УЧЕТ ТЕРМИЧЕСКОГО РАСШИРЕНИЯ В МОДЕЛИ ПОВЕДЕНИЯ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

Пряхин С.С., Рубаник В.В. мл.

Институт технической акустики НАН Беларуси, Витебск, Беларусь,
ssprvakhin@vandex.bv, jr@tut.bv

В ряде одномерных феноменологических моделей поведения сплава с памятью формы используется внутренняя переменная как характеристика соотношений между кристаллографическими компонентами материала. Их математическое описание дается двумя соотношениями. Первое – *определяющее соотношение термомеханики* устанавливает связь между напряжением σ и переменными состояния: деформацией ε, температурой T и внутренней переменной ξ:

$$\sigma = \sigma(\varepsilon, T, \xi) \tag{1}$$

Второе – *кинетическое соотношение* устанавливает связь между внутренней переменной ξ и переменными термомеханической нагрузки: напряжением σ и температурой T:

$$\xi = \xi(\sigma, T) \tag{2}$$

Использование обоих соотношений (1), (2) позволяет устанавливать макроскопическую связь между изменениями напряжения, температуры и деформации.

Внутренняя переменная ξ в практике моделирования трактуется как объемная либо массовая доля мартенситной фазы в сплаве. При полных мартенситных переходах модуль Юнга E и коэффициент линейного термического расширения α претерпевают значительные изменения. Поэтому было бы логичным применять для них модельные переходные зависимости от внутренней переменной:

$$E = E(\xi), \tag{3}$$

$$\alpha = \alpha(\xi). \tag{4}$$

Однако, применяя такие зависимости для модуля Юнга, разработчики моделей не применяют их для коэффициента линейного термического расширения. В настоящей публикации показана возможность корректного использования произвольных непрерывных модельных зависимостей коэффициента линейного термического расширения для построения определяющих уравнений как интегрального вида (1), так и дифференциального.

Определяющее уравнение строится на основе следующих двух постулатов.

1 Общая деформация сплава является суммой упругой деформации ε^{el}, деформации превращения ε^{tr} (обусловленной кристаллическими перестроениями) и термической ε^{T}

$$\varepsilon = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{tr} + \varepsilon^{T} \tag{5}$$

2. Соотношение между напряжением и упругой деформацией описываются законом Гука

$$\sigma = E(\xi)\varepsilon^{el} = E(\xi)\cdot\left(\varepsilon - \varepsilon^{tr} - \varepsilon^{T}\right) \tag{6}$$

В качестве отсчетного примем произвольное фиксированное состояние сплава "0", для которого в силу (6) имеет место

$$\varepsilon_0 - \varepsilon_0^{tr} - \varepsilon_0^{T} - \frac{\sigma_0}{D(\xi_0)} = 0 \tag{7}$$

Введя эту нулевую добавку в правую часть (6) со знаком минус, получим уравнение

$$\sigma = E(\xi)\cdot\left[(\varepsilon - \varepsilon_0) - \left(\varepsilon^{tr} - \varepsilon_0^{tr}\right) - \left(\varepsilon^{T} - \varepsilon_0^{T}\right) + \frac{\sigma_0}{E(\xi_0)}\right] \tag{8}$$

Далее уравнение (8) представляем в дифференциальной форме

$$d\sigma = dE(\xi)\cdot\left[(\varepsilon-\varepsilon_0)-(\varepsilon^{tr}-\varepsilon_0^{tr})-(\varepsilon^T-\varepsilon_0^T)+\frac{\sigma_0}{E(\xi_0)}\right]+E(\xi)\cdot(d\varepsilon-d\varepsilon^{tr}-d\varepsilon^T) \quad (9)$$

Дифференциал модуля Юнга, представленного модельной функцией (3), равен

$$dE=\frac{dE(\xi)}{d\xi}\cdot d\xi \quad (10)$$

Величина изменения термической деформации в правой части (8) может быть представлена в виде интегрального выражения $\Delta\varepsilon^T(\xi,T)$:

$$\varepsilon^T(\xi,T)-\varepsilon^T(\xi_0,T_0)=\Delta\varepsilon^T(\xi,T)=\int_{T_0}^{T}\alpha(\xi)dt \quad (11)$$

