1. Литтл Р. Дж. А., Рубин Д. Б. Статистический анализ данных с пропусками / Пер. с англ. – М.: Финансы и статистика, 1990. – 336 с.: ил. – (Математико-статистические методы за рубежом).
2. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Исследование зависимостей: В 3 т. – М.: Финансы и статистика, 1985 – 487с.

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРА РЕГРЕССИИ В СЛУЧАЕ ПРОЦЕССА АВТОРЕГРЕССИИ С УСТОЙЧИВЫМИ ИННОВАЦИЯМИ

А.В. Лис
Научный руководитель – П.М. Лаппо
Белорусский государственный университет

Резюме

В настоящей работе используется предположение, что финансовые индексы подчиняются устойчивому распределению. Рассматривается модель процесса авторегрессии первого порядка с инновациями, являющимися симметричными устойчивыми случайными величинами. В этих предположениях получена оценка параметра регрессии.

Устойчивые случайные величины.

Приведем несколько фактов, касающихся устойчивых распределений, которые будут в дальнейшем использоваться. Более подробно эти и другие свойства описаны в [9].

1. Случайная величина X называется устойчиво распределенной, если существуют параметры $0<\alpha<2$, $\sigma>0$, $|\beta|\le 1$, $\mu\in R$, такие, что ее характеристическая функция имеет вид

$$E\exp(i\cdot t\cdot X)=\begin{cases}\exp\left\{-\sigma^{\alpha}\cdot|t|^{\alpha}\cdot\left(1-i\cdot\beta\cdot\mathrm{sgn}(t)\cdot tg\dfrac{\pi\cdot\alpha}{2}\right)+i\cdot\mu\cdot t\right\}, & \alpha\ne 1\\ \exp\left\{-\sigma\cdot|t|\cdot\left(1+i\cdot\beta\cdot\mathrm{sgn}(t)\cdot\dfrac{2}{\pi}\cdot\ln|t|\right)+i\cdot\mu\cdot t\right\}, & \alpha=1\end{cases}$$

Факт принадлежности X к семейству устойчивых распределений записывают в виде $X\sim S_{\alpha}(\sigma,\beta,\mu)$, где параметр α - индекс устойчивости (характеристическая экспонента), β - коэффициент скошенности, σ - параметр масштаба, μ - пасаметр положения.

2. Случайная величина X является $S\alpha S$ (симметричной α-устойчивой), тогда и только тогда, когда $X\sim S_{\alpha}(\sigma,0,0)$

3. Пусть X и Y являются $S\alpha S$, $\alpha>1$, и Γ является спектральной мерой случайного вектора (X,Y). Ковариационная форма X на Y определяется следующим образом:

$$[X,Y]_{\alpha}=\int_{S_2}s_1\cdot s_2^{<\alpha-1>}\cdot\Gamma(ds),$$

где $a^{<p>}=|a|^{p}\cdot\mathrm{sgn}(a)$, S_2 - единичная сфера в R^2.

Ковариационная форма линейна по первому аргументу. Линейность по второму аргументу имеет место при выполнении следующих условий:

Пусть X,Y_1,Y_2 являются $S\alpha S$, $\alpha>1$, и Y_1 и Y_2 являются независимыми. Тогда $[X,Y_1+Y_2]_{\alpha}=[X,Y_1]_{\alpha}+[X,Y_2]_{\alpha}$.

4. В пространстве симметричных α-устойчивых случайных величин ковариационная форма порождает норму

$\|X\|_{\alpha}=([X,X]_{\alpha})^{1/\alpha}$.

Если $X\sim S_{\alpha}(\sigma,0,0)$, $\alpha>1$, то $\sigma=\|X\|_{\alpha}$.

Авторегрессионная модель первого порядка.

Рассмотрим случай, когда процесс X_t является процессом авторегрессии первого порядка, т.е. $X_t = c \cdot X_{t-1} + \varepsilon_t$,

где $\varepsilon_t \sim S\alpha S$, $\alpha > 1$, с параметром масштаба σ, $|c| < 1$.

В этом случае искомый процесс легко переписать в виде $X_t = \sum_{k=0}^{\infty} c^k \cdot \varepsilon_{t-k}$,

где случайные величины ε_t являются независимыми.

Тогда, поскольку $\varepsilon_t \sim S_\alpha(\sigma,0,0)$, то случайные величины $c^k \cdot \varepsilon_{t-k} \sim S_\alpha(|c^k|\sigma,0,0)$ и также являются независимыми.

Следовательно X_t также является $S\alpha S$, параметр масштаба которой определяется соотношением

$$\| X_t \|_\alpha^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} |c^k|^\alpha \cdot \sigma^\alpha$$

$$= \frac{\sigma^\alpha}{1-|c|^\alpha}$$

Т. о. параметр масштаба случайной величины X_t не зависит от t, следовательно, процесс X_t является стационарным.

