

НОВЫЙ ВАРИАНТ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ЕГО ПРИМЕНИМОСТЬ К ПРОБЛЕМАМ ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Черных К. Ф.

Санкт-Петербургский государственный университет

В работах автора [1-9] была предложена и развита предельно простая (без потери общности) версия общей нелинейной теории упругости, позволяющая получать точные решения двумерных краевых задач (плоская задача, антиплоская деформация, осесимметричная деформация тел вращения). Изложим особенности предложенного подхода на примере плоской задачи. Прежде всего, это использование развитого автором комплексного подхода, приводящего к более компактным и прозрачным зависимостям.

1. Комплексный подход

Вводятся комплексные координаты, дифференцирование по ним и комплексные компоненты векторов и тензоров

$$\zeta = x_1^o + ix_2^o, \bar{\zeta} = x_1^o - ix_2^o, x_3^o; \quad z = x_1 + ix_2, \bar{z} = x_1 - ix_2, x_3$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$$

$$T_1 = t_{11} + t_{22} + i(t_{12} - t_{21}), \quad T_2 = t_{11} - t_{22} + i(t_{12} + t_{21}), \quad T_5 = t_{33}.$$

Здесь x_i^o , x_i – декартовы координаты материальной точки до и после деформации.

Плоская деформация определяется зависимостями

$$z = z(\zeta, \bar{\zeta}), \quad x_3 = \lambda x_3^o$$

где $\lambda = const$ – кратность удлинений в направлении третьей координатной оси.

2. Разрешающие функции. Разрешающая система уравнений

Центральным в предложенном подходе является введение разрешающих функций: *разрешающих статических* функций (номинальные комплексные напряжения)

$$\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1, \quad \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2, \quad \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_{33}$$

и *разрешающих дилатационных* функций (комплексные дилатации)

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial x_3^o} = \lambda$$

определяющих все интересующие нас величины и удовлетворяющие *разрешающей системе уравнений*:

закону упругости

$$(I) \quad \frac{\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1}{2} = \frac{\partial \Phi}{\partial(\partial z / \partial \bar{\zeta})}, \quad \frac{\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2}{2} = \frac{\partial \Phi}{\partial(\partial z / \partial \zeta)}, \quad \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_{33} = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}$$

(однородному) уравнению равновесия

$$(II) \quad \frac{\partial \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2}{\partial \zeta} = 0 ;$$

(однородному) статическому граничному условию (Рис. 1)

$$(III) \quad \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 e^{i\gamma^*} + \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 e^{-i\gamma^*} = 0 ;$$

(однородному) дисторсионному граничному условию – условию жесткого края

$$(IV) \quad \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} - 1 \right) e^{i\gamma^*} - \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} e^{-i\gamma^*} = 0$$

Дисторсионное граничное условие (условие жесткого края) имеет существенные преимущества перед геометрическим (заделки), будучи сформулированным в терминах дисторсионных разрешающих функций, входящих в систему разрешающих уравнений. Они более удобны и для практического использования, в частности, при рассмотрении в физике твердого тела границы с проскальзыванием. При использовании функций Гурса-Колосова дисторсионное граничное условие однотипно со статическим условием.

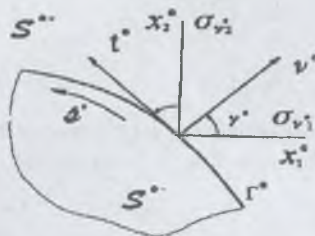


Рис.1.

Для областей S^* , S^{**} , сопрягаемых по линии Γ^* имеют место:
статическое условие сопряжения

$$(V) \quad \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^+ e^{i\gamma^*} + \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^+ e^{-i\gamma^*} = \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^- e^{i\gamma^*} + \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^- e^{-i\gamma^*}$$

и дисторсионное условие сопряжения

$$(VI) \quad \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} - 1 \right)^+ e^{i\gamma^*} - \left(\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right)^+ e^{-i\gamma^*} = \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} - 1 \right)^- e^{i\gamma^*} - \left(\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right)^- e^{-i\gamma^*}$$

Соотношения (I) – (VI) компактны, прозрачны и формируют разрешающую систему уравнений.

