец

тогда

$$G = \frac{1}{2t} P^2 \frac{d\lambda}{dl} = \frac{1}{2t^2} P^2 \frac{24l^2}{Eh^3}.$$

Коэффициент интенсивности напряжений в ДКБ-образце находится из соотношения (22.9):

$$K = \sqrt{EG} = \frac{2\sqrt{3}Pl}{th^{3/2}}. \quad (22.14)$$

Формула (22.14) тем точнее, чем длиннее плечи образца.

## Лекция 23

### Разрушение упругого тела с трещиной

#### 23.1 Изменение полной энергии системы в малом приращении длины трещины

Рассмотрим систему, образованную образцом с нагружающим устройством, в двух состояниях 1 и 2. Потенциальная энергия упругой деформации

$$W_1 = \frac{1}{2} \int_S (\sum q_{i1} u_{i1}) dS, \quad W_2 = \frac{1}{2} \int_S (\sum q_{i2} u_{i2}) dS, \quad (23.1)$$

где  $S$  – поверхность тела с заданной на ней внешней нагрузкой  $q_i$  ( $i=1, 2, 3$ ),  $u_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) – перемещения точек поверхности  $S$ . Потенциальная энергия деформации (23.1) в росте трещины изменяется:

$$\delta W = W_2 - W_1 = \frac{1}{2} \int_S \sum (q_{i2} u_{i2} - q_{i1} u_{i1}) dS. \quad (23.2)$$

В податливом нагружении внешняя нагрузка не изменяется, но перемещения растут вместе с площадью трещины, т. е. изменение энергии (23.2)

$$\delta W = \frac{1}{2} \int_S \sum q_{i1} (u_{i2} - u_{i1}) dS > 0. \quad (23.3)$$

В жестком нагружении перемещения  $u_{i2} = u_{i1}$ , но во втором состоянии податливость тела больше, что требует меньшей нагрузки ( $q_{i2} < q_{i1}$ ), т. е. изменение энергии (23.2)

$$\delta W = \frac{1}{2} \int_S \sum (q_{i2} - q_{i1}) u_{i1} dS < 0. \quad (23.4)$$

Нагружающее устройство на перемещениях, связанных с ростом трещины, совершает работу

$$\delta A = \begin{cases} \int_S q_{i1} (u_{i2} - u_{i1}) dS = 2\delta W, \\ 0. \end{cases} \quad (23.5)$$

Первое из двух равенств (23.5) отвечает податливому нагружению, второе – жесткому (ввиду отсутствия перемещений точек приложения внешних сил). Потенциальная энергия нагружающего устройства уменьшается на величину (23.5).

Изменения полной энергии

$$\delta E = \delta W - \delta A = \begin{cases} -\delta W < 0 & \text{в податливом нагружении,} \\ \delta W < 0 & \text{в жестком нагружении} \end{cases} \quad (23.6)$$

— полная энергия (23.6) в обоих случаях уменьшается, что приводит к формуле

$$\delta E = \pm \delta W = \pm \frac{dW}{dl} \delta l. \quad (23.7)$$

Знак «+» в формуле (23.7) относится к жесткому нагружению (заданы перемещения), знак «-» – к податливому (заданы нагрузки). Поток упругой энергии в конец трещины

$$G = \lim_{\delta l \rightarrow 0} \frac{(-\delta E)}{\delta l} = \mp \frac{dW}{dl}. \quad (23.8)$$

В податливом нагружении производная  $\partial W / \partial \ell$  отрицательна (полная энергия системы (23.6) уменьшается), в жестком положительна (энергия системы опять же уменьшается): в обоих случаях поток энергии (23.8) положительный – можно писать

$$G = \left| \frac{\partial W}{\partial \ell} \right|. \quad (23.9)$$

Разумеется, вывод этот относится и к любому из промежуточных случаев.

## 23.2 Балочное приближение

Согласно Гриффитсу, сравнение энергии, выделяющейся в росте трещины, с энергией, требуемой на образование новых поверхностей, позволяет сделать вывод о равновесии трещины. Сделать это можно, если представить рост трещины как расслоение склеенных балок (рис. 23.1).

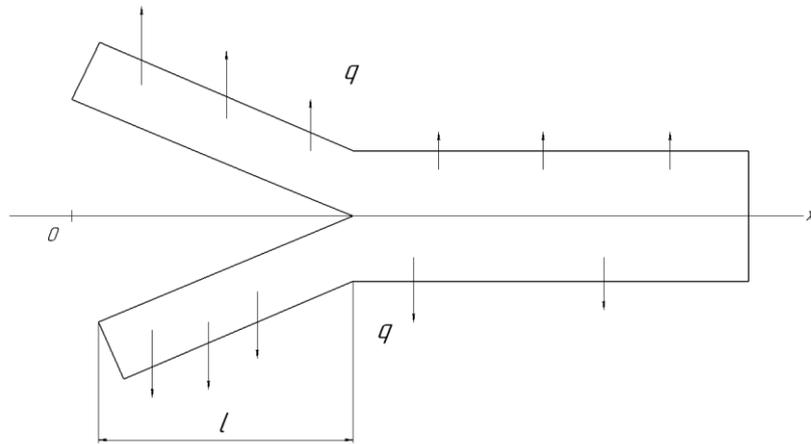


Рисунок 23.1 – Раздирание образца равномерно распределённой нагрузкой

Дифференциальное уравнение изгиба балки

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = q,$$

его интегрирование при краевых условиях

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^3} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = w = 0 \text{ при } x = l$$

даёт прогибы любой из балок (рис. 23.1)

$$w = \frac{q}{24EI} (x^4 - 4l^3x + 3l^4).$$

Изгибающий момент в балке

$$M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{qx^2}{2},$$

потенциальная энергия упругой деформации балок

$$W = \frac{1}{EI} \int_0^l M^2 \cdot dx = \frac{q^2 l^5}{20EI}.$$

Энергия (23.9), высвобождающаяся в расслоении балок,

$$G = \frac{\partial W}{\partial \ell} = \frac{q^2 \ell^4}{4EI}. \quad (23.10)$$

Если энергия (23.10) меньше требуемой, трещина не растёт. Предельное равновесие достигается в равенстве. Энергетический критерий равновесия

$$G < G_c, \quad (23.11)$$

где  $G_c$  – вязкость разрушения, или эффективная удельная поверхностная работа разрушения. Из выражений (23.10, 23.11) можно найти безопасную длину трещины:

$$l < \sqrt[4]{\frac{4EI}{q^2} G_c}.$$

### 23.3 Задача Обреимова

На рисунке 23.2 показана отделяемая клином полоска – тонкий поверхностный слой материала. Приток энергии в вершину слоя – вершину трещины (23.13).

