# БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ ОДНОГО ЭТАПА $(P,Q)$-ДЕКОМПОЗИЦИИ ГРАФОВ

**Перез Чернов А.Х.**
**Научные руководители - Р.И. Тышкевич, С.В. Суздаль**
*Белорусский государственный университет*

Известно достаточно большое количество практических задач, решения которых являются, по-видимому, полиномиально недостижимыми. Эти NP-трудные задачи, в силу их важности для практики и многочисленных приложений, тем не менее, необходимо решать, и для хоть какого-то преодоления поставленных проблем используют различные эвристические модели и рекомендации. В таких ситуациях речь зачастую идет не о поиске оптимального решения, а лишь о нахождении некоторой стратегии, которая, в среднем приводит к результату за разумное количество времени.

В настоящее время в теории графов популярна модулярная декомпозиция [2]. Идея модулярной декомпозиции заключается в разложении графа на модули (подграфы, определенным образом связанные с внешним окружением). Тем самым ряд задач сводится к набору независимых друг с другом задач меньшей размерности. Разложение графа на иерархию модулей является общим типом декомпозиции. Однако, именно из-за общности этого метода, реализация оказалась достаточно сложна. Как отмечено, например, в [3], алгоритмы слишком сложны для восприятия и имеют, по-видимому, лишь теоретическое значение. Таким образом, в тех типах декомпозиции, где возможна более простая схема решения, целесообразно разрабатывать собственные алгоритмы.

С понятием модулярной декомпозиции тесно связана $(P,Q)$-декомпозиция, теория которой разрабатывается на кафедре уравнений математической физики Белгосуниверситета [1,4]. Одним из этапов этой декомпозиции является следующая задача. Произвольный граф $G$ разложить на связные компоненты его дополнения $\overline{G}$ с линейной временной сложностью. Теоретическая идея алгоритма, весьма далекая от практической реализации, приведена в [3]. На этой основе докладчиком разработан машинно-ориентированный алгоритм, реализованный на языке C++

Литература

1. Тышкевич Р.И., Суздаль С.В. Декомпозиция графов. Избранные труды Белорусского государственного университета, Т. 6, с. 482-504 (2001).
2. Brandstädt A., Le V.B., Spinrad J. Graph classes: a survey. SIAM monographs on discrete mathematics and applications. SIAM: Philadelphia 1999.
3. Dahlhaus E., Gustedt J., McConnell R. M. Efficient and practical modular decomposition. Technische Universitat Berlin, No 524/1996.
4. Giakoumakis V., Quaddoura R., Suzdal S., Tyshkevich R. Operator decomposition of graphs. Submitted to Discrete Math. And Theoretical Comp. Science. 24 P. (2002).

# АНАЛАГ ФОРМУЛЫ КАШЫ ДЛЯ ДУАЛЬНЫХ ФУНКЦЫЙ ТРОХ РЭЧАІСНЫХ ЗМЕННЫХ

**А.С. Гацура**
**Навуковы кіраўнік – У.А.Шылінец**
*Беларускі дзяржаўны педагагічны універсітэт*

Няхай $D$ – адназвязны абсяг трохмернай рэчаіснай эўклідавай прасторы $E^3(x,y,z)$.

Разгледзім дуальныя функцыі выгляду

$$f = f_1(x,y,z) + if_2(x,y,z) + \varepsilon(f_3(x,y,z) + if_4(x,y,z)),$$

$$p = x + iy + \varepsilon(z + i0).$$

Тут $f_1, f_2, f_3, f_4$ – рэчаісныя функцыі класа $C^1(D)$, $i^2 = -1$, $\varepsilon^2 = 0$.

Для любых пунктаў $t = (x,y,z)$ і $t' = (x',y',z')$ абсягу $D$ мяркуем $\Delta f = f(t') - f(t)$, $\Delta p = p(t') - p(t)$.

Азначэнне. Дуальная функцыя $f$ называецца $F$ - манагеннай [1] па дуальнай функцыі $p$ ў абсягу $D$, калі існуе такая дуальная функцыя

$$\psi = \psi_1(x,y,z) + i\psi_2(x,y,z) + \varepsilon(\psi_3(x,y,z) + i\psi_4(x,y,z))$$

$(\psi_i(x,y,z)(i = 1,2,3,4)$ -адназначная рэчаісная функцыя пункта $t = (x,y,z)$ абсягу $D$), што для любога фіксаванага пункта $t \in D$ і любога зменнага пункта $t' \in D$ маем

$$\Delta f = \psi(t)\Delta p + \alpha(t,t'),$$

дзе $\frac{\alpha(t,t')}{\rho} \to 0$ пры $\rho \to 0$, $\rho = |\overline{tt'}|$.

