$$w' = (p_0(z) + p_1(z)w + p_2(z)w^2)u + q_0(z) + q_1(z)w + q_2(z)w^2,$$
$$u' = (r_0(z) + r_1(z)u + r_2(z)u^2)w + s_0(z) + s_1(z)u + s_2(z)u^2. \quad (6)$$

Рассматривая систему (6) и применяя условие (3) для $R(w', w, z) = 6w^2 + z$, можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Множество S_{PL} полиномиально-линейных систем для уравнения (P_1) полностью описывается следующими двумя системами:*

$$w' = (p_0 + p_1 w)u + q_0 + q_1 w, \; u' = \frac{6}{p_1} w + s_0 + s_1 u - p_1 u^2, \quad (7)$$

где коэффициенты $p_j(z), q_j(z), s_j(z), \; j = 0,1$ *удовлетворяют следующим условиям*

$$p_0' = -p_1 q_0 - p_0(q_1 + s_1), \; p_1' = -p_1(2q_1 + s_1), \; q_0' = z - q_0 q_1 - p_0 s_0, \; q_1' = -\frac{6p_2}{p_1} - q_1^2 - p_1 s_0;$$

$$w' = (p_0 + p_1 w + p_2 w^2)u + q_0 + q_1 w + q_2 w^2, \; u' = -\frac{2(q_2 + p_2 u)^2}{p_2} w + s_0 + s_1 u - p_1 u^2, \quad (8)$$

где коэффициенты $p_j(z), q_j(z), s_i(z), \; j = \overline{0,2}, \; i = 0,1$ *удовлетворяют следующим условиям*

$$p_0' = -p_1 q_0 - p_0(q_1 + s_1), \; p_1' = -2p_2 q_0 + 2p_0 q_2 - p_1(2q_1 + s_1), \; p_2' = p_1 q_2 - p_2(3q_1 + s_1),$$
$$q_0' = z - q_0 q_1 - p_0 s_0, \; q_1' = -q_1^2 - 2q_0 q_2 + \frac{2p_0 q_2^2}{p_2} - p_1 s_0, \; q_2' = 6 - 3q_1 q_2 + \frac{2p_1 q_2^2}{p_2} - p_2 s_0.$$

Рассматривая системы (7) и (8) и проверяя условия существования гамильтонианов для таких систем, получаем следующую теорему.

Теорема 4. *Среди гамильтоновых полиномиально-линейных систем не существует систем, эквивалентных уравнению (P_1).*

Рассмотрим некоторые частные случаи дробно-линейных систем, удовлетворяющих условиям теоремы 1, и найдем условия эквивалентности таких систем уравнению (P_1). Так, например, для системы

$$w' = \frac{r_1(z,w)r_3(z,w)u + r_2(z,w)r_4(z,w)}{r_3(z,w)u + r_4(z,w)}, \; u' = \frac{r_5(z,u)r_7(z,u)w + r_6(z,u)r_8(z,u)}{r_7(z,u)w + r_8(z,u)}, \quad (9)$$

где r_1, r_2, r_3, r_4 и r_5, r_6, r_7, r_8 – полиномы второй степени по w и u соответственно с аналитическими по z в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$ коэффициентами, справедлива

Теорема 5. *Уравнение (P_1) не имеет эквивалентных систем вида (9).*

Литература.

1. Громак В.И., Лукашевич Н.А. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Мн., – Мн.: Университетское, 1990. – 157 с.
2. Степанова Т.С. О нелинейных системах второго порядка без подвижных многозначных особых точек.// Вестник БГУ. Сер.1. – 1997, №2, с.48-52.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТИПА ХАНКЕЛЯ

Е.К. Щетникович

Научный руководитель – А.А. Килбас

Белорусский государственный университет

Рассмотрим интегральное преобразование

$$\left(S_{\delta,\alpha;\mu} f\right)(x) = x^{\alpha\mu/2} \int_0^\infty t^{-\alpha\mu/2+\mu-1} J_{2\delta-\alpha}\left(\frac{2}{\mu}(xt)^{\mu/2}\right) f(t)\,dt \quad (1)$$

$$\left(\delta \in \mathbf{C},\quad \alpha \in \mathbf{C},\quad Re(2\delta+\alpha)>-1;\quad \mu>0;\quad x>0\right), \tag{2}$$

содержащее функцию Бесселя первого рода $J_\eta(z)$ в ядре [1, Т.2, с.12].