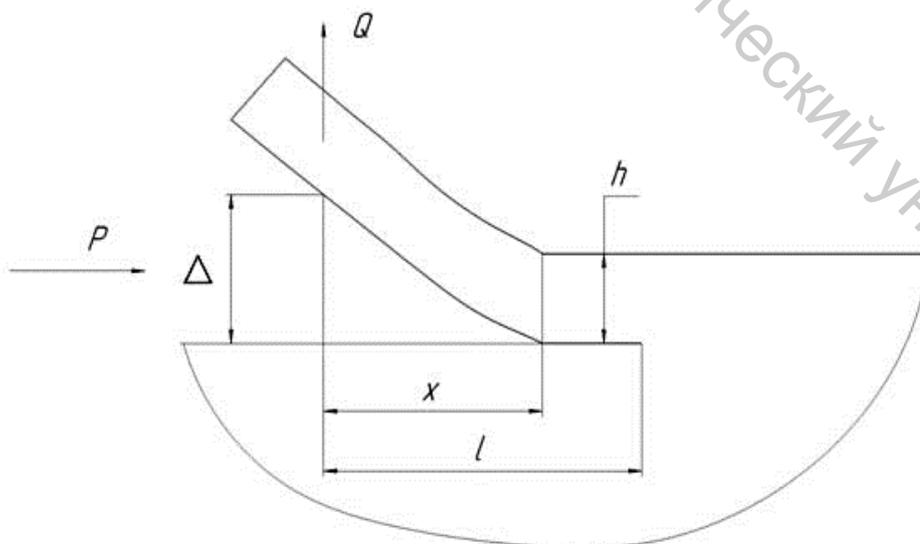


Рисунок 23.2 – Отщепление клином

$$G = \frac{1}{2b} Q^2 \frac{d\lambda}{d\ell} = \frac{1}{2b} \cdot \frac{\Delta^2}{\lambda^2} \cdot \frac{d\lambda}{d\ell} = \frac{1}{2b} \cdot \Delta^2 \cdot \frac{dk}{d\ell}. \quad (23.12)$$

где усилия, действующие на слой,

$$Q = \frac{\Delta}{\lambda} = k\Delta$$

( $\lambda$  – податливость слоя,  $k$  – усталость слоя). Прогиб слоя

$$\Delta = \frac{Ql^3}{3EI},$$

жёсткость

$$k = \frac{3EI}{l^3},$$

её производная в формуле (21.12)

$$\frac{dk}{dl} = -9 \frac{EI}{l^4},$$

т. е. приток энергии

$$G = \frac{1}{2b} \cdot \Delta^2 \cdot 9 \frac{EI}{l^4}.$$

Коэффициент интенсивности напряжений (22.14)

$$K = \sqrt{EG} = \frac{3E\Delta}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{I}{2b}}.$$

Так как  $dK/dl < 0$ , критическое состояние устойчиво, длина полоски – см. критерий Ирвина на рисунке 22.2 –

$$l = \left[ \frac{3E\Delta}{K_c} \cdot \sqrt{\frac{I}{2b}} \right]^{1/2}. \quad (23.13)$$

В движении клина длина полоски остаётся постоянной.

## Лекция 24 Поправка Ирвина

### 24.1 Диаметр пластической области

Величины напряжений и деформаций у вершины трещины не могут быть определены (из-за концентрации) методами линейной теории упругости. Должны быть привлечены методы теории пластичности.

Если размеры области с нелинейными проявлениями малы по сравнению с длиной трещины, эту область можно учесть приближённо. Пусть на расстоянии  $r_y$  от конца трещины (при  $\theta = 0$ ) напряжение  $\sigma_y$  (20.1) достигает предела текучести  $\sigma_T$  :

$$\sigma_y = \frac{\tau}{\sqrt{2\pi r_y}} = \sigma_T,$$

радиус пластической зоны

$$r_y = \frac{l^2}{2\pi\sigma_T^2}. \quad (24.1)$$

Плоская деформация (при объёмном напряжённом состоянии) снижает долю касательных напряжений, за счёт уменьшения размера пластической зоны и разрушение становится более хрупким. Полагают

$$r_y = \frac{l^2}{6\pi\sigma_T^2}.$$

Напряжения в пределах радиуса (24.1) релаксируют по сравнению с бесконечностью до нуля, что эквивалентно длине трещины (против фактической)  $l + r_y$ . Длина пластической зоны оказывается равной

$$d = 2r_y. \quad (24.2)$$

В формуле (24.2)  $d$  – диаметр пластической области в форме круга.

Для учёта пластической зоны в формулу (20.3) вводят вместо полудлины трещины  $\ell$  длину  $\ell + r_y$ . В этом состоит поправка на

пластическую деформацию при вычислении критического  $K_c$  по формуле для  $K$ . В плоской деформации поправку можно не вводить – в виду её малости.

## 24.2 Вязкость разрушения образца

На рисунке 24.1 показана критическая диаграмма 1 (рис. 22.2) в предположении чисто упругого разрушения ( $K_c =$ ) – при достаточно длинных трещинах. Однако длина  $\ell$  может оказаться в эксперименте настолько малой  $l_0$ , что разрушающее напряжение окажется близким к пределу текучести  $\sigma_T$  (см. точку А). Вязкость разрушения, определяется по точке А (на фиктивной кривой 2), очевидно, меньше истинной. Если увеличить длину трещины на  $r_y$ , точка А' почти совпадёт с линией 1, т. е. даст истинную вязкость разрушения – такую же, как при длинных трещинах.

