СТАТИЧЕСКАЯ И ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ И ТОНКИХ СТЕРЖНЕЙ

Саркисян С.О.

Гюмрийский государственный педагогический институт, Гюмри, Армения,
afarmanyan@yahoo.com, slusin@yahoo.com

Введение. Задачи статической и динамической устойчивости упругих тонких стержней, пластин и оболочек по классической прикладной теории упругости хорошо изучены [1–3 и др.]. Цель данной работы показать специфику постановки и изучить задачи статической и динамической устойчивости микрополярных изотропных упругих тонких сжатых стержней. Отметим, что к построению общей теории изгиба микрополярных упругих тонких стержней посвящена работа [4].

В случае микрополярного ортотропного упругого стержня к построению математической модели изгибой статической и динамической деформации посвещены работы [5,6].

1. Задача статической устойчивости микрополярных изотропных упругих тонких сжатых стержней. Рассмотрим шарнирно опертый стержень сжатой осевой силой P. Материал упругого стержня микрополярный, изотропный. Будем считать, что до нагружения ось стержня строго прямая, а линия действия силы совпадает с осью стержня. Это означает, что возможна прямолинейная форма равновесия стержня, которую принимаем за исходную. Отметим, что в таком идеальном осевом сжатом состоянии стержень можно рассчитывать по классической теории упругости, пренебрегая моментные свойства микрополярного материала.

Найдем условия существования форм равновесия стержня с искривленной осью, бесконечно близких к исходной прямолинейной осью равновесия. Для этого будем использовать модель плоской изгибной деформации микрополярного упругого изотропного стержня [4]. Согласно этой модели кинематика изгибной деформации осуществляется обобщенной на микрополярный случай гипотезе Тимошенко:

$$V_2 = w(x_1), \qquad V_1 = x_2\psi(x_1), \qquad \omega_3 = \Omega_3(x_1),$$

где w – прогиб оси стержня, V_1 – перемещения вдоль оси стержня, Ω_3 – свободный поворот точек стержня; x_1 – координата вдоль оси стержня, x_2 – координата в перпендикулярном к оси стержня направлении. Кроме кинематической модели изгиба микрополярных стержней принимаются также некоторые специальные статические гипотезы.

Применяя метод Эйлера определения критических усилий к решению задачи устойчивости микрополярного упругого тонкого стержня, рассмотрим равновесие элемента стержня в отклоненном состоянии, получим уравнения равновесия [4]

$$\frac{dN_{12}}{dx_1} = P\frac{d^2w}{dx_1^2}, \qquad N_{21} - \frac{dM_{11}}{dx_1} = 0, \qquad \frac{dL_{13}}{dx_1} + N_{12} - N_{21} = 0, \tag{1}$$

к которым следует присоединить соотношения упругости [4]

$$\begin{gathered} N_{12} = 2h\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{12} + (\mu-\alpha)\Gamma_{21}\right], \quad N_{21} = 2h\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{21} + (\mu-\alpha)\Gamma_{12}\right], \\ M_{11} = \frac{2Eh^3}{3}\cdot K_{11}, \qquad L_{13} = 2h\ B\ k_{13} \end{gathered} \tag{2}$$

и геометрические соотношения [4]

$$\Gamma_{12} = \frac{dw}{dx_1} - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = \psi + \Omega_3, \quad K_{11} = \frac{d\psi}{dx_1}, \quad k_{11} = \frac{d\Omega_3}{dx_1}. \tag{3}$$

Здесь N_{12}, N_{21} – усилия, M_{11}, L_{13} – моменты от силовых и моментных напряжений соответственно; E, μ, α, B – упругие константы микрополярного материала; $2h$ – высота стержня.

Решение систем уравнений (1)–(3) в случае шарнирного опирания будем искать в виде

$$w = w_0 \cdot \sin\frac{\pi x_1}{a}, \quad \psi = \psi_0 \cos\frac{\pi x_1}{a}, \quad \Omega_3 = \Omega_3^0 \cos\frac{\pi x_1}{a}. \tag{4}$$

Здесь a – длина стержня.

