Заметим, что в правой части (13) используются значения функции $y^i(x)$ лишь в узлах

$$x_p = t + \tau \sin^2 \frac{\pi p}{2m}, \quad p = 0,1,\dots,m-1, \tag{14}$$

вспомогательной сетки на отрезке дискретизации (см. (5),(6), (10), (12)). Поэтому для практических целей значения нового приближения $y^{i+1}(x)$ также достаточно вычислять только в фиксированных точках x_k, $k = 1,2,\dots,m$, вида (14). При этом значительно упрощаются и сами расчетные формулы (13):

$$y^{i+1}(x_k) = y^i(x_k) + \tau \sum_{j=1}^{m-1} b_{i,j} \frac{1}{j} \sin^2 \frac{j\pi k}{2m}, \quad k = 1,2,\dots,m-1, \tag{15}$$

$$y^{i+1}(t+\tau) = y^i(t+\tau) + \tau \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} b_{i,2\nu-1} \frac{1}{2\nu-1}, \quad i \ge 0. \tag{16}$$

Здесь (см. (12))

$$b_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{2}{m} \sum\limits_{p=1}^{m-1} f(x_p, y) \sin \dfrac{\pi p}{m} \cdot \sin \dfrac{j\pi p}{m}, & i = 0; \\ \dfrac{2}{m} \sum\limits_{p=1}^{m-1} [f(x_p, y^i(x_p)) - f(x_p, y^{i-1}(x_p))] \sin \dfrac{\pi p}{m} \cdot \sin \dfrac{j\pi p}{m}, & i = 1,2,\dots \end{cases} \tag{17}$$

а через $[\alpha]$, как обычно, обозначена целая часть числа α

Построенные вычислительные алгоритмы могут быть особенно полезными, скажем, в ситуации, характерной для жестких (см. [1]) систем, когда в случае традиционных пошаговых численных методов уменьшение величины шага сетки, вызванное необходимостью повышения уровня точности приближения быстро изменяющихся составляющих решения исходной задачи, приводит к "подвисанию" во времени его медленных составляющих. Проведенные численные эксперименты подтверждают, в частности, и такие возможности предлагаемых методов.

Литература.

1. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М., 1990.
6. Бобков В.В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 3. С. 57.
7. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М., 1961.
8. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Начала теории вычислительных методов. Интерполирование и интегрирование. Мн., 1983.
9. Федоренко Р.П.//Сб. "Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений", под ред. С.С.Филиппова. М.: ИПМ АН СССР. 1988. С. 17

О СИСТЕМАХ, ЭКВИВАЛЕНТНЫХ УРАВНЕНИЯМ ПЕНЛЕВЕ

А.С. Зенченко

Научный руководитель – В.И. Громак

Белорусский государственный университет

Нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, эквивалентные уравнениям Пенлеве, играют важную роль в теории этих уравнений. Наиболее важное применение эквивалентных систем состоит в том, что они дают простой метод построения преобразований Беклунда, которые являются одним из основных инструментов исследования различных свойств решений уравнений Пенлеве [1]. Эквивалентные системы для уравнений Пенлеве представляют собой сцепленные уравнения Риккати, которые могут быть стандартным образом линеаризованы. Таким образом, эквивалентные системы представляют собой в этом смысле линеаризацию уравнений Пенлеве.

Будем рассматривать множество нормальных систем

$$w' = f(z,w,u),\ u' = g(z,w,u), \tag{1}$$

где $f(z,w,u), g(z,w,u)$ – рациональные функции w, u с аналитическими по z в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$ коэффициентами, эквивалентных первому уравнению Пенлеве

$w'' = 6w^2 + z.$ (P_1)

Пусть система (1) эквивалентна уравнению

$$w'' = R(w', w, z), \tag{2}$$

где $R(w', w, z)$ – рациональная функция w', w относительно переменной w, т.е. исключение u из (1) даёт (2). При этом очевидно условием эквивалентности системы (1) уравнению (2) является условие

$$R(f(z,w,u), w, z) \equiv f_z + f_w f + f_u g. \tag{3}$$

Здесь и ниже мы считаем $f_u \neq 0$, т.е. систему (1) невырожденной. В противном случае первое уравнение системы (1) не зависит от u и либо является первым интегралом уравнения (2), либо определяет однопараметрическое семейство его решений.

Из множества эквивалентных уравнению (2) систем (1), которое мы обозначим через S, выделим следующие множества: S_{PV} – системы, обладающие свойством Пенлеве, S_H – гамильтоновы системы, S_P – полиномиальные по w и u системы, S_{PH} и S_{RH} – соответственно полиномиальные и рациональные гамильтоновы системы, S_{RL} – системы, у которых первое и второе уравнения дробно-линейны соответственно относительно u и w.

Рассмотрим множество S_{RL} дробно-линейных систем вида

$$w' = \frac{a(z,w)u + b(z,w)}{c(z,w)u + d(z,w)},\ u' = \frac{\alpha(z,u)w + \beta(z,u)}{\gamma(z,u)w + \delta(z,u)}, \tag{4}$$

где a, b, c, d и $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – полиномы от w и u соответственно с аналитическими относительно z коэффициентами.

Пусть $k_1 = \deg(a(z,w))$, $k_2 = \deg(b(z,w))$, $l_1 = \deg(c(z,w))$, $l_2 = \deg(d(z,w))$, $m_1 = \deg(\alpha(z,u))$, $m_2 = \deg(\beta(z,u))$, $n_1 = \deg(\gamma(z,u))$, $n_2 = \deg(\delta(z,u))$. Обозначим $k = \max(k_1, k_2), l = \max(l_1, l_2), m = \max(m_1, m_2), n = \max(n_1, n_2)$.