Рассмотрим ковариационную форму случайной величины X_t на X_{t-k}:

$$\left[X_t, X_{t-k}\right]_\alpha = \left[\sum_{l=0}^{\infty} c^l \cdot \varepsilon_{t-l}, \sum_{p=0}^{\infty} c^p \cdot \varepsilon_{t-k-p}\right]_\alpha$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} c^l \cdot \left[\varepsilon_{t-l}, \sum_{p=0}^{\infty} c^p \cdot \varepsilon_{t-k-p}\right]_\alpha$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} c^l \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \left(c^p\right)^{<\alpha-1>} \cdot \left[\varepsilon_{t-l}, \varepsilon_{t-k-p}\right]_\alpha$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} c^l \cdot \sum_{p=k}^{\infty} \left(c^{p-k}\right)^{<\alpha-1>} \cdot \left[\varepsilon_{t-l}, \varepsilon_{t-p}\right]_\alpha$$

$$= \sum_{l=k}^{\infty} c^l \cdot \left(c^{l-k}\right)^{<\alpha-1>} \cdot \sigma^\alpha$$

$$= \sigma^\alpha \cdot \sum_{l=0}^{\infty} c^{l+k} \cdot \left(c^l\right)^{<\alpha-1>}$$

Таким образом, получаем, что $\left[X_t, X_{t-k}\right]_\alpha = \frac{\sigma^\alpha \cdot c^k}{1-|c|^\alpha} = \| X_t \|_\alpha^\alpha \cdot c^k$

Используя Лемму 2.7.16 ([9]) и условие стационарности процесса X_t, имеем:

$$c = \frac{E\left(X_t \cdot X_{t-1}^{<p-1>}\right)}{E\left(|X_{t-1}|^p\right)}, \quad 1 < p < \alpha$$

Таким образом, одной из задач является задача определения характеристической экспоненты α. По поводу оценивания индекса устойчивости, см. например, [2,3,6,8,10]. Автором для оценивания индекса устойчивости применялся метод максимального правдоподобия. Основная трудность, возникающая при использовании этого метода, состоит в том, что аналитический вид функции плотности распределения устойчивого закона в общем случае неизвестен. Поэтому предлагается аппроксимировать плотность распределения путем приближенного вычисления интеграла $\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\cdot t\cdot x)\cdot E\exp(i\cdot t\cdot X)\cdot dt$ на ограниченном промежутке $[-A,A]$ по формуле трапеций. На практике, ввиду отсутствия достаточного количества экстремальных значений, значение параметра регрессии a изменяется в зависимости от значения p. Для расчетов использовались данные индекса NYSE Finance за период с 1966 по 1969 год. В этом случае зависимость $\bar{a}$ от p близка к линейной. Оценка параметра регрессии, полученная по указанным данным, такова

$$\bar{c} = 0.348 \pm 0.008$$

Литература

1. Chambers J. M., Mallows C. L., Stuck B. W. A method for simulating stable random variables. Journal of the American Statistical Association, Vol. 71, 1976.
2. Fama E. F., Roll R. Some properties of symmetric stable distributions. Journal of the American Statistical Association, Vol. 63, 1968.
3. Fama E. F., Roll R. Parameter estimates for symmetric stable distributions. Journal of the American Statistical Association, Vol. 66, 1971.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т 2. Мир, 1971.
5. Гамровски Б., Рачев С. Финансовые модели, использующие устойчивые законы. Обозрение прикладной и промышленной математики, том 2, выпуск 4. 1995.
6. Leitch R. A., Paulson A. S. Estimation of Stable law parameters: stock price behavior application. Journal of the American Statistical Association, Vol. 70, 1975.
7. Officer R. R. The distribution of stock returns. Journal of the American Statistical Association, Vol. 67, 1972.
8. Press S. J. Estimation in Univariate and Multivariate Stable Distributions. Journal of the American Statistical Association, Vol. 67, 1972.
9. Samorodnitsky G., Taqqu M. Stable non-Gaussian random processes. Models with infinite variance. Chapman&Hall CRC, 1994.
10. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т.1. Факты. Модели. Фазис, 1998.
11. Weron R. Levy-stable distributions revisited: tail index > 2 does not exclude the Levy-stable regime. International Journal of Modern Physics. Vol. 12, 2001.
12. Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. Наука, 1983.

ОБОБЩЕННЫЕ ПОЧТИ ЭРМИТОВЫ СТРУКТУРЫ НА ОДНОРОДНЫХ Ф-ПРОСТРАНСТВАХ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Д.В. Вылегжанин
Научный руководитель – В.В. Балащенко
Белорусский государственный университет

Пусть M — связное гладкое многообразие, $C^\infty(M)$ — кольцо гладких функций на M, $\mathfrak{X}(M)$ — алгебра Ли векторных полей на M со скобкой Ли $[\cdot,\cdot]$. Все многообразия, тензорные поля и тому подобные объекты будем предполагать гладкими класса C^∞.

Определение [1]. Обобщенной почти эрмитовой структурой (короче, *GAH-структурой*) *ранга* r на гладком многообразии M называется совокупность $\{g, J_1, \ldots, J_r, T\}$ тензорных полей на M, где $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ — псевдориманова метрика на M, $J_1, \ldots, J_r$ — линейно независимые в каждой точке многообразия тензоры типа (1,1), называемые структурными аффинорами, или структурными операторами, определенные в каждой точке многообразия с точностью до ненулевого числового множителя и являющиеся вместе со своими квадратами и тождественным аффинором образующими некоторого подмодуля, являющегося подалгеброй алгебры всех эндоморфизмов касательного пучка многообразия, T — тензор типа (2,1), называемый *композиционным тензором*.