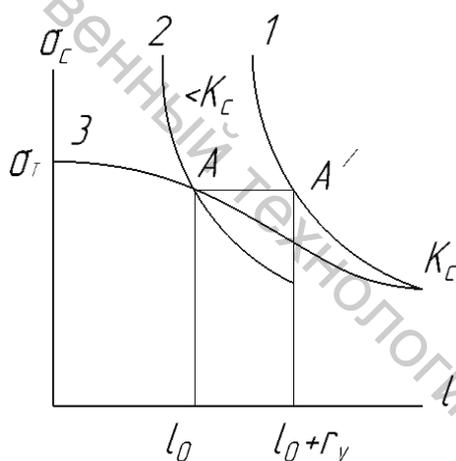


Рисунок 24.1 – Критические диаграммы: 1 – упругого материала; 2 – фиктивная диаграмма; 3 – реальная диаграмма при наличии пластических деформаций

## 24.3 Затупление трещины

На рисунке 24.2 показано пластическое раскрытие в вершине трещины по Ирвину. Величину затупления при плоском напряжённом состоянии вычислим по формуле (20.5) (при  $r = r_y, \theta = \pi$ ):

$$\delta = 2\nu = \frac{8K_I}{(1 + \mu)E} \sqrt{\frac{r_y}{2\pi}},$$

что дает при использовании радиуса (24.1)

$$\delta = \frac{4K_I^2}{\pi \cdot E \cdot \sigma_T},$$

откуда поток энергии в вершину трещины (22.9)

$$G = \frac{K_I^2}{E} = \sigma_T \cdot \delta. \quad (24.3)$$

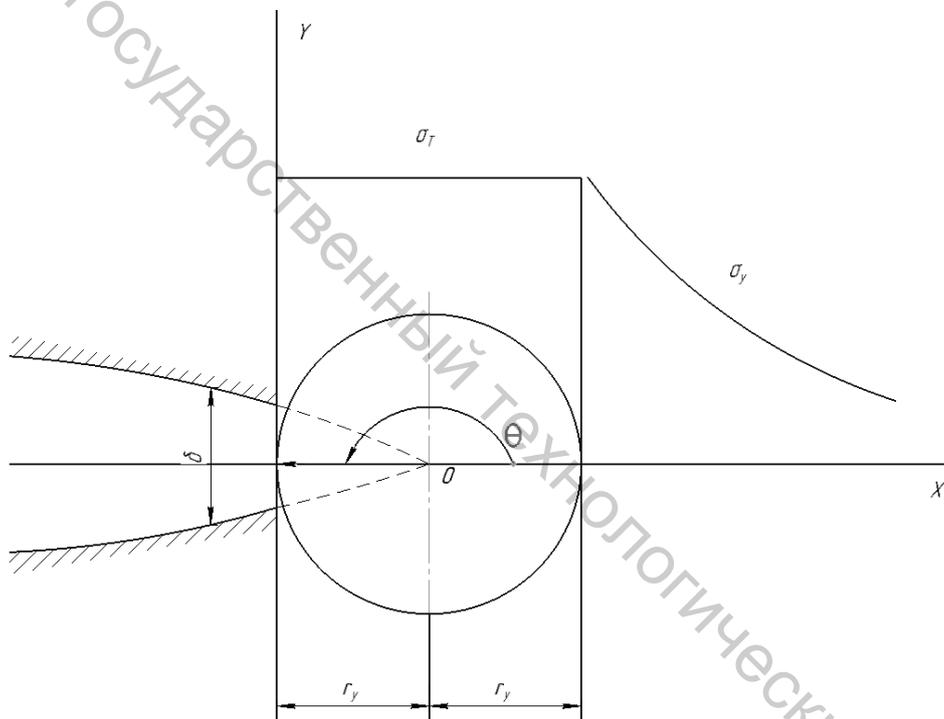


Рисунок 24.2 – Пластические раскрытия в вершине трещины

При наличии упрочнения материала следует ввести в формулу (24.3) коэффициент  $m=1 \div 3$ . Размеры пластичной области определяются, как вид, коэффициентом и сопротивлением материала пластической деформации.

#### 24.4 Эффект тоннелирования

С увеличением толщины образца напряженное состояние изменяется от плоского ( $\sigma_z = 0$ ) к объемному в плоской деформации

( $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$ ). Размеры пластической области у свободных поверхностей образца больше, чем в его середине, ибо поперечная деформация вдоль переднего края трещины стеснена (рис. 24.3). Пластическая зона принимает форму гантели. Фронт трещины изгибается, забегая вперед в середине толщины, принимая форму языка – «предпочитая» расти внутри образца.