Теорема 1. *Для того, чтобы система (4) обладала свойством Пенлеве, необходимо выполнение следующих условий:*

1. *если $k > l$, то $k - l \le 2$;*
2. *если $m > n$, то $m - n \le 2$;*
3. *если $k \le l + 1$, то $\frac{\alpha(z,u)}{\gamma(z,u)} = r_1(z,u)$, где $r_1(z,u)$ – полином второй степени от u с аналитическими коэффициентами относительно z;*
4. *если $m \le n + 1$, то $\frac{a(z,w)}{c(z,w)} = r_2(z,w)$, где $r_2(z,w)$ – полином второй степени от w с аналитическими коэффициентами относительно z.*

Доказательство: Используя метод малого параметра Пуанкаре и рассматривая различные возможности соотношения степеней полиномов $a(z,w), b(z,w), c(z,w), d(z,w), \alpha(z,u), \beta(z,u), \gamma(z,u), \delta(z,u)$, получаем требуемое.

Теорема 1 является обобщением следующего результата [2].

Теорема 2. *Для того, чтобы полиномиально-линейная система*

$$w' = P(z,w)u + Q(z,w),\ u' = R(z,u)w + S(z,u), \tag{5}$$

где P, Q и R, S – полиномы по w и u соответственно с аналитическими по z в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$ коэффициентами, была системой P-типа, необходимо, чтобы она имела вид

$$w' = (p_0(z) + p_1(z)w + p_2(z)w^2)u + q_0(z) + q_1(z)w + q_2(z)w^2,$$
$$u' = (r_0(z) + r_1(z)u + r_2(z)u^2)w + s_0(z) + s_1(z)u + s_2(z)u^2. \tag{6}$$

Рассматривая систему (6) и применяя условие (3) для $R(w',w,z) = 6w^2 + z$, можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Множество S_{PL} полиномиально-линейных систем для уравнения (P_1) полностью описывается следующими двумя системами:*

$$w' = (p_0 + p_1 w)u + q_0 + q_1 w, \quad u' = \frac{6}{p_1} w + s_0 + s_1 u - p_1 u^2, \tag{7}$$

где коэффициенты $p_j(z), q_j(z), s_j(z)$, $j = 0,1$ удовлетворяют следующим условиям

$$p_0' = -p_1 q_0 - p_0(q_1 + s_1),\ p_1' = -p_1(2q_1 + s_1),\ q_0' = z - q_0 q_1 - p_0 s_0,\ q_1' = -\frac{6p_2}{p_1} - q_1^2 - p_1 s_0;$$

$$w' = (p_0 + p_1 w + p_2 w^2)u + q_0 + q_1 w + q_2 w^2, \quad u' = -\frac{2(q_2 + p_2 u)^2}{p_2} w + s_0 + s_1 u - p_1 u^2, \tag{8}$$

где коэффициенты $p_j(z), q_j(z), s_i(z)$, $j = \overline{0,2}$, $i = 0,1$ удовлетворяют следующим условиям

$$p_0' = -p_1 q_0 - p_0(q_1 + s_1),\ p_1' = -2p_2 q_0 + 2p_0 q_2 - p_1(2q_1 + s_1),\ p_2' = p_1 q_2 - p_2(3q_1 + s_1),$$
$$q_0' = z - q_0 q_1 - p_0 s_0,\ q_1' = -q_1^2 - 2q_0 q_2 + \frac{2p_0 q_2^2}{p_2} - p_1 s_0,\ q_2' = 6 - 3q_1 q_2 + \frac{2p_1 q_2^2}{p_2} - p_2 s_0.$$

Рассматривая системы (7) и (8) и проверяя условия существования гамильтонианов для таких систем, получаем следующую теорему.

Теорема 4. *Среди гамильтоновых полиномиально-линейных систем не существует систем, эквивалентных уравнению (P_1).*

Рассмотрим некоторые частные случаи дробно-линейных систем, удовлетворяющих условиям теоремы 1, и найдём условия эквивалентности таких систем уравнению (P_1). Так, например, для системы

$$w' = \frac{r_1(z,w)r_3(z,w)u + r_2(z,w)r_4(z,w)}{r_3(z,w)u + r_4(z,w)}, \quad u' = \frac{r_5(z,u)r_7(z,u)w + r_6(z,u)r_8(z,u)}{r_7(z,u)w + r_8(z,u)}, \tag{9}$$

где r_1, r_2, r_3, r_4 и r_5, r_6, r_7, r_8 – полиномы второй степени по w и u соответственно с аналитическими по z в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$ коэффициентами, справедлива

Теорема 5. *Уравнение (P_1) не имеет эквивалентных систем вида (9).*

Литература.

1. Громак В.И., Лукашевич Н.А. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Мн., – Мн.. Университетское, 1990. – 157 с.
2. Степанова Т.С. О нелинейных системах второго порядка без подвижных многозначных особых точек.// Вестник БГУ. Сер.1. – 1997, №2, с.48-52.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТИПА ХАНКЕЛЯ

Е.К. Щетникович
Научный руководитель – А.А. Килбас
Белорусский государственный университет

Рассмотрим интегральное преобразование

$$\left(S_{\delta,\alpha;\mu} f\right)(x) = x^{\alpha\mu/2} \int_0^\infty t^{-\alpha\mu/2+\mu-1} J_{2\delta-\alpha}\left(\frac{2}{\mu}(xt)^{\mu/2}\right) f(t)\,dt \tag{1}$$