Это преобразование обобщает некоторые хорошо известные интегральные преобразования. В частности, при $\mu = 2$ оно применяется для решения парных интегральных уравнений [2]. Если $\delta=(2\eta-1)/4,\quad \alpha=1/2,\quad \mu=2$, то преобразование (1) сводится к классическому преобразованию Ханкеля [3].

$$\left(\mathbf{З}_\eta f\right)(x)=\int_0^\infty (xt)^{1/2} J_\eta(xt) f(t)\,dt \qquad \left(\eta \in \mathbf{C},\ Re(\eta)>-1;\ x>0\right). \tag{3}$$

Будем исследовать преобразование $S_{\delta,\alpha;\mu}$ в пространстве $L_{\nu,2}$ таких комплекснозначных, измеримых по Лебегу функций f в $\mathbf{R}_+=(0,\infty)$, для которых

$$\|f\|_{\nu,2}=\left\{\int_0^\infty \left|t^\nu f(t)\right|^2 \frac{dt}{t}\right\}^{1/2}<\infty \qquad (\nu \in \mathbf{R}). \tag{4}$$

В частности, все полученные результаты верны в $L_2(\mathbf{R}_+)=L_{1/2,2}$.

В работе даются условия ограниченности и взаимной однозначности оператора $S_{\delta,\alpha;\mu}$ преобразования (1), описание его образа в пространстве $L_{\nu,2}$, различные интегральные представления этого преобразования, а также приводятся формулы его обращения.

Показывается, что преобразование типа Ханкеля $S_{\delta,\alpha;\mu}$ принадлежит к классу обобщенных **H**-преобразований [4], которые содержат *H*-функцию в ядре [1, Т.1, с.64]. Оператор преобразования (1) может быть представлен в виде композиции классического преобразования Ханкеля и элементарных операторов M_ζ, W_δ, N_a [4]:

$$\left(S_{\delta,\alpha;\mu} f\right)(x)=\left(\frac{\mu}{2}\right)^{1-\alpha}\left(M_{\mu(\alpha/2-1/4)} N_{\mu/2} \mathbf{H}_{2\delta-\alpha} M_{1/2-\alpha} W_{2/\mu} N_{2/\mu} f\right)(x) \tag{5}$$

Известно, что классическое преобразование Ханкеля принадлежит к классу **H**-преобразований [5], поэтому в силу (5) имеем представление для модифицированного преобразования Ханкеля (1) в виде обобщенного **H**-преобразования:

$$\left(S_{\delta,\alpha;\mu} f\right)(x)=\mu^{1/2} 2^{-2\delta-\alpha-1/2} \pi^{1/2} x^{\mu(\alpha/2-1/4)} \times$$
$$\times \int_0^\infty H_{1,2}^{1,0}\left[\frac{2}{\mu}(xt)^{\mu/2}\left|\begin{matrix}\left(\delta+\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)\\ \left(2\delta+\alpha+\frac{1}{2},1\right),\left(\frac{1}{4}-\delta-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2}\right)\end{matrix}\right.\right] t^{\mu(3/4-\alpha/2)-1} f(t)\,dt. \tag{6}$$

Используя результаты из [4] и представление (6), получим соответствующие утверждения для интегрального преобразования (1) при следующих обозначениях:

$$\theta=\frac{2}{\mu}\nu+Re(\alpha)-\frac{1}{2},\quad \kappa=\mu[1-Re(\alpha)]-\nu,\quad \kappa^*=\nu+\mu[1-Re(\alpha)]-1$$

Теорема 1. Пусть $f \in L_{\nu,2}$ и $-Re(2\delta+\alpha)-1/2<1-\theta\le 1/2$.