Легка паказаць, што калі функцыя $f$ - $F$ - манагенная (манагенная ў сэнсе У.С. Фёдарава) па функцыі $p$ у абсягу D, то існуюць частковыя вытворныя $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ і пры гэтым

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \psi\frac{\partial p}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \psi\frac{\partial p}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z} = \psi\frac{\partial p}{\partial z}. \qquad (1)$$

Абазначым функцыю $\psi$ праз $\frac{\partial f}{\partial p}$. Тады роўнасці (1) можна запісаць у выглядзе

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z}. \qquad (1')$$

Разгледзім наступную краявую задачу.

Задача. Няхай $\upsilon$ - трохмерны абмежаваны абсяг з граніцай $\sigma$ ($\sigma \subset D$, $\upsilon \subset D$). Мяркуем далей, што $p$ і функцыя $f, F$ – манагенная па $p$, вызначаныя па замкнутай 2-мернай паверхні $\sigma$, гомеаморфнай сферы канечнага дыяметра і дастаткова гладкай для магчымасці скарыстаць формулу Астраградскага.

Патрабуецца знайсці ў любым унутраным пункце абсягу $\upsilon$ значэнне функцыі $f, F$ – манагеннай па $p$, калі вядомы яе значэнні на паверхні $\sigma$.

Для адзначанай функцыі

$$f = f_1(x,y,z) + if_2(x,y,z) + \varepsilon(f_3(x,y,z) + if_4(x,y,z))$$

і адвольнага пункта $M(x_0, y_0, z_0)$, які не належыць паверхні $\sigma$, мяркуем [2]:

$$I_\sigma = \int_\sigma \left\{ \alpha_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\varepsilon\right) + \alpha_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}i + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \alpha_3\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\varepsilon + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right\} f d\sigma, \qquad (2)$$

дзе $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – кіроўныя косінусы вонкавай нармалі да паверхні $\sigma$ у яе бягучым пункце $P(x,y,z)$,

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2},\ \varphi = -\frac{1}{r},\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{x-x_0}{r^3},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{y-y_0}{r^3},\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{z-z_0}{r^3}.$$

Няхай $M$ – любы дадзены пункт абсягу $D$, $M \in \overline{\upsilon}$.

Тэарэма 1. Для ўсякай дуальнай функцыі $f, F$ – манагеннай па дуальнай функцыі $p$ у абсягу $D$, маем $I_\sigma = 0$, дзе $I_\sigma$ вызначаецца роўнасцю (2).

Доказ. Па формуле Астраградскага атрымаем

$$I_\sigma = \int_\upsilon \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\varepsilon\right)f\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}i + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)f\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\varepsilon + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)f\right)\right\} d\upsilon =$$

$$= \int_\upsilon \left\{ \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - i\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}\varepsilon\right)f + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\varepsilon\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}i + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)f + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}i + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial y} +\right.$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial z}\right\} d\upsilon = \int_\upsilon \left\{ \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)f + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\varepsilon\right)\frac{\partial f}{\partial x} + + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\varepsilon + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)f + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\varepsilon +\right.\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}i + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\varepsilon + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial z}\right\} d\upsilon.$$

Адсюль і з умоў (1') $F$ - манагеннасці функцыі $f$ па функцыі $p$ у абсягу $D$, паколькі $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$, атрымаем

$$I_\sigma = \int_\upsilon \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\varepsilon\right)\frac{\partial f}{\partial p} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}i + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial p}i + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\varepsilon + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p}\varepsilon\right\} d\upsilon = 0.$$

Тэарэма 2. Калі дуальная функцыя $f$ з'яўляецца $F$- манагеннай па дуальнай функцыі $p$ у абсягу $D$, то для любога пункта $M$, які ляжыць унутры $\upsilon$ маем

$$f(M) = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left\{ \alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \alpha_3\frac{\partial\varphi}{\partial z} + i\left(\alpha_2\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \varepsilon\left(\alpha_3\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right\} f d\sigma.$$

Доказ. Няхай $\sigma_1$ - сфера з цэнтрам у пункце $M(x_0, y_0, z_0)$ размешчаная унутры $\sigma$.

Калі $l$ – радыус сферы $\sigma_1$, то маем

$$I_{\sigma_1} = \int_{\sigma_1} \left\{ (\alpha_1 + i\alpha_2 + \varepsilon\alpha_3)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (\alpha_2 - i\alpha_1)\frac{\partial\varphi}{\partial y} + (\alpha_3 - \alpha_1\varepsilon)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\} f d\sigma_1 = \int_{\sigma_1} \left\{ (\alpha_1 + i\alpha_2 + \varepsilon\alpha_3)\frac{x - x_0}{l^3} +\right.$$

$$\left. + (\alpha_2 - i\alpha_1)\frac{y - y_0}{l^3} + (\alpha_3 - \alpha_1\varepsilon)\frac{z - z_0}{l^3}\right\} f d\sigma_1 = \int_{\sigma_1} \left\{ \frac{1}{l^2}(\alpha_1^2 + i\alpha_2\alpha_1 + \varepsilon\alpha_3\alpha_1 +\right.$$

$$\left. + \alpha_2^2 - i\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3^2 - \alpha_1\alpha_3\varepsilon)\right\} f d\sigma_1 = \int_{\sigma_1} \left\{ \frac{1}{l^2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)\right\} f d\sigma_1. \tag{3}$$

Вядома, што $\sum_{k=1}^{3}\alpha_k^2 = 0$, $d\sigma_1 = l^2 d\omega$ ($d\omega$ - элемент адзінкавай сферы).