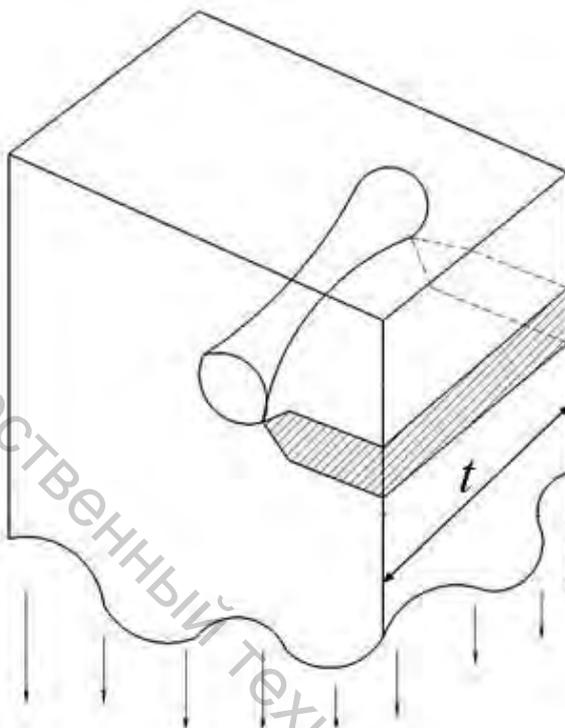


Рисунок 24.3 – Эффект тоннелирования;  $t$  – толщина пластины

#### 24.5 Зависимость $K_C$ от толщины $t$ плоского образца

С изменением толщины образца величина энергии, затрагиваемой на разрушение, изменяется (рис. 24.4), достигая максимума по мере уменьшения толщины – роста пластичной зоны. Вместе с этим растут величины  $G_C$  и  $K_C$  ( $G_{IC}$  и  $K_{IC}$  – асимптотические значения в плоской деформации). При значениях  $G_C$  и  $K_C$ , близких к  $G_{IC}$  и  $K_{IC}$ , получается прямой излом (отрывом) при минимальном сопротивлении разрушению. С уменьшением толщины пластическая зона растет (растут и затраты энергии на разрушение) – на изломе растут участки косоугольного излома (бокового среза). Начиная с некоторой толщины излом полностью косой, в дальнейшем уменьшении толщины сопротивление разрушению падает. При срезе  $d \approx t$  – см. формулы (24.1, 24.2) –

$$K_C \approx \sqrt{t}. \quad (24.4)$$

При полностью косом изломе утонение в вершине трещины равно нулю, пластическое раскрытие трещины равно толщине образца. Тогда – см. формулу (24.2) –

$$G_C = \sigma_T \cdot t,$$

и коэффициент

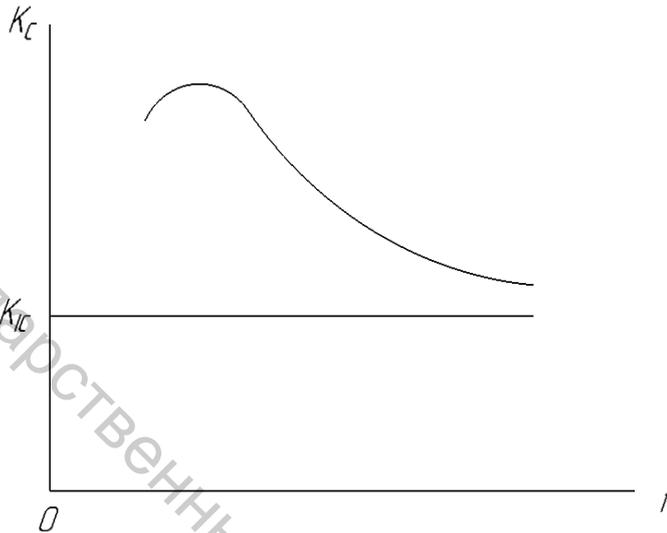


Рисунок 24.4 – Зависимость  $K_C$  от толщины плоского образца

$$K_C = \sqrt{E \cdot \sigma_T \cdot t},$$

т. е. разрушение боковым срезом сопровождается монотонным ростом  $K_C$  с увеличением толщины  $t$ .

В смешанном разрушении глубину губ среза на поверхности излома у кромки трещины можно принять равной  $r_y$ . Плотность энергии разрушения в продольном сдвиге  $G_{IIIc}$ . В средней части образца –  $G_{Ic}$ . Энергия продвижения трещины на единицу длины

$$G_C t = G_{IIIc} \cdot 2r_y + G_{Ic}(t - 2r_y),$$

откуда

$$K_C = \sqrt{K_{IIIc}^2 \frac{d}{t} + K_{Ic}^2 \left(1 - \frac{d}{t}\right)}. \quad (24.5)$$

На рисунке 24.5 представлена зависимость  $K_C$  от толщины образца. По степени развития пластической зоны у конца трещины различают две экспериментальные характеристики материала в

квазихрупком разрушении:  $K_c(G_c)$  в плоском напряженном состоянии и  $K_{Ic}(G_{Ic})$  в обычном напряженном состоянии плоской деформации.

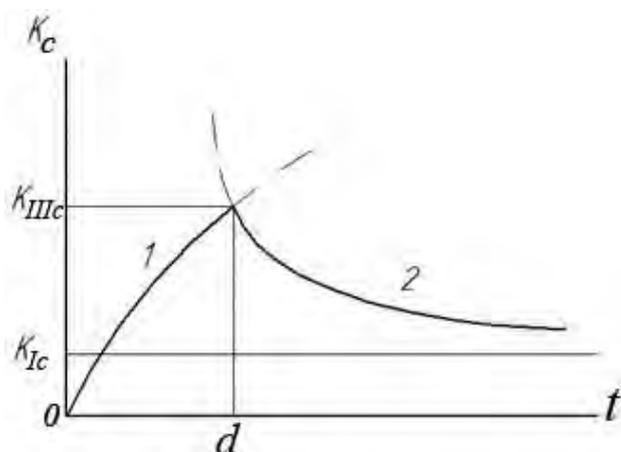


Рисунок 24.5 – Зависимость  $K_c$  от толщины образца: кривая 1 по формуле (24.4), кривая 2 по формуле (24.5)

## 24.6 Линейная механика разрушения

Линейная механика разрушения описывает хрупкое разрушение – в отсутствии заметных пластических деформаций у вершины трещины. В этом случае справедливы асимптотические формулы для напряжений и деформаций (20.21, 20.22, 20.25, 20.26), и задачу о распространении трещины можно сформулировать в терминах коэффициентов интенсивности напряжений.

С ростом нагрузки пластическая зона у вершины трещины растет, при относительно малых ее размерах можно воспользоваться поправкой Ирвина. Эта поправка приводит к лучшему соответствию результатов экспериментов с прогнозами, основанными на линейной механике.

При достаточно развитой пластической зоне (с размерами, на 20 % превосходящими длину трещины) коэффициент интенсивности напряжений теряет смысл, ибо исчезает область действия асимптотических формул. Необходимо обратиться к нелинейной механике разрушения.

Конечно, существует некоторая область, в которой могут использоваться обе механики разрушения. Границы этой области

$$0,8\sigma_T < \sigma^{\text{нетто}} < \sigma_T.$$

## Лекция 25

### Рост трещин при докритических нагрузках

#### 25.1 Докритический рост трещины

Экспериментальные исследования образцов при нагрузке, меньшей критической, показали, что быстрому росту трещины предшествует медленный устойчивый рост. При снятии нагрузки трещина перестаёт расти.

