Литература.

1. Latouche G., Taylor P. Advances in algorithmic methods for stochastic models // Notable Publications. Inc. New Jersey. 2000.
2. Dudin A.N., Klimenok V.I. et. al Software "SIRIUS+" for evaluation and optimization of queues with the BMAP input // Advances in Algorithmic Methods for Stochastic Models. New Jersey: Notable Publications. 2000. P.115-133.
3. Dudin A.N., Chakravarthy S.R. Multi-threshold control of the BMAP/SM/1/K queue with group services // представлено к опубликованию в JAMSA
4. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch markovian arrival process // Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1-46.
5. Chakravarthy S.R. A finite capacity GI/PH/1 queue with group services // Naval Research Logistics. 1992. V. 39. P. 345-357.
6. Chakravarthy S.R. Analysis of a finite capacity MAP/G/1 queue with group services // Queueing Systems. 1993. V. 13. P. 385-407.
7. Tijms H. On the optimality of a switch-over policy for controlling the queue size in a M/G/1 queue with variable service rate // Lecture Notes in Computer Sciences. 1976. V. 40. P. 736-742.
8. Dudin A.N. Optimal multi-threshold control for a BMAP/G/1 queue with N service modes // Queueing Systems. 1998. V. 30. P. 273-287.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХФАЗНОЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ ПОСРЕДСТВОМ ДВУМЕРНЫХ КВАЗИТЕПЛИЦЕВЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

О.А. Бриль
Научный руководитель – В.И. Клименок
Белорусский государственный университет

Двухфазные системы массового обслуживания, в которых запрос нуждается в последовательном обслуживании двумя приборами, являются адекватной моделью многих реальных процессов. Кроме того, они представляют собой один из простейших классов сетей массового обслуживания [1]. Состояние вопроса исследования таких систем массового обслуживания изложена в справочнике [4]. В [3] предложен аппарат многомерных квазитеплицевых цепей Маркова, как средство для эффективного исследования многих систем массового обслуживания (СМО), описываемых несколькими дискретными процессами, один из которых является счетным, а другие имеют конечное пространство состояний. В данной работе этот аппарат применен для исследования двухфазной СМО типа $M \mid G \mid 1 \mid \infty \to M \mid n \mid 0$.

Первую фазу такой системы образует однолинейная СМО с ожиданием, на вход которой поступает стационарный пуассоновский поток интенсивностью λ, а время обслуживания запроса имеет функцию распределения $B(t)$. После обслуживания на первой фазе запрос поступает на обслуживание в n – линейную СМО. Время обслуживания запроса любым прибором этой СМО имеет показательное распределение с параметром μ.

Предполагается, что в случае занятости всех приборов на второй фазе в момент окончания обслуживания запроса на первой фазе с вероятностью θ, $0 \le \theta \le 1$ запрос уходит из системы недообслуженным (теряется), а с дополнительной вероятностью первый прибор блокируется и не обслуживает следующий запрос, пока не освободится прибор на второй фазе. Как крайние случаи при $\theta = 0$ мы имеем систему с блокировкой прибора, при $\theta = 1$ – систему с потерями.

Будем рассматривать двумерный процесс $\{i_{t_k}, \upsilon_{t_k}\}$, $k \ge 1$, где t_k есть k – й момент окончания обслуживания запроса на первой фазе, $i_{t_k}, i_{t_k} \ge 0$ – число запросов на первой фазе, $\upsilon_{t_k}, \upsilon_{t_k} = \overline{0,n}$ – число запросов на второй фазе в момент времени $t_k + 0$. Несложно видеть, что этот процесс является двумерной цепью Маркова с дискретным временем.

Обозначим одношаговые вероятности переходов этой цепи $P\{i_{k+1} = l, \upsilon_{i_{k+1}} = \upsilon' \mid i_k = i, \upsilon_{i_k} = \upsilon\} = P\{(i,\upsilon) \to (l,\upsilon')\}$.

Введем производящие функции $R_{\upsilon,\upsilon'}(z) = \sum_{l=i-1}^{\infty} P\{(i,\upsilon) \to (l,\upsilon')\} z^{l-i+1}$, $\upsilon,\upsilon' = \overline{0,n}$.

Вероятности переходов $P\{(i,\upsilon) \to (l,\upsilon')\}$ зависят от значений $l-i$, но не зависят от i и l отдельно. Это делает введенное определение производящей функции $R_{\upsilon,\upsilon'}(z)$ корректным.

Анализируя переходы двумерной цепи Маркова, можно убедиться, что производящие функции $R_{\upsilon,\upsilon'}(z)$ определяются следующим образом.

$$R_{\upsilon,\upsilon'}(z) = \begin{cases} \Gamma(z,n,n)\left(\theta + (1-\theta)\dfrac{n\mu}{n\mu + \lambda(1-z)}\right), \upsilon = n, \upsilon' = n, \\ \Gamma(z,\upsilon,\upsilon'-1), \upsilon' \le \upsilon \le n, \upsilon' \ne n, \end{cases}$$

где $\Gamma(z,\upsilon,\upsilon') = \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1-z)t} C_{\upsilon}^{\upsilon'} e^{-\mu\upsilon' t}(1-e^{-\mu t})^{\upsilon-\upsilon'} dB(t)$, $0 \le \upsilon' \le \upsilon \le n$.