З роўнасці (3) атрымаем

$$f(M) = \frac{1}{4\pi} I_{\sigma_1}. \tag{4}$$

З тэарэмы 1 вынікае, што $I_{\sigma_1} = I_\sigma$. Тады з роўнасці (4) маем

$$f(M) = \frac{1}{4\pi} I_\sigma = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left\{ \alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \alpha_3\frac{\partial\varphi}{\partial z} + i\left(\alpha_2\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \varepsilon\left(\alpha_3\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right\} f d\sigma.$$

Пры дапамозе тэарэмы 2 і рашаецца сфармуляваная краявая задача.

Літаратура.

1. Фёдоров В.С. Основные свойства обобщенных моногенных функций // Изв. высш. учеб. заведений. Математика. 1958 №6 С.257-265

2. Федоров В.С. Об одном обобщении интеграла типа Коши в многомерном пространстве // Изв.высш.учеб.заведений. Математика. 1957. №1.С.227-233

# КЛАССЫ ФИТТИНГА, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ПОЛУЛОКАЛЬНО

**Д.В. Ермаченко**
**Научный руководитель – Н.Т. Воробьёв**
*УО ВГУ им. П.М.Машерова*

Напомним, что классом Фиттинга называется класс групп $\mathcal{F}$, удовлетворяющий следующим требованиям

1) каждая нормальная подгруппа любой группы из $\mathcal{F}$ также принадлежит $\mathcal{F}$.

2) из того, что нормальные подгруппы M и N принадлежит $\mathcal{F}$, всегда следует, что их произведение MN принадлежит $\mathcal{F}$.[1]

Все рассматриваемые классы Фиттинга предполагаются состоящими из конечных групп.

Отображение f: P $\rightarrow$ {классы Фиттинга} называют функцией Хартли или H-функцией [2].

Пусть $\pi$ — носитель H-функции f, то есть $\pi$=Supp(f)={p∈P| f(p)≠∅}.Обозначим класс Фиттинга SLR(f)= $\cap_{p\in\pi}$ f(p)$E_{p'}$, где f – некоторая H-функция, а $E_{p'}$ - класс всех p'- групп.

Класс Фиттинга $\mathcal{F}$ называется полулокальным, если $\mathcal{F}$=SLR(f) для некоторой H-функции f.

Доказана теорема, которая является признаком класса Фиттинга, определяемого полулокально.

**Теорема 1.** Пусть $\pi$ — некоторое непустое множество простых чисел. Класс Фиттинга $\mathcal{F}$ является полулокальным классом Фиттинга тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}E_p = \mathcal{F}$.

H-функцию f класса $\mathcal{F}$ назовем внутренней, если f(p)⊆ $\mathcal{F}$ для всех простых p.

Пусть Ω - множество всех H-функций полулокального класса Фиттинга $\mathcal{F}$. Следуя Л.А. Шеметкову [3], определим на этом множестве отношение порядка следующим образом: если f, h принадлежит Ω, то f ≤ h, в том и только том случае, когда f(p)⊆h(p) для любого простого p.

**Определение**. Пусть Ω — множество всех H-функций, определяющих полулокально класс Фиттинга $\mathcal{F}$. H-функцию f назовем минимальной H-функцией класса $\mathcal{F}$, если f является минимальным элементом множества Ω.

Доказана следующая теорема в которой приведён пример минимальной H- функции полулокального класса Фиттинга.

**Теорема 2.** Пусть $\mathcal{F}$=SLR(φ) для некоторой H-функции φ и $\pi$=Supp(φ). Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\mathcal{F}$ обладает единственной минимальной H-функцией, которая к тому же является внутренней.

2) Если f – минимальная H-функция класса

$$\mathcal{F}, \text{то } f(p) = \begin{cases} \mathrm{Fit}\{G \in F;\ G \equiv H^{E_{p'}}\ (H \in F)\}, \textit{если } p \in p \\ \varnothing, \textit{если } p \in p' \end{cases}$$

Литература

1. Ведерников В.А. Элементы теории классов групп. Смоленск, 1988.-96 с.
2. Воробьев Н.Т. О предложении Хоукса для радикальных классов //Сибирск. матем. журн. 1996. - Т. 37, № 6. - с. 1296 - 1302.
3. ШеметковЛ.А. Формации алгебраических систем. М: Наука, 1989.- 272 с.