Для медленного роста трещины необходим баланс энергий – затрачиваемой на разрушение и подводимой упругой. Первая растёт с ростом пластических деформаций, поддержание баланса достигается увеличением площади трещины. Зависимость приложенного напряжения от длины трещины в докритическом состоянии является, по существу, докритической диаграммой разрушения в координатах  $p - \ell$ .

На основе экспериментальных данных можно заключить, что трещина не растёт ниже уровня напряжений  $p_0 = p_0(l): l = l_0$  при  $p = p_0(l)$  – см. рисунок 25.1. На рисунке 25.2 показаны докритические диаграммы разрушения при различных начальных длинах трещины.

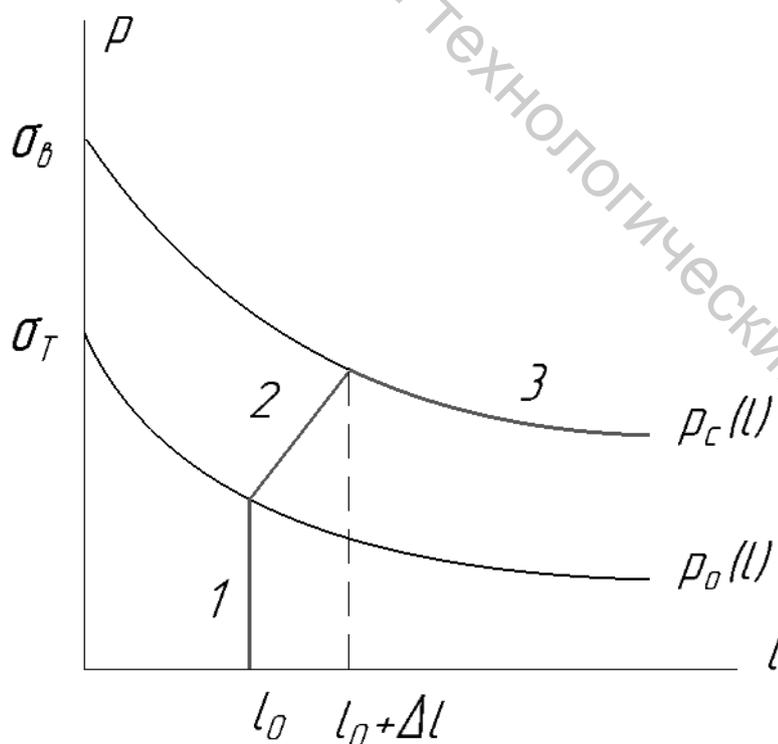


Рисунок 25.1 – Состояния тела с трещиной: 1 – трещина не растёт, 2 – трещина растёт медленно, 3 – трещина растёт быстро

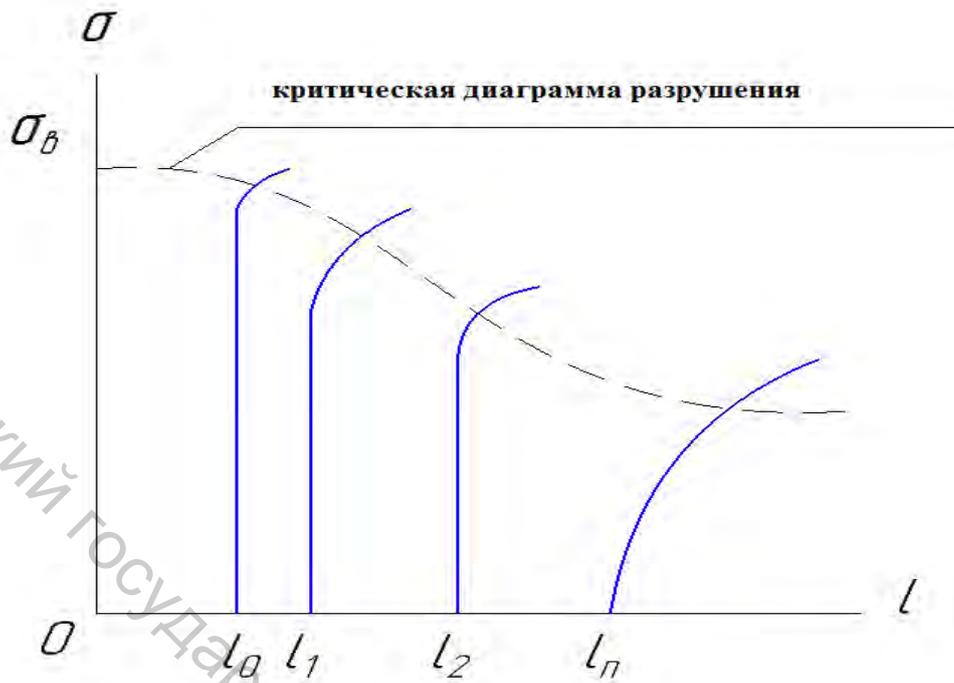


Рисунок 25.2 – Докритические диаграммы разрушения

## 25.2 Удельная работа разрушения

В докритическом росте трещины (по Ирвину) существует баланс между освобождающейся энергией  $G$  и поглощаемой  $R$ , т. е. в каждом из моментов времени  $G=R$ . Нарушение баланса в ту или иную сторону может вызывать неустойчивый рост трещины или же привести к ее остановке.

Удельная работа разрушения может быть выражена эмпирической формулой

$$R = G_{lc} + \left( \frac{l - l_o}{l_c - l_o} \right)^n (G_c - G_{lc}), \quad (25.1)$$

где показатель степени  $n$  и определяется экспериментально. Когда длина трещины достигает значения  $l_o$  в формуле (25.1),  $R = G_{lc}$ ; когда же  $l = l_c$ , трещина развивается быстро:  $R = G_c$ .

