О СУЩЕСТВОВАНИИ И ОТСУТСТВИИ ЦЕЛЫХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРОГО ПОЛУЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Н.Л. Слепченков
Научный руководитель – А.Л. Гладков
Витебский государственный университет им. П.М. Машерова

В работе рассматривается уравнение

$$\Delta u = k(x) f(u), \qquad x \in \mathbf{R}^n, \quad n \ge 3, \tag{1}$$

где $k(x)$ – неотрицательная непрерывная функция, $f(u)$ – положительная непрерывная функция с областью $\operatorname{dom} f = \mathbf{R}$ или $\operatorname{dom} f = \mathbf{R}_+$. Здесь $\mathbf{R}_+ = (0,+\infty)$. Под целым решением уравнения (1) понимается функция $u(x) \in C^2(\mathbf{R}^n)$, удовлетворяющая уравнению (1) в $\mathbf{R}^n$.

Уравнение вида (1) рассматривается во многих работах. Для него установлен ряд утверждений о существовании и отсутствии целых решений. В частности, доказана следующая теорема (см. [1]).

Теорема 1. *Пусть $k(x)$ локально непрерывна по Гёльдеру, $f(u)$ локально непрерывна по Липшицу и выполнятся следующие условия:*

$f(u)$ не убывает в некоторой правой полуокрестности нуля и

$$\lim_{u\to +0}\frac{f(u)}{u} = 0 \text{ при } \operatorname{dom} f = \mathbf{R}_+ \text{ или}$$

$$\lim_{u\to\infty} f(u) = \infty \text{ и } f(u) \text{ возрастает при } \operatorname{dom} f = \mathbf{R}.$$

Тогда если

$$\int_0^\infty s k^*(s)\,ds < \infty, \tag{2}$$

где $k^*(s) = \sup\limits_{|x|=s} k(x)$, то существует бесконечно много целых решений уравнения (1) в случае $\operatorname{dom} f = \mathbf{R}$ и бесконечно много целых положительных решений уравнения (1) в случае $\operatorname{dom} f = \mathbf{R}_+$.

Доказана теорема об отсутствии целых решений уравнения (1).

Теорема 2. *Пусть функция $f(u)$ удовлетворяет условиям:*

$$f(u) \text{ вогнута в области определения,} \tag{3}$$

$$\int_1^\infty \left(\int_1^v f(u)\,du\right)^{-1/2} dv < \infty, \tag{4}$$

а $\bar{k}(r)$ – неотрицательная непрерывная и невозрастающая для достаточно больших значений r функция, такая что

$$\bar{k}(|x|) \le k(x), \qquad \int_0^\infty s\bar{k}(s)\,ds = \infty.$$

Тогда не существует ни одного целого решения уравнения (1) в случае $\operatorname{dom} f = R$ и ни одного целого положительного решения уравнения (1) в случае $\operatorname{dom} f = R_+$.

В работе [2] установлено аналогичное утверждение, но при выполнении дополнительного условия на функцию $k(x)$

$$\limsup_{r\to\infty} \bar{k}(r) r^2 > 0.$$

Далее при помощи теоремы 2 показано, что условие (2) теоремы 1 в некотором смысле неулучшаемо.

Теорема 3. *Пусть функция* $f(u)$ *обладает свойствами* (3), (4), *а* $\varphi(r)$ *– произвольная положительная непрерывная функция, для которой выполнено условие* $\varphi(r)\to\infty$ *при* $r\to\infty$. *Тогда можно построить такую радиально–симметричную положительную функцию* $k(x)=k^*(|x|)$, *удовлетворяющую неравенству*

$$\int_0^\infty \frac{s\,k^*(s)}{\varphi(s)}ds<\infty,$$

что не будет существовать ни одного целого решения уравнения (1) в случае $\operatorname{dom} f = R$ *и ни одного целого положительного решения уравнения (1) в случае* $\operatorname{dom} f = R_+$

Аналогичное утверждение для обыкновенного дифференциального уравнения Эмдена – Фаулера установлено в [3].

В работе строится пример радиально–симметричной функции $k(x)$, демонстрирующий, что условие (2) теоремы (1) не является необходимым для существования целых решений этого уравнения.

Теорема 4. *Пусть функция* $f(u)$ *локально непрерывна по Липшицу. Тогда существует гладкая функция* $\bar{k}(r)$, *удовлетворяющая условию*

$$\int_0^\infty s\,\bar{k}(s)ds=\infty,$$

такая, что уравнение (1) *с функцией* $k(x)=\bar{k}(|r|)$ *имеет бесконечно много целых решений.*

Литература

1. Usami H. On strongly increasing entire soulution of even order semilinear elliptic eqations // Hirosima Math. J. 1987. V. 17. P. 175-217.

2. Usami H. Nonexistence results of entire solutions for superlinear elliptic inequalities // J. Math. Anal. Appl. 1992. V. 164. P. 59-82.

3. Изобов Н. А., Рабцевич В. А. О неулучшаемости условия И. Т. Кигурадзе – Г. Г. Квиникадзе существования неограниченных правильных решений уравнения Эмдена–Фаулера // Д. У. 1987. Т. 23. №12. С. 1872-1881.

ИНЪЕКТОРЫ ДЛЯ КЛАССОВ ФИТТИНГА

Е.Н. Залесская

Научный руководитель - Н.Т. Воробьев

Витебский государственный университет им. П.М.Машерова

Все рассматриваемые группы конечны.

Одним из основных вопросов в теории классов Фиттинга является задача характеризации инъекторов для классов Фиттинга. Напомним, что классом Фиттинга называется класс групп F, удовлетворяющий следующим условиям.

1. каждая нормальная подгруппа любой группы из F также принадлежит F;
2. из того, что нормальные подгруппы A и B группы G принадлежат F, всегда следует, что их произведение AB принадлежит F.

Напомним также, что если F – класс Фиттинга, то подгруппа V группы G является ее F-инъектором, если V∩N – максимальная из подгрупп группы G, принадлежащих F, для любой нормальной подгруппы N группы G.

В теории конечных разрешимых групп хорошо известен результат Фишера [1] о том, что нильпотентные инъекторы (N-инъекторы) группы G, это в точности, максимальные нильпотентные подгруппы группы G, содержащие радикал Фиттинга F(G).