ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА СОСТАВНЫХ ПЛАСТИН С РАЗРЫВНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ МЕТОДОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ

Видюшенков С. А.

ФГБОУ ВПО Петербургский государственный университет путей сообщения
Санкт-Петербург, Россия
baklava@mail.ru

Как известно, используя единичные функции, дельта-функции и их производные, можно построить дифференциальные уравнения, отражающие физические процессы, происходящие в пластинках с разрывными параметрами.

Наиболее простой метод интегрирования таких уравнений основан на использовании соотношения

$$\int f(x)H(x-a)\,dx = H(x-a)\int_a^x f(x)\,dx + C, \tag{1}$$

где $f(x)$ – некоторая непрерывная на рассматриваемом промежутке функция, $H(x-a)$ – единичная функция.

При интегрировании выражений содержащих δ-функции и производных от δ-функции предварительно используются фильтрующие свойства:

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a), \tag{2}$$

$$f(x)\delta'(x-a) = f(a)\delta'(x-a) - f'(a)\delta(x-a)$$

Если же процесс непосредственного интегрирования исходных дифференциальных уравнений не может быть реализован, то целесообразно воспользоваться итерационным методом, который достаточно подробно рассмотрен в работе [1] и реализуется в случае, когда левую часть дифференциального уравнения, можно представить в виде суммы двух дифференциальных операторов

$$L_1^{(n)}\left[Y(x)\right] + L_2^{(n-k)}\left[Y(x)\right] = A(x),$$

где $L_1^{(n)}\left[Y(x)\right]$ и $L_2^{(n-k)}\left[Y(x)\right]$ – дифференциальные операторы n-го и $(n-k)$-го порядка.

При этом решение строится от оператора L_1, а с помощью оператора L_2 определяется ошибка предыдущего интегрирования оператора L_1. Итерационный процесс производится требуемое число раз.

Пример расчёта.

Рассмотрим дифференциальное уравнение следующего вида:

$$\left[1-H(x-a)\right]y' + H(x-a)(y'-y) = A \tag{3}$$

В данном случае единичная функция $H(x-a)$ разделяет два участка дифференциального уравнения (3), имеющего различные типы дифференциальных уравнений первого порядка.

Таким образом, при $x<a$ дифференциальное уравнение (3) имеет вид

$$y' = A,$$

а при $x>a$

$$y' - y = A,$$

так как

$$A = [1 - H(x-a)]A + H(x-a)A. \tag{4}$$

Дифференциальное уравнение (3) преобразуем следующим образом:

$$y' - H(x-a)y = A \tag{5}$$

Будем решать дифференциальное уравнение (5) по методу разбиения его левой части на две составляющих: y' и $-H(x-a)\cdot y$ При этом интегрирование будем производить от левой части, содержащей y', а с помощью функции $H(x-a)$ y будем определять ошибку предыдущего интегрирования [2, 3].

Таким образом, первая составляющая решения найдена с помощью дифференциального уравнения

$$y' = A$$

Это даёт

$$y_1 = C + Ax. \tag{6}$$

Следовательно, первая ошибка интегрирования запишется в форме

$$O_1(x) = H(x-a)(C + Ax).$$

Знак «плюс» при $O_1(x)$ показывает, что перед интегрированием ошибка $O_1(x_n)$ переносится в правую часть дифференциального уравнения, определяющего вторую составляющую решения.

Тогда получим

$$y_2' = H(x-a)(C + A\ \ x) = H(x-a)[C + A(x-a) + Aa].$$

Отсюда с учётом выражения (1) будем иметь

$$y_2 = H(x-a)\left[C(x-a) + A\frac{(x-a)^2}{2} + Aa(x-a)\right].$$

Третья составляющая решения примет вид

$$y_3 = H(x-a)\left[C\frac{(x-a)^2}{2} + A\frac{(x-a)^3}{3!} + Aa\frac{(x-a)^2}{2}\right].$$

Так как

$$e^{x-a} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} = 1 + \frac{x-a}{1!} + \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^3}{3!} + \ldots,$$

то общее решение дифференциального уравнения (3) можно представить, как бесконечную сумму решений y_i в такой форме:

$$y(x) = [1 - H(x-a)](Ax + C) +$$
$$+ H(x-a)\left[Ce^{x-a} + A(e^{x-a} - 1) + Aae^{x-a}\right] \tag{7}$$

Покажем, что формула (7) действительно представляет собой решение дифференциального уравнения (3), т.е. обращает его в A

Для этого вычислим первую производную от функции (7), учитывая фильтрующее свойство дельта-функции (2). Она равна

$$y'(x) = [1 - H(x-a)]A - \underline{\delta(x-a)(Aa+C)} +$$

$$+H(x-a)\left[Ce^{x-a} + Ae^{x-a} + Aae^{x-a}\right] +$$

$$\underline{+\delta(x-a)\left[Ce^{a-a} + A\left(e^{a-a} - 1\right) + Aae^{a-a}\right]}$$

Поэтому слагаемые, содержащие дельта-функции, называемые в работе дополнительными частными решениями, взаимно уничтожаются и окончательно первая производная примет вид

$$y'(x) = [1 - H(x-a)]A + H(x-a)\left[Ce^{x-a} + Ae^{x-a} + Aae^{x-a}\right] \qquad (8)$$

Подставляя значения функций (7) и (8) в дифференциальное уравнение (3), получим

$$[1 - H(x-a)]y' + H(x-a)(y' - y) =$$

$$= [1 - H(x-a)]A + H(x-a)\{C(e^{x-a} - e^{x-a}) +$$

$$+A\left[e^{x-a} - (e^{x-a} - 1) - Aa(e^{x-a} - e^{x-a})\right] =$$

$$= [1 - H(x-a)]A + H(x-a)A = A \qquad (9)$$

Таким образом, функция (7) действительно является решением дифференциального уравнения (3).

Список литературы

1. Соколов Е.В., Опякин В.С. Построение частного решения для оболочки вращения с помощью разделения ее дифференциального уравнения на два дифференциальных оператора // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: Межвуз. сб. тр. Вып.7/ СПб.: СПбГАСУ, 2001. – С. 58-62.
2. Видюшенков С.А., Соколов Е.В. Использование метода разбиения левой части дифференциального уравнения на два дифференциальных оператора для построения его частных решений / Наука и технологии. Секция 5. Новые технологии. – Краткие сообщения XXVIII Российской школы (24-26 июня 2008 г.) – Екатеринбург: УрО РАН, 2008. – С.46-48
3. Видюшенков С.А., Захаров М.В., Соколов Е.В. Способ интегрирования дифференциальных уравнений с помощью разделения их левой части на два дифференциальных оператора // Теория и практика расчёта зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы. Сб. трудов III Международной научно-практической конференции (17 ноября 2010 года). – Москва / Московский государственный строительный университет. / М.: МГСУ, 2010. – С. 87-95