Здесь t является переменной интегрирования по температурному диапазону $[T_0, T]$. Условимся, что обозначение ξ в подынтегральных выражениях (11) и далее будет рассматриваться как величина, исторически привязанная к соответствующим дифференциальным приращениям температуры dt. Вне интегралов обозначение ξ будет рассматриваться как переменная величина текущего состояния. Если введенная функция $\alpha(\xi)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по ξ, то выражению (11) отвечают следующие частные производные по переменным состояния ξ и T

$$\frac{\partial\Delta\varepsilon^T}{\partial\xi}(\xi,T)\frac{\partial}{\partial\xi}\int_{T_0}^{T}\alpha(\xi)dt=\int_{T_0}^{T}\frac{\partial\alpha(\xi)}{\partial\xi}dt=\int_{T_0}^{T}\frac{d\alpha(\xi)}{d\xi}dt,\ \frac{\partial\Delta\varepsilon^T}{\partial T}(\xi,T)=\frac{\partial}{\partial T}\int_{T_0}^{T}\alpha(\xi)dt=\alpha(\xi) \quad (12)$$

Вычисление из (12) перекрестных производных второго порядка показывает, что они равны между собой

$$\frac{\partial^2\Delta\varepsilon^T}{\partial T\partial\xi}(\xi,T)=\frac{\partial}{\partial T}\int_{T_0}^{T}\frac{d\alpha(\xi)}{d\xi}dt=\frac{\partial^2\Delta\varepsilon^T}{\partial\xi\partial T}(\xi,T)=\frac{\partial}{\partial\xi}\alpha(\xi)=\frac{d\alpha}{d\xi}(\xi,T) \quad (13)$$

Это (см. [1]) является критерием того, что дифференциальное выражение

$$d\left(\int_{T_0}^{T}\alpha(\xi)dt\right)=d\xi\int_{T_0}^{T}\frac{d\alpha(\xi)}{d\xi}dt+dT\cdot\alpha(\xi), \quad (14)$$

включающее производные (12), является полным дифференциалом функции двух переменных $\Delta\varepsilon^T(\xi,T)$, однозначно определенной начальным условием $\Delta\varepsilon^T(\xi=\xi_0, T=T_0)=0$.

К примеру, при линейной модельной зависимости коэффициента линейного термического расширения $\alpha(\xi)=\alpha_A-\xi(\alpha_A-\alpha_M)$, где α_A и α_M – коэффициенты аустенитной и мартенситной фаз, решение уравнения (14) приводит к функции двух переменных изменения термической деформации $\Delta\varepsilon^T(\xi,T)=[\alpha_A-\xi(\alpha_A-\alpha_M)]\cdot(T-T_0)$.

Для завершения анализа (9) нам остается рассмотреть выражения для изменения деформации превращения $\Delta\varepsilon^{tr}(\xi,T)=\varepsilon^{tr}-\varepsilon_0^{tr}=\varepsilon^{tr}(\xi,T)-\varepsilon^{tr}(\xi_0,T_0)$, а также его дифференциала $d\varepsilon^{tr}$ Исходя из используемых концепций разделения внутренней переменной, можно предложить два подхода построения определяющего уравнения.

1. Согласно модельной концепции Бринсон [1] внутренняя переменная ξ разделена на две компоненты напряженно-индуцированную ξ_S и температурно-индуцированную ξ_T:

$$\xi=\xi_S+\xi_T\le 1,\ \xi_S\ge 0,\ \xi_T\ge 0, \quad (15)$$

но только напряженно-индуцированная компонента входит в выражение для деформации превращения

$$\varepsilon^{tr}=\varepsilon_L\xi_S, \quad (16)$$

где ε_L – предел восстанавливаемой деформации (температурно-независимая константа). Отсюда следует

$$\varepsilon^{tr}(\xi,T)-\varepsilon^{tr}(\xi_0,T_0)=\varepsilon_L(\xi_S-\xi_{S0});\ d\varepsilon^{tr}=\varepsilon_L d\xi_S \quad (17)$$

Подставив (10), (11), (14), (17) в (9) и сгруппировав относительно дифференциалов переменных, получаем дифференциальную форму определяющего уравнения:

$$d\sigma = Ed\varepsilon + \Omega^T d\xi_T + \Omega^S d\xi_S + \Theta dT \; ; \tag{18}$$