В критический момент, когда  $l = l_c$ , соблюдаются условия

$$G = G_c = R, \quad dG/dl = dR/dl. \quad (25.2)$$

### 25.3 R-кривая

R-кривая является характеристикой материала, ее форма определяет характер докритического роста трещины. На рисунке 25.3 показано, как по R-кривой получается докритическая диаграмма разрушения, или же по экспериментальной докритической диаграмме разрушения получается плотность энергии разрушения  $R(l-l_0)$ . В критическом состоянии второе из условий (25.2) «отрезает» диаграмму разрушения в точке  $(\sigma_c, l_c)$ . В этот момент  $G = G_c, R = G_c = 2\gamma_{эфф}$ .

Зависимость  $R = R(l)$  можно установить экспериментально, используя докритическую диаграмму. Испытания проводятся в режиме медленного подрастания трещины с замерами ее текущей длины и соответствующей нагрузки. Далее строится диаграмма  $\sigma - l$ , в дальнейшем она пересчитывается в R-кривую (с использованием зависимости (20.3))

$$R = G = \frac{K^2}{E} = \frac{\pi\sigma^2 l}{E}.$$

Можно, конечно, использовать серию образцов с различными начальными длинами трещин.

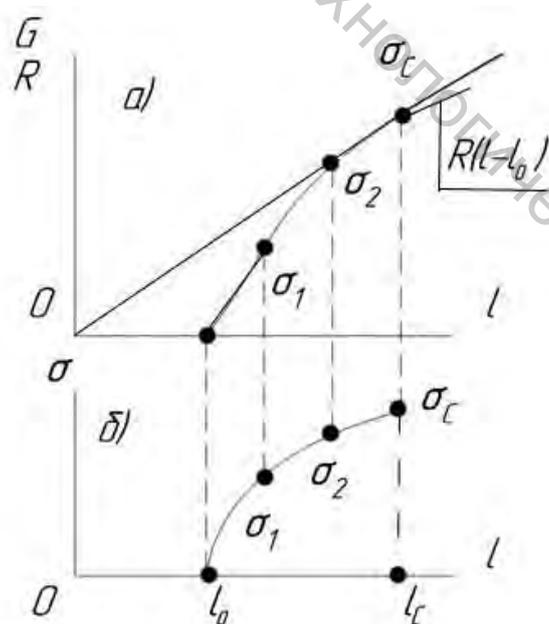


Рисунок 25.3 – R-кривая (а) и докритическая диаграмма разрушения (б)

## Лекция 26 Усталостные трещины

### 26.1 Понятие об усталости материалов

Термин «усталость» появился в 1854 г. в статье Брайтвайта. Выносливость – способность материалов сопротивляться усталости.

Совокупность напряжений от *min* до *max* в пределах одного периода их изменения называются циклом, соответствующее нагружение – циклическим. В 80-х годах XIX века начали строить усталостные кривые. Типичные кривые Вёлера показаны на рисунке 26.1,  $\sigma_R$  – предел выносливости,  $N$  – число циклов, перенесенных до разрушения,  $R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$  – коэффициент асимметрии цикла. Предел выносливости в 2–3 раза меньше предела прочности (а то и предела текучести). Кривые (рис. 26.1) позволяют определить уровень напряжений по требуемой долговечности элемента конструкции, или же его долговечности по заданному уровню нагрузки. Знакопеременная многократная нагрузка намного опаснее спокойной. Связано это с тем, что уже при сравнительно небольших напряжениях в отдельных зёрнах металлов появляются пластические сдвиги, провоцирующие микротрещину, подрастая, приводит к разрушению детали.

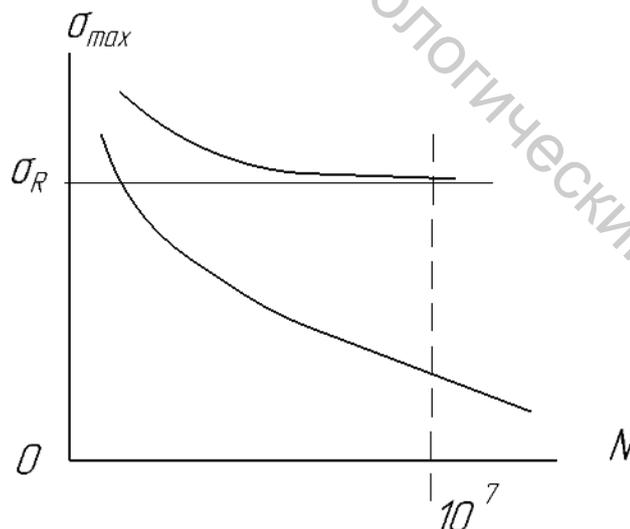


Рисунок 26.1 – Кривые усталости Вёлера

В процессе усталости выделяют две стадии: в первой трещина возникает (вследствие накопления повреждений), во второй – распространяется.

## 26.2 Усталость по Вёлеру

В усталостных испытаниях нагружение

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_a \sin \omega t.$$

Цель – определить число циклов до разрушения в функции напряжения. Одно из выражений в аналитическом описании кривых на рисунке 26.1 предложено Вейбуллом:

$$(\sigma - \sigma_R) / (\sigma_e - \sigma_R) = \exp[-\alpha (\ln N)^m],$$

где  $\sigma_e$  и  $\sigma_R$  – пределы прочности и выносливости,  $\alpha$  и  $m$  – постоянные, определяемые опытным путём. Так как статическая прочность значительно выше усталостной, сопротивление усталости изменяется с изменением коэффициента асимметрии  $R$  (рис. 26.2).

Известна и диаграмма предельных амплитуд (рис. 26.3). Недостаток построения кривых усталости как метода изучения – не учет влияния дефектов, существующих изначально или появляющихся в приложении переменной нагрузки, не учитывается развитие трещин, фатально приближающих разрушение.