(a) Преобразование $S_{\delta,\alpha;\mu}$ является изоморфизмом $L_{\nu,2}$ на $L_{\kappa,2}$, и при $Re(s)=\kappa$ его преобразование Меллина имеет вид:

$$\left(\mathbf{M}S_{\delta,\alpha;\mu}f\right)(s)=2^{-2s/\mu-2\delta-2\alpha+1}\mu^{2s/\mu+\alpha-1}\pi^{1/2}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(2\delta+\alpha+1/2+s)}{\Gamma(\delta+\alpha/2+3/4+s/2)\Gamma(\delta+\alpha/2+3/4-s/2)}(\mathbf{M}f)(\mu-\alpha\mu-s). \tag{7}$$

(b) Для двух функций $f\in L_{\nu,2}$ и $f\in L_{\kappa^-,2}$ верно равенство:

$$\int_0^\infty f(x)\left(S_{\delta,\alpha;\mu}g\right)(x)\,dx=\int_0^\infty g(x)\left(S_{\delta+\alpha-3+1/\mu,2-\alpha-2/\mu;\mu}f\right)(x)\,dx \tag{8}$$

(c) Пусть $\gamma\in\mathbf{C}$, $h>0$ и $f\in L_{\nu,2}$. Если $Re(\gamma)>(1-\theta)h-1$, то почти для всех $x>0$ справедливо представление:

$$\left(S_{\delta,\alpha;\mu}f\right)(x)=h\left(\frac{2}{\mu}\right)^{1/2}2^{-2\delta-\alpha}\pi^{1/2}x^{\mu[\alpha-1/2-(\gamma+1)/h]/2+1}\times\frac{d}{dx}x^{\mu(\gamma+1)/(2h)}\times$$
$$\times\int_0^\infty H_{2,3}^{1,1}\left[\frac{2}{\mu}(xt)^{\mu/2}\middle|\begin{matrix}(-\gamma,h),\left(\delta+\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)\\ \left(2\delta+\alpha+\frac{1}{2},1\right),\left(\frac{1}{4}-\delta-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2}\right),(-\gamma-1,h)\end{matrix}\right]t^{\mu(3/4-\alpha/2)-1}f(t)dt \tag{9}$$

Если $Re(\gamma)<(1-\theta)h-1$, то

$$\left(S_{\delta,\alpha;\mu}f\right)(x)=-h\left(\frac{2}{\mu}\right)^{1/2}2^{-2\delta-\alpha}\pi^{1/2}x^{\mu[\alpha-1/2-(\gamma+1)/h]/2+1}\times\frac{d}{dx}x^{\mu(\gamma+1)/(2h)}\times$$
$$\times\int_0^\infty H_{2,3}^{2,0}\left[\frac{2}{\mu}(xt)^{\mu/2}\middle|\begin{matrix}\left(\delta+\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right),(-\gamma,h)\\ (-\gamma-1,h),\left(2\delta+\alpha+\frac{1}{2},1\right),\left(\frac{1}{4}-\delta-\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2}\right)\end{matrix}\right]t^{\mu(3/4-\alpha/2)-1}f(t)dt \tag{10}$$

(d) Если $\theta>3/2$, то для всех $f\in L_{\nu,2}$ $S_{\delta,\alpha,\mu}f$ задается равенством (6).

Из представления модифицированного преобразования Ханкеля (5) и формул обращения для $\mathbf{H}$-преобразования [4] вытекают следующие утверждения об обратимости оператора преобразования (1) в пространстве $L_{\nu,2}$

Теорема 2. Пусть $1<r<\infty$, $\gamma\in\mathbf{C}$ и $h>0$. Если $\theta=1/2$ и $f\in L_{\nu,2}$, то при $Re(\gamma)>h/2-1$ верно равенство:

$$f(x)=h\left(\frac{2}{\mu}\right)^{1/2-(\gamma+1)/h}2^{2\delta+\alpha}\pi^{-1/2}x^{\mu[\alpha-1/2-(\gamma+1)/h]/2+1}\times\frac{d}{dx}x^{\mu(\gamma+1)/(2h)}\times$$
$$\times\int_0^\infty H_{2,3}^{1,1}\left[\frac{2}{\mu}(xt)^{\mu/2}\middle|\begin{matrix}(-\gamma,h),\left(-\delta-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\\ \left(\delta+\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right),(-2\delta-\alpha,1),(-\gamma-1,h)\end{matrix}\right]t^{\mu(3-2\alpha)/4}\left(S_{\delta,\alpha;\mu}f\right)(t)dt. \tag{11}$$