где:

$$\Omega^T = \Omega^T\left(\varepsilon, T, \xi_T, \xi_S\right) = \frac{dE(\xi)}{d\xi}\left[\varepsilon - \varepsilon_0 - \varepsilon_L\left(\xi_S - \xi_{S0}\right) - \int_{T_0}^{T}\alpha(\xi)dt + \frac{\sigma_0}{E(\xi_0)}\right] - E(\xi)\int_{T_0}^{T}\frac{d\alpha(\xi)}{d\xi}dt,$$

$$\Omega^S = \Omega^S\left(\varepsilon, T, \xi_T, \xi_S\right) = -E(\xi)\varepsilon_L + \Omega^T\left(\varepsilon, T, \xi_T, \xi_S\right), \; \Theta(\xi) = -E(\xi)\cdot\alpha(\xi)$$

2. Согласно другой концепции, изложенной в работе [2], внутренняя переменная ξ разделена на компоненты ξ^+ и ξ^-, отвечающие содержанию мартенситов, вносящих вклады в величину деформации превращения с противоположными знаками:

$$\xi = \xi^+ + \xi^- \leq 1, \; \xi^+ \geq 0, \; \xi^- \geq 0. \tag{19}$$

Такое разделение эффективно для описания знакопеременного нагружения. Соответствующее этому разделению выражение для деформации превращения:

$$\varepsilon^{tr} = \varepsilon_L\left(\xi^+ - \xi^-\right), \tag{20}$$

где ε_L – предел восстанавливаемой деформации. Выражения для изменений деформации превращения в уравнении (9) при этом приобретают вид

$$\varepsilon^{tr}(\xi, T) - \varepsilon^{tr}(\xi_0, T_0) = \varepsilon_L\left(\xi^+ - \xi^- - \xi_0^+ + \xi_0^-\right) \; ; \; d\varepsilon^{tr} = \varepsilon_L\left(d\xi^+ - d\xi^-\right) \tag{21}$$

Подставив (10), (11), (14), (21) в (9) и сгруппировав относительно дифференциалов переменных, получаем дифференциальную форму определяющего уравнения:

$$d\sigma = Ed\varepsilon + \Omega^+ d\xi^+ + \Omega^- d\xi^- + \Theta dT \; ; \tag{22}$$

где, применяя обозначение

$$\Omega = \Omega\left(\varepsilon, T, \xi^+, \xi^-\right) = \frac{dE(\xi)}{d\xi}\left[\varepsilon - \varepsilon_0 - \varepsilon_L\left(\xi^+ - \xi^- - \xi_0^+ + \xi_0^-\right) - \int_{T_0}^{T}\alpha(\xi)dt + \frac{\sigma_0}{E(\xi_0)}\right] - E(\xi)\int_{T_0}^{T}\frac{d\alpha(\xi)}{d\xi}dt \tag{23}$$

выпишем функции, стоящие перед дифференциалами переменных в уравнении (23):

$$\Omega^+ = -E(\xi) \; \varepsilon_L + \Omega\left(\varepsilon, T, \xi^+, \xi^-\right) \; ; \; \Omega^- = +E(\xi) \; \varepsilon_L + \Omega\left(\varepsilon, T, \xi^+, \xi^-\right), \; \Theta(\xi) = -E(\xi)\cdot\alpha(\xi)$$

В настоящую публикацию не включены построения интегральных форм определяющего уравнения. Их можно выписать из уравнения (8) с учетом особенностей разделения внутренней переменной. Представлены только дифференциальные формы. Методика их построения является более сложной задачей. Кроме того, именно дифференциальная форма описания поведения сплавов кажется более пригодной для построения по аналогиям трехмерных моделей.

Список литературы

1. Филиппов А.А. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: «Наука», 1979. – 96 с.
2. Brinson L.C. One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable. Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 1993. 4(2): pp. 229-242.
3. Пряхин С.С., Рубаник В.В. мл. Моделирование термомеханического поведения сплавов с памятью формы. В монографии: Современные перспективные материалы. Витебск: Изд-во УО "ВГТУ" – 2011. С. 415-449.