Составим из производящих функций $R_{\upsilon,\upsilon'}(z)$ матричную производящую функцию $R(z)$ и введем в рассмотрение матрицу Δ, состоящую из элементов

$$\Delta_{\upsilon,\upsilon'} = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} C_{\upsilon}^{\upsilon'} e^{-\mu\upsilon' t}(1-e^{-\mu t})^{\upsilon-\upsilon'} dt, \ 0 \le \upsilon' \le \upsilon \le n.$$

Матрица Δ характеризует вероятности переходов числа занятых каналов на второй фазе за время, когда прибор на первой фазе простаивает, ожидая прихода запросов.

Обозначим

$$\pi(i,\upsilon) = \lim_{k\to\infty} P\{i_k = i, \upsilon_{i_k} = \upsilon\}, i \ge 0, \upsilon = \overline{0,n}, \tag{1}$$

$$\vec{\pi}(i) = (\pi(i,0), \pi(i,1), \ldots, \pi(i,n)),$$

$$\vec{\Pi}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \vec{\pi}(i) z^i, |z| < 1.$$

Утверждение. Векторная производящая функция $\vec{\Pi}(z)$ удовлетворяет матричному функциональному уравнению

$$\vec{\Pi}(z)(R(z) - I) = \vec{\Pi}(0)(I - \Delta z)R(z). \tag{2}$$

Здесь I – тождественная матрица.

Доказательство утверждения состоит в выводе уравнений равновесия для векторов вероятностей $\vec{\pi}(i)$ и переходе к векторной производящей функции.

Условием существования пределов (1) является выполнение неравенства

$$\vec{x}(I - R(z))'|_{z=1} \vec{1} > 0,$$

где вектор $\vec{x}$ удовлетворяет системе линейных алгебраических уравнений

$$\vec{x}(I - R(1)) = \vec{0},$$

$$\vec{x}\vec{1} = 1.$$

Здесь $\vec{0}$ – вектор-строка, состоящая из нулей, а $\vec{1}$ – вектор-столбец, состоящий из единиц.

Алгоритмы решения уравнения (2) можно найти в [2].

Данный результат может быть обобщен на случаи, когда для обслуживания запроса на второй фазе требуется случайное число приборов второй фазы, когда входной поток в систему является более сложным, например, групповым марковским потоком, когда обслуживание на второй фазе является не показательным, а принадлежит к фазовому типу и т.д.

Литература.

1. Жожикашвили В.А., Вишневский В.М. Сети массового обслуживания Теория и применение к сетям ЭВМ. М : Радио и связь, 1988.
2. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Мн.: БГУ, 2000.
3. Dudin A.N., Klimenok V.I. Multi-dimensional quasitoeplitz Markov chains // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analys s 1999. V.12. N 4. P 393-415.
4. Gnedenko B.V., Koenig D. Handbuch der bedienungstheorie Berlin: Akademie – Verlag, 1983.

ОБ ОЦЕНИВАНИИ ПАРАМЕТРОВ МНОГОМЕРНОГО НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ «ПРОПУСКОВ»

Е.В. Ковалевский
Научный руководитель – Ю.С. Харин
Белорусский государственный университет

Введение и постановка задачи.

В практических приложениях при решении задач статистического анализа данных часто оказывается полезной модель многомерного нормального распределения Статья посвящена проблеме оценивания параметров данного распределения по выборке с пропусками

Пусть $\{X_t, t=1,\ldots,T\}$ - независимые одинаково распределенные нормальные случайные вектора, $L(X_t)=N_n(\mu,\Sigma)$ Параметры μ,Σ - неизвестны. В выборке $\{X_t\}$ имеются пропущенные значения, $X_t=\left(X_t^{obs},X_t^{mis}\right)$, где X_t^{obs} - наблюдаемые, а X_t^{mis} - пропущенные компоненты вектора X_t в момент времени t Из рассмотрения исключаются случаи, когда отсутствие некоторого значения зависит от пропущенных значений наблюдения, однако не исключается возможность зависимости этого факта от присутствующих значений наблюдения (или, в терминах [1], рассматривается случай, когда данные ОПС либо ОС). Задача заключается в оценивании вектора математического ожидания (МО) μ и ковариационной матрицы Σ.

Проблема обработки данных с пропусками и, в частности, данная модель рассматривалась в [1]. В [1] приводится так называемый ЕМ-алгоритм, позволяющий находить точки в пространстве параметров распределения, потенциально обладающие многими оптимальными свойствами, присущими МП-оценкам. Данный алгоритм является приближенным итеративным алгоритмом поиска локального максимума маргинальной функции правдоподобия, которая, вообще говоря, имеет сложный вид даже в случае многомерного нормального распределения и не поддается аналитической максимизации

Проблема заключается в выборе начального приближения. В [1] подготовлен достаточно полный обзор литературы по обработке данных с пропусками, однако нет ссылок на алгоритмы генерации начальных значений. Приводятся лишь четыре тривиальных варианта выбора начальных значений, два из которых по разным причинам не могут быть признаны удовлетворительными в общем случае. Аналогичные результаты приводятся, например, в [2]. Автором статьи разработан, реализован и исследован новый алгоритм генерации начальных значений для ЕМ-алгоритма.

Алгоритм генерации начальных значений

Применим ЕМ-алгоритм для различных начальных приближений и затем выберем ту оценку параметров, на которой значение маргинальной функции правдоподобия наибольшее Отметим, что тривиальное построение равномерной сетки узлов в пространстве возможных значений параметров неприемлемо ввиду большой размерности данного пространства. Затруднительным является также то, что на значения параметров накладывается требование положительной определенности ковариационной матрицы. Поэтому для поиска глобального максимума функции правдоподобия был разработан следующий алгоритм.