УДК 517. 929

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Трубникова Н.Е., Мисурагина А.Я.

Обозначим через N и Ф, соответственно, множество натуральных чисел и чисел, являющихся корнями уравнения $\lambda^p = 1$ ($\Phi = \{\lambda \in C: \lambda^p = 1\}$) для некоторого фиксированного $p \in N$. В банаховом пространстве B_p периодических последовательностей $y = \{y_k\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $y_{k+p} = y_k$ с нормой $||y|| = \max |y_k|$ ($1 \le k \le p$) рассмотрим вопрос о существовании и построении решения линейного разностного уравнения порядка m

$$Ly = a_m y_{k+m} + a_{m-1} y_{k+m-1} + \ldots + a_0 y_k = f_k \quad (1)$$

с постоянными комплексными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_m$ и периодической последовательностью $f = \{f_k\} \in B_p$. Кроме того, будем считать, что $a_m > 0$, а $m < p$.

Совокупность всех корней характеристического уравнения

$$a_m \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + a_0 = 0 \quad (2)$$

будем называть спектром уравнения (1) и обозначать через spec L. Будем различать случаи наличия у уравнения (2) простых и кратных корней.

Теорема 1 (Случай простых корней). Если выполняется условие

$$\text{spec } L \cap \Phi = \varnothing,$$

то уравнение (1) при любой последовательности $f \in B_p$ имеет в B_p единственное решение $\varphi = \{\varphi_k\}$, и это решение представимо в виде

$$\varphi_k = \left(\frac{1}{a_m}\right) \sum_{l=1}^{p} \left\{ \sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j^{l+m-2}}{(1-\lambda_j^p) q_m(\lambda_j)} \right\} f_{k-l-m+1}, \quad (3)$$

где $q_m(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\left[(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_m)\right]$.

Доказательство. Равенством $Hy_k = y_{k+1}$ определим в пространстве B_p оператор сдвига последовательности и заметим, что если $\lambda \notin \Phi$, то оно является регулярным значением H, резольвента которого $R(\lambda, H) = (H - \lambda)^{-1}$ имеет вид

$$R(\lambda, H) y_k = \sum_{l=1}^{p} \frac{\lambda^{l-1}}{1-\lambda^p} y_{k-l}\,. \quad (4)$$

В самом деле,

$$(H-\lambda)\sum_{l=1}^{p} \frac{\lambda l^{l-1}}{1-\lambda^p} y_{k-l} = \sum_{l=1}^{p} \frac{\lambda^{l-1}}{1-\lambda^p} y_{k-l+1} - \sum_{l=1}^{p} \frac{\lambda^{l}}{1-\lambda^p} y_{k-l} =$$

$$= \sum_{l=0}^{p-1} \frac{\lambda^{l}}{1-\lambda^p} y_{k-l} - \sum_{l=1}^{p} \frac{\lambda^{l}}{1-\lambda^p} y_{k-l} = \frac{1}{1-\lambda^p} y_k - \frac{\lambda^p}{1-\lambda^p} y_{k-p} = y_k.$$

Далее

$$a_m(H-\lambda_m)\varphi_k = \sum_{l=1}^{p}\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j^{l+m-2}}{(1-\lambda_j^p)q_m(\lambda_j)}\right\} f_{k+1-l-(m-1)} -$$

$$-\lambda_m \sum_{l=1}^{p}\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j^{l+m-2}}{(1-\lambda_j^p)q_m(\lambda_j)}\right\} f_{k-l-(m-1)} = \sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j^{m-1}}{(1-\lambda_j^p)q_m(\lambda_j)} f_{k-(m-1)} -$$

$$-\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_m\lambda_j^{p+m-2}}{(1-\lambda_j^p)q_m(\lambda_j)} f_{k-p-(m-1)} + \sum_{l=2}^{p}\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j^{l+m-2}}{(1-\lambda_j^p)q_m(\lambda_j)}\right\} f_{k+1-l-(m-1)} - \qquad (5)$$

$$-\sum_{l=1}^{p-1}\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_m\lambda_j^{l+m-2}}{(1-\lambda_j^p)q_m(\lambda_j)}\right\} f_{k-l-(m-1)}.$$