Если $Re(\gamma)<h/2-1$, то

$$f(x) = -h\left(\frac{2}{\mu}\right)^{1/2-(\gamma+1)/h} 2^{2\delta+\alpha}\pi^{-1/2}x^{\mu[\alpha-1/2-(\gamma+1)/h]/2+1} \times \frac{d}{dx}x^{\mu(\gamma+1)/(2h)} \times$$

$$\times \int_0^\infty H_{2,3}^{2,1}\left[\frac{2}{\mu}(xt)^{\mu/2}\left|\begin{matrix} \left(-\delta-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right),(-\gamma,h) \\ (-\gamma-1,h),\left(\delta+\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right),(-2\delta-\alpha,1)\end{matrix}\right.\right] xt^{\mu(3-2\alpha)/4}\left(S_{\delta,\alpha;\mu}f\right)(t)dt. \quad (12)$$

Замечание. Если $\delta = (2\eta-1)/4$, $\alpha = 1/2$, $\mu = 2$, то Теоремы 1,2 приводят к соответствующим результатам для классического преобразования Ханкеля $\mathfrak{Z}_\eta$

Литература

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1., Т.2. М., 1966.
2. Sneddon I.N. Fractional Integrals and Derivatives and Dual Integral Equations. North Carolina, 1962.
3. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.; Л., 1948.
4. Glaeske H.-J., Kilbas A.A., Saigo M., Shlapakov S.A. // Appl. Anal. 2001. Vol.79. P.443-474.
5. Килбас А.А., Сайго М., Боровко А.Н. // Докл. АН Беларуси. 2000. Т.372. № 4. С.451-454.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ BMAP/SM/1 С ОДИНОЧНЫМИ И ГРУППОВЫМИ РЕЖИМАМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

А.А. Бирюков

Научный руководитель – А.Н. Дудин

Белорусский государственный университет

Одним из наиболее распространенных и эффективных вариантов моделирования потока сообщений в современных коммуникационных сетях и других системах обработки информации является использование марковского группового входного потока (batch markovian arrival process), далее обозначаемого аббревиатурой BMAP. BMAP включает в себя много хорошо известных процессов, таких как пуассоновский, марковский модулированный пуассоновский поток MMPP, поток фазового типа PH. В последние годы наблюдается постоянно растущий интерес к исследованиям систем массового обслуживания с BMAP потоком [1–3].

Рассмотрим систему с $N \geq 2$ режимами обслуживания. На вход поступает BMAP-поток требований. Согласно Д. Лукантони [4], BMAP-поток определяется цепью Маркова ν_t с непрерывным временем (управляющий процесс) с пространством состояний {0,1, ..,W} и набором матриц D_k, определяющим вероятности переходов управляющего процесса и генерации пачки из $k, k \geq 0$ заявок в момент перехода. Обслуживание в системе полумарковское (времена обслуживания последовательных заявок определяются последовательными временами пребывания управляющего полумарковского процесса в своих состояниях). Первые $1 \leq G < N$ режимов одиночные (прибор обслуживает запросы по одному), остальные $N - G$ режимов – групповые, когда на обслуживание одновременно берутся все находящиеся в момент начала обслуживания в системе запросы. При наличии в системе меньше L заявок прибор отдыхает. Здесь $L \geq 1$ – некоторое заранее определенное минимальное число заявок для начала обслуживания. Системы с таким порогом и групповым обслуживанием впервые были рассмотрены в статьях С. Чакраварти [5,6]. Обслуживание требований после отдыха всегда начинается в первом режиме, независимо от их числа. Таким образом, если в момент окончания обслуживания в очереди находится меньше L требований, то прибор ожидает, пока длина очереди не достигнет L требований, и начинает обслуживание в первом режиме.