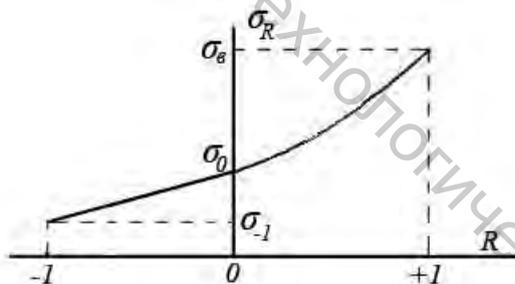


Рисунок 26.2 – Зависимость предела выносливости от коэффициента асимметрии  $R$

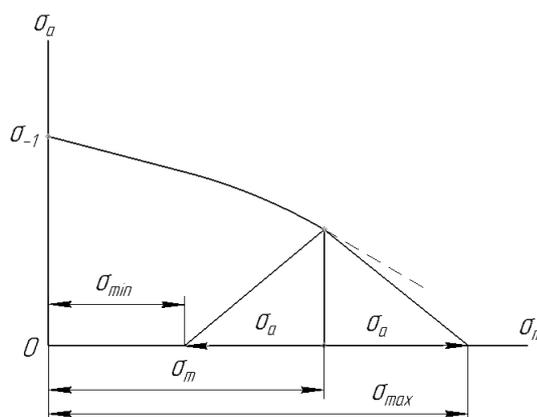


Рисунок 26.3 – Диаграмма предельных амплитуд

### 26.3 Скорость распространения усталостных трещин

Для описания скорости подрастающей на каждом цикле трещины можно использовать эмпирическую зависимость

$$\frac{dl}{dN} = C\sigma^m l^n,$$

где  $C, m, n$  – некоторые постоянные. После работ Париса появился закон Париса

$$\frac{dl}{dN} = C(\Delta K)^m. \quad (26.1)$$

В законе (26.1)  $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$  – размах коэффициента интенсивности напряжений,  $m = 2 \div 10$ . Для небольших скоростей распространения трещины  $\Delta K$  близко к пороговому значению  $K_{th}$ , при котором трещина «страгивается» с места. При высоких скоростях  $K_{\max}$  в момент разрушения порядка величины  $K_c$  – критического значения коэффициента интенсивности напряжений.

Можно полагать, что оценка скорости распространения трещины, дополняя в испытаниях кривые усталости, более реалистично характеризует опасность трещин в эксплуатации изделий.

Вовремя обнаружить усталостную трещину сложно. Поэтому при проектировании конструкции нужно исходить не из отсутствия трещин в эксплуатации, а, наоборот, следует полагать их возникновение. Способность материала работать даже с растущей трещиной называется живучестью.

### 26.4 Механизм распространения трещин

Рост трещины идет в направлении, перпендикулярном растягивающим напряжениям. По Лейрду и Смигу трещина растет с чередованием затупления и заострения ее вершины. В затуплении достигается *max* растягивающей нагрузки, вершина трещины принимает форму полукруга, пластическая деформация у вершины инициирует ее распространение в направлении максимальных сдвигающих напряжений. В заострении достигается *max* сжимающей нагрузки, форма трещины теряет устойчивость, образуются новые поверхности

трещины. Предпосылка этим процессам – большие пластические деформации у вершины трещины (рис. 26.4).

В упругих деформациях (в случае высокопрочных материалов) трещина распространяется отрывом.

Трещина распространяется, пока не достигнет длины, достаточной для завершающей стадии нестабильного разрушения. Критерии начала ее различны для хрупкого и пластического состояний.

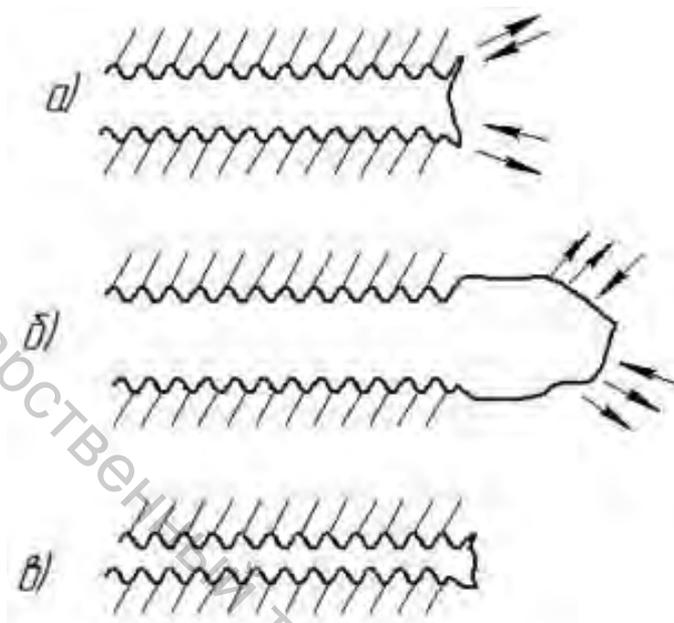


Рисунок 26.4 – Пластическое наступление: а) прилагается растягивающая нагрузка; б) максимальная нагрузка; в) максимальная сжимающая нагрузка

В первом случае используются критерии линейной и нелинейной механики разрушения (с учетом изменения свойств материала при переменных нагрузках), во втором случае за основу берется предельное состояние теории пластичности.

## 26.5 Эмпирические зависимости для скорости роста усталостных трещин

Скорость роста длины трещины можно изобразить общим аналитическим выражением

$$\frac{dl}{dN} = f(\sigma_a, l), \quad (26.2)$$

где  $l$  – полудлина трещины,  $\sigma_a$  – амплитуда изменяющегося напряжения. На практике зависимость (26.2) берут в виде произведения

$$\frac{dl}{dN} = f_1(\sigma_a) \cdot t_2(l).$$

Хед предложил соотношение

$$\frac{dl}{dN} = l^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{d}} \cdot f(\sigma_a), \quad (26.3)$$

полученное на модели – бесконечной плоскости, состоящей из упругих и пластических элементов и связей, отражающих взаимодействие двух первых;  $d$  – параметр, характеризующий размер пластической зоны в вершине трещины. Для определения значения  $\sigma_a$  соотношение (26.3) переписывается:

$$\frac{dl}{dN} = C_1 \cdot l^{\frac{3}{2}}, \quad C_1 = const \quad (26.4)$$

(принимается, что размер  $d$  не зависит от длины трещины). После интегрирования соотношения (26.4) Хед нашел, что  $\sqrt{l}$  изменяется обратно пропорционально  $N$ , что удовлетворительно подтверждается экспериментами.