Заметим теперь, что выражение

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j^{m-2}}{q_m(\lambda_j)}$$

является разделенной разностью функции $g(\lambda) = \lambda^{m-2}$ порядка $m-1$, т.е. равно нулю. С учетом этого и, сделав в (5) замену индекса суммирования: $\ell - 1 = n$, мы можем выражение $a_m(H-\lambda_m)\varphi_k$ преобразовать следующим образом:

$$a_m(H-\lambda_m) = \sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j^{m-2}(\lambda - \lambda_m\lambda^p)}{(1-\lambda_j^p)q_m(\lambda_j)} f_{k-(m-1)} +$$

$$+\sum_{n=1}^{p-1}\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j^{n+m-1}}{(1-\lambda_j^p)q_m(\lambda_j)}\right\} f_{k-n-(m-1)} -$$

$$-\sum_{l=1}^{p-1}\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_m\lambda_j^{l+m-2}}{(1-\lambda_j^p)q_m(\lambda_j)}\right\} f_{k-l-(m-1)} = \sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j^{m-2}(\lambda_j - \lambda_m + \lambda_m - \lambda_m\lambda_j^p)}{(1-\lambda_j^p)q_m(\lambda_j)} f_{k-(m-1)} +$$

$$+\sum_{l=1}^{p-1}\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j^{l+m-1}}{(1-\lambda_j^p)q_m(\lambda_j)}\right\} f_{k-l-(m-1)} - \sum_{l=1}^{p-1}\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_m\lambda_j^{l+m-2}}{(1-\lambda_j^p)q_m(\lambda_j)}\right\} f_{k-l-(m-1)} =$$

$$=\left\{\sum_{j=1}^{m-1}\frac{\lambda_j^{m-2}}{(1-\lambda_j^p)q_{m-1}(\lambda_j)} + \sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_m\lambda_j^{m-2}}{q_m(\lambda_j)}\right\} f_{k-(m-1)} +$$

$$+\sum_{l=1}^{p-1}\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j^{l+m-2}(\lambda_j-\lambda_m)}{(1-\lambda_j^p)q_m(\lambda_j)}\right\} f_{k-l-(m-1)} = \sum_{j=1}^{m-1}\frac{\lambda_j^{m-2}}{(1-\lambda_j^p)q_{m-1}(\lambda_j)} f_{k-(m-1)} +$$

$$+\sum_{l=1}^{p-1}\left\{\sum_{j=1}^{m-1}\frac{\lambda_j^{l+m-2}}{(1-\lambda_j^p)q_{m-1}(\lambda_j)}\right\} f_{k-l-(m-1)} = \sum_{l=0}^{p-1}\left\{\sum_{j=1}^{m-1}\frac{\lambda_j^{l+1+m-3}}{(1-\lambda_j^p)q_{m-1}(\lambda_j)}\right\} f_{k-l-1-(m-2)} =$$

$$=\sum_{l=1}^{p-1}\left\{\sum_{j=1}^{m-1}\frac{\lambda_j^{l+m-3}}{(1-\lambda_j^p)q_{m-1}(\lambda_j)}\right\} f_{k-l-(m-2)}.$$

Итак,

$$a_m(H-\lambda_m)\varphi_k = \sum_{l=1}^{p}\left\{\sum_{j=1}^{m-1}\frac{\lambda_j^{l+m-3}}{(1-\lambda_j^p)q_{m-1}(\lambda_j)}\right\} f_{k-l-(m-2)},$$

что соответствует формуле (3), если в ней заменить m на m–1. Применяя к полученной формуле преобразование $H-\lambda_{m-1}$, к вновь полученной – преобразование $H-\lambda_{m-2}$ и т.д., мы на предпоследнем шаге получим

$$a_m(H-\lambda_2)(H-\lambda_3)\dots(H-\lambda_m)\varphi_k = \sum_{l=1}^{p}\frac{\lambda_1^{l-1}}{1-\lambda_1^p} f_{k-l},$$

а это в силу формулы (4) приводит к равенству

$$a_m(H-\lambda_1)(H-\lambda_{22})\dots(H-\lambda_m)\varphi_k = f_k,$$

означающему, что периодическая последовательность $\varphi = \{\varphi_k\}$ является решением уравнения (1). Единственность φ очевидным образом вытекает из обратимости операторов $H-\lambda_j, 1 \le j \le m.$

Отметим, что формула (3) допускает следующую запись

$$R(\lambda_1;H)R(\lambda_2;H)\dots R(\lambda_m;H) f_k = \left(\frac{1}{a_m}\right)\sum_{l=1}^{p}\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j^{l+m-2}}{(1-\lambda_j^p)q_m(\lambda_j)}\right\} f_{k-l-(m-1)}.$$