В результате приходим к следующей формуле для критического усилия P_{kp} :

$$P_{kp}^{мик} = k \cdot P_{kp}^{кл}, \qquad k = \frac{4\alpha + \left(1 + \frac{\alpha}{\mu}\right) B \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{12\alpha B}{Eh^2}}{4\alpha + B\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{3\alpha B \pi^2}{Eh^2\pi^2 + 3\mu a^2}}, \qquad P_{kp}^{кл} = \frac{2Eh^3\pi^2\mu}{Eh^2\pi^2 + 3\mu a^2}. \tag{5}$$

Например, если

$a = 0,008 м, \quad h = 0,0002 м, \quad E = 2 \cdot 10^{11} Па, \quad \mu = 0,77 \; 10^{11} Па, \quad \alpha = 0.5 \cdot 10^{11} Па, \quad B = 3000 H,$

на основе формул (5) получим:

$k = 2,12, \qquad P_{kp}^{кл} = 163,62 кH.$

Это означает, что если материал стержня микрополярный, положение сжатого равновесного состояния несравнимо устойчиво, чем в классическом случае.

2. Задача динамической устойчивости микрополярных изотропных упругих тонких сжатых стержней. Рассмотрим теперь задачу о поперечных колебаниях микрополярного упругого шарнирно опертого прямолинейного стержня, загруженного периодической продольной силой: $P = P_0 + P_t \cdot \cos\theta t$. Чтобы перейти к уравнениям поперечных колебаний микрополярного стержня под действием периодической продольной силы, достаточно ввести в уравнения равновесия (1) дополнительные слагаемые, учитывающие силы и моменты инерции.

В итоге приходим к следующей определяющей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}
2h(\mu - \alpha)\frac{\partial w}{\partial x_1} + 2h(\mu + \alpha)\psi_1 - \frac{2Eh^3}{3}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1^2} + 4h\alpha\Omega_3 = 0, \\
\left[2h(\mu + \alpha) - P\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2h(\mu - \alpha)\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} - 4h\alpha\frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1} = 2h\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\
2\alpha\frac{\partial w}{\partial x_1} - 2\alpha\psi_1 + B\frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial x_1^2} - 4\alpha\Omega_3 = I\frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}.
\end{gathered} \tag{6}$$

Здесь I – мера инерции при вращении.

Решение систем уравнений (6) представим опять в виде (4), где на этот раз коэффициенты w_0, ψ_0 и Ω_3^0 функции от времени t.

Таким образом, приходим к некоторому векторному уравнению типа Матье [2], и в итоге, к изучению следующего матричного уравнения:

$$\left|\mathbf{R} \pm \frac{\upsilon}{2}\mathbf{S} - \mathbf{E}'\frac{\theta^2}{4\Omega^2}\right| = 0,$$

где

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{k^2}{\Omega^2}\dfrac{2h(\mu-\alpha)}{\dfrac{\pi}{a}P_T} & -\dfrac{k^2}{\Omega^2}\dfrac{4h\alpha}{\dfrac{\pi}{a}P_T} \\ 2h\dfrac{\pi}{a}(\mu-\alpha) & P_T + P_Э & 4h\alpha \\ -\dfrac{2\alpha\dfrac{\pi}{a}}{I\Omega^2} & \dfrac{2\alpha}{I\Omega^2} & \dfrac{B\dfrac{\pi^2}{a^2}+4\alpha}{I\Omega^2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Omega = k\sqrt{1-\frac{P_0}{P_T}}, \quad \upsilon = \frac{\dfrac{P_t}{P_T}}{1-\dfrac{P_0}{P_T}}, \quad k = \frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{\mu+\alpha}{\rho}}, \quad P_T = 2h(\mu+\alpha), \quad P_Э = \frac{2Eh^3}{3}\frac{\pi^2}{a^2}.$$

Здесь $P_э$ - критическая сила Эйлера.

На основе известного метода решения подобных задач, разработанного в работе [2], находим границы первых главных областей неустойчивости:

Численный анализ показывает, что в микрополярном случае главные области неустойчивости сужаются и передвигаются в сторону высоких частот.

Список литературы

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука. 1967. 984с.
2. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: ГИТТЛ. 1956. 600с.
3. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение. 1978. 320с.
4. Sargsyan S.H. Effective Manifestations of Characteristics of Strength and Rigidity of Micro polar Elastic Thin Bars// Journal of Materials Science and Engineering. 2012. Vol.2. N1. P.98-108.
5. Алваджян Ш.И., Саркисян С.О. Прикладные модели статической деформации анизотропных микрополярных упругих тонких балок// Известия НАН Армении. Механика. 2011. Т. 64. N 4. С. 39-50.
6. Маргарян Л.М., Саркисян С.О. Математические модели динамики микрополярных анизотропных (ортотропных) упругих тонких балок.// Известия НАН Армении. Механика. 2012. Том 65. N1. С. 17-28.