Учитывая локальный характер разрушения в вершине трещины, Парис включил в формулы коэффициент интенсивности напряжений как меры всякого явления в вершине трещины. Парис объединил теорию роста трещин в усталости с механикой разрушения. При этом он допустил, что нагружение по синусоиде приводит к синусоидальному изменению поля напряжений у вершины трещины. Отсюда вывод, что скорость  $dl/dN$  должна зависеть от размаха  $\Delta K = K_{max} - K_{min}$ . Было написано в общем виде

$$\frac{dl}{dN} = f(\Delta K). \quad (26.5)$$

Анализируя усталость алюминиевых сплавов, Парис выбрал функцию (26.5):

$$\frac{dl}{dN} = C(\Delta K)^4,$$

где  $C$  – некоторая константа материала. В результате обобщения было получено

$$\frac{dl}{dN} = C(\Delta K)^m, \quad (26.6)$$

показатель степени уточняется по результатам экспериментов. Единственное неудобство формулы (26.6) – зависимость размерности коэффициента  $C$  от эмпирической величины  $m$ . Была предложена другая формула, лишенная этого неудобства,

$$\frac{dl}{dN} = 10^{-7} \left( \frac{\Delta K}{\Delta K_0} \right)^m \frac{\text{м}}{\text{цикл}}, \quad (26.7)$$

где  $\Delta K_0$  есть  $\Delta K$  при  $dl/dN = 10^{-7} \frac{\text{м}}{\text{цикл}}$ .

Заметим: во всех формулах под величиной  $K_C$  следует понимать величину  $K_{fc}$ . Ввиду порчи материала в циклических нагружениях циклическая вязкость разрушения

$$0,8K_C \leq K_{fc} \leq K_C.$$

Общая тенденция: в более хрупком состоянии величина  $m$  выше.

## 26.6 Диаграмма усталостного разрушения тела с трещиной

Кинетические диаграммы усталостного разрушения строят на основе испытаний в условиях подобия циклов одной и той же формы. Диаграмма усталостного разрушения представляет собой S-образную кривую (рис. 26.5) с вертикальными асимптотами, параллельными оси  $dl/dN$ . По оси абсцисс откладывается размах  $\Delta K$  (или наибольшее значение  $K_{max}$ ).

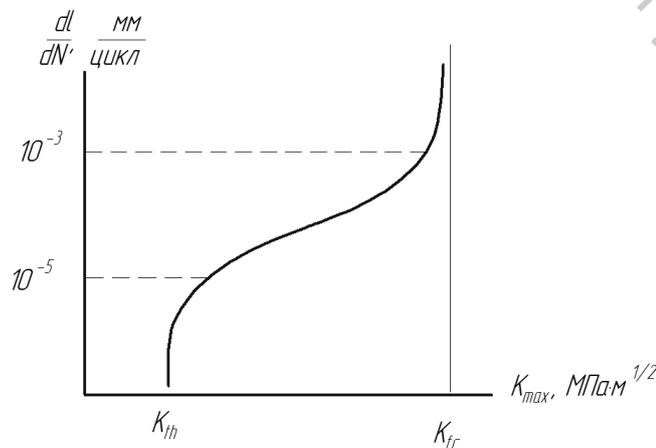


Рисунок 26.5 – Полная диаграмма усталостного разрушения (координаты точек кривой изображаются своими логарифмами)

Трещина не растет, если  $K_{max} < K_{th}$ . На первом снизу участке кривой скорости роста трещины сравнительно низки, на прямолинейном участке (в области Париса) скорости средние ( $10^{-5}$  мм/цикл  $\leq dl/dN \leq 10^{-3}$ ), третий участок отличают высокие скорости роста трещины и в приближении к  $K_{fc}$  неустойчивый ее рост.

Полная диаграмма (рис. 26.5) может быть описана аналитически:

$$\frac{dl}{dN} = C_0 \left( \frac{K_{max} - K_{th}}{K_{fc} - K_{max}} \right)^q. \quad (26.8)$$

В формуле (20.8)  $C_0$  и  $q$  – постоянные, определяемые экспериментально.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Биргер, И. А. Сопротивление материалов: учебник для студентов машиностроительных и авиационных вузов / И. А. Биргер, Р. Р. Мавлютов. – Москва: Наука, 1986. – 560 с.
2. Работнов, Ю. Н. Сопротивление материалов: учебник для университетов / Ю. Н. Работнов. – Москва: Физматгиз, 1962. – 455 с.
3. Безухов, Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести: учебник для студентов высших технических учебных заведений / Н. И. Безухов. – Москва: Высшая школа, 1968. – 512 с.
4. Кац, А. М. Теория упругости: учебник для высших технических учебных заведений / А. М. Кац. – Москва: Гостеориздат, 1956. – 207 с.
5. Малинин, Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести: учебник для студентов машиностроительных специальностей высших учебных заведений / Н. Н. Малинин. – Москва: Машиностроение, 1968. – 400 с.
6. Пестриков, В. М. Механика разрушения твердых тел: Курс лекций / В. М. Пестриков, Е. М. Морозов. / СПб.: Профессия, 2002. – 320 с.

Учебное издание

Сакевич Валерий Николаевич  
Федосеев Гелий Николаевич

# МЕХАНИКА ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ

Курс лекций

Редактор *Т. А. Осипова*  
Корректор *Т. А. Осипова*  
Компьютерная верстка *В. Н. Сакевич*

---

Подписано к печати 16.07.2020. Формат 60x90<sup>1/16</sup>. Усл. печ. листов 10,8.  
Уч.-изд. листов 13,6. Тираж 40 экз. Заказ № 194.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»  
210038, г. Витебск, Московский пр., 72.

Отпечатано на ризографе учреждения образования

«Витебский государственный технологический университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий № 3/1497 от 30 мая 2017 г.