Предположим теперь, что множество spec L состоит из корней $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_s$ с кратностями $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_s$, соответственно, $\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_s = m.$ Обозначим через D_α символ производной (по λ) порядка α, а через $r_s(\lambda)$ функцию

$$r_s(\lambda) = \sum_{k=0}^{s}(\lambda-\lambda_k)^{\alpha_k}.$$

Теорема 2 (случай кратных корней). Пусть выполнено условие

spec L $\cap \Phi = \varnothing$,

тогда уравнение (1) при любом f $\in$ B$_p$ имеет в B$_p$ единственное решение $\varphi = \{\varphi_k\}$. Для этого решения справедлива следующая формула

$$\varphi_k = \frac{1}{a_m}\sum_{l=1}^{p}\sum_{j=0}^{s}\frac{1}{(\alpha_j-1)}D_{\alpha_j-1}\left[\frac{\lambda^{l+m-2}}{1-\lambda^p}(\lambda-\lambda_j)^{\alpha_j}\cdot\frac{1}{r_s(\lambda)}\right]\Bigg|_{\lambda=\lambda_j} f_{k-l-(m-1)}. \qquad (6)$$

Замечание. По аналогии с непрерывным случаем выражение

$$G_{m,s}(l) = \sum_{j=0}^{s}\frac{1}{(\alpha_j-1)!}D_{\alpha_j-1}\left[\frac{\lambda^{l+m-2}(\lambda-\lambda_j)^{\alpha_j}}{(1-\lambda^p)r_s(\lambda)}\right]\Bigg|_{\lambda=\lambda_j} \qquad (7)$$

естественно назвать функцией Грина дискретной периодической задачи для уравнения (1). Формулу (6) тогда можно переписать в следующем компактном виде

$$\varphi_k = \frac{1}{a_m}\sum_{l=1}^{p}G_{m,s}(l) f_{k-l-(m-1)}. \qquad (8)$$

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично.

Отметим, что правая часть формулы (6) порождает линейный ограниченный оператор, который обозначим через A и который действует в пространстве B_p. Тогда равенство (6) можно записать в виде

$$\varphi = Af, \varphi = \{\varphi_k\}, f = \{f_k\} \in B_p.$$

При этом, как нетрудно видеть,

$$\|A\| = \frac{1}{a_m}\sum_{l=1}^{p}\left|\sum_{j=0}^{s}\frac{1}{(\alpha_j-1)!}D_{\alpha_j-1}\left[\frac{\lambda^{l+m-2}(\lambda-\lambda_j)^{\alpha_j}}{(1-\lambda^p)r_s(\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_j}\right|.$$

В этом равенстве $\|A\|$ – норма оператора A, подчиненная норме пространства B_p. Переходя теперь к установлению условий знакопостоянства функции $G_{m,s}$, докажем сначала одно общее утверждение. Введём следующее обозначение

$$\Omega_{t,k}(\lambda) = \frac{\lambda^t}{(1-\lambda^p)^k}, t = 1,2,\ldots,p; k \in N.$$

Лемма 3. Функция $\Omega_{t,k}(\lambda)$ является решением дифференциально-разностного уравнения вида

$$D_{m-1}\Omega_{t,k}(\lambda) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j(m-1)\Omega_{t-m+1+jp,k+m-1}(\lambda), \tag{8}$$

в котором D_α – символ производной по λ порядка $\alpha; c_0(m-1), c_1(m-1), \ldots, c_{m-1}(m-1)$ – некоторый набор неотрицательных чисел.

Доказательство проводится индукцией по m.

Далее приведём достаточные условия положительности функции Грина.

Теорема 4. Функция $G_{m,s}(l) > 0$, если $1 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_{m-1}$ и m – четное число; или если $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_{m-1} < 1$.

Так как функция $G_{m,s}(l)$ является разделенной разностью [1, с. 15] для функции $\Omega_{l+m-2,1}$, построенной по точкам $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$, и, следовательно, в силу формулы (19) [1, с. 22]

$$G_{m,s}(l) = \frac{1}{(m-1)!}D_{m-1}\Omega_{l+m-2,1}(\lambda)\Big|_{\lambda=\xi}, \xi \quad [\lambda_0, \lambda_{m-1}]$$

то, полагая в лемме 3 $t = l + m - 2, k = 1$, с помощью формулы (8) получим

$$G_{m,s}(l) = \frac{1}{(m-1)!}\sum_{j=0}^{m-1} c_j(m-1)\Omega_{l-1+jp,m}(\xi) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j(m-1)\frac{\xi^{l-1+jp}}{(1-\xi^p)};$$

отсюда очевидным образом вытекает утверждение теоремы 4.

Литература

1. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. – М.: Наука, 1967.