Коль скоро она разрешена, легко определяются и «вторичные» при нашем подходе величины:

конфигурация деформированной области

$$z(\zeta, \bar{\zeta}) = \int \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} d\bar{\zeta} \right),$$

поворот окрестности материальной точки ω

$$e^{i\omega} = \frac{\partial z / \partial \zeta}{|\partial z / \partial \zeta|},$$

условные напряжения (симметричные напряжения Био)

$$\Sigma_1^o = \sigma_{11}^o + \sigma_{22}^o = \operatorname{Re} \left\{ \left[\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right]^{-1} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \{ F^{-1} \cdot J \Sigma \}_1 \right\},$$

$$\Sigma_2^o = \sigma_{11}^o - \sigma_{22}^o + i2\sigma_{12}^o = \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \left[F^{-1} \cdot J \Sigma \right]_2, \quad \sigma_{33}^o = \{ F^{-1} \cdot J \Sigma \}_{33}.$$

Истинные напряжения (напряжения Коши) имеют целый ряд недостатков и непригодны для рассмотрения наиболее интересных в приложениях сингулярных проблем. От этих недостатков свободны рассматриваемые условные напряжения (симметричные напряжения Био).

3. Законы упругости

Получению *точных решений* двумерных краевых задач способствовало введение (в плоской задаче) двух законов упругости. Первым из них был учитывающий геометрическую нелинейность *редуцированный стандартный материал*, для которого:

$$\Phi = \sigma' \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} - 1 \right) \overline{\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} - 1 \right)} + \alpha \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \overline{\frac{\partial z}{\partial \zeta}} + \gamma(\lambda - 1)$$

$$\left(\sigma' = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \alpha = \frac{E}{(1+\nu)}, \gamma = \frac{E(1-\nu)}{4(1+\nu)(1-2\nu)} \right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} - 1 = \Phi(\zeta), \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} = \overline{\Psi(\zeta)}$$

$$\{ F^{-1} \cdot J \Sigma \}_1 = 2\sigma' \Phi(\zeta), \quad \{ F^{-1} \cdot J \Sigma \}_3 = 2\alpha \overline{\Psi(\zeta)}$$

Второй — *малосжимаемый материал*, для которого

$$\Phi = \frac{E}{1+\nu} \left[\alpha(J-1) + \varphi \left(\left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|, \lambda \right) \right]$$

(α — постоянная, $J = \lambda \left(\left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^2 - \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right|^2 \right)$ — кратность изменения объема). Здесь относительное изменение объема ($J - 1$) учтено простейшим (линейным) образом. Второе сла-

гаемое (функция своих аргументов) учитывает, деформацию сдвига. Этот (практически общий для конструкционных материалов) закон упругости учитывает геометрическую и физическую нелинейности. Разрешающие функции связаны здесь следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 &= \frac{E}{1+\nu} \left[2\alpha\lambda + \frac{\Omega(\partial z / \partial \zeta, \lambda)}{|\partial z / \partial \zeta|} \right] \frac{\partial z}{\partial \zeta}, \\ \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 &= -\frac{E}{1+\nu} 2\alpha\lambda \frac{\partial z}{\partial \zeta}, \quad \left(\Omega(\partial z / \partial \zeta, \lambda) = \frac{\partial \varphi(\partial z / \partial \zeta, \lambda)}{\partial |\partial z / \partial \zeta|} \right), \\ \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_3 &= \frac{E}{1+\nu} \left[\alpha \left(\frac{|\partial z|^2}{\partial \zeta^2} - \frac{|\partial z|^2}{|\partial \zeta|^2} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right] \end{aligned}$$

Оба варианта дают возможность получать точные решения двумерных краевых задач (плоская задача, антиплоская деформация, осесимметричная деформация тел вращения) и рассматривать анизотропные материалы (композиты, кристаллы, текстуры). Отметим, что в разрешающей системе уравнений (I)-(VI) лишь первое из них является нелинейным. Но для редуцированного стандартного материала оно линейно. Таким образом, для редуцированного стандартного материала разрешающая система уравнений *линейна* при геометрической нелинейности задачи в целом. Это дает возможность решать геометрически нелинейные задачи всеми методами, используемыми в линейной теории.

4. Метод расчленения граничных условий. Статически и дисторсионно определяемые задачи

Для решения краевых задач был предложен элементарный *метод расчленения граничных условий* более общий, чем традиционно используемый в линейной плоской задаче метод интегралов типа Коши, применимый к нелинейным задачам в случае отсутствия функций Гурса-Колосова. Суть его состоит в следующем. Пусть удалось представить (расчленить) граничное условие в виде

$$F_1(\sigma, \bar{\sigma}) + F_2(\sigma, \bar{\sigma}) = f_1(\sigma, \bar{\sigma}) + f_2(\sigma, \bar{\sigma}),$$

где входящие в него величины являются граничными значениями искомого ($F_1(x, \bar{x}), F_2(x, \bar{x})$) и заданных ($f_1(x, \bar{x}), f_2(x, \bar{x})$) функций, регулярных в рассматриваемой области, непрерывных вплоть до контура и удовлетворяющих условиям на бесконечности. Тогда можно принять

$$F_1(x, \bar{x}) = f_1(x, \bar{x}), \quad F_2(x, \bar{x}) = f_2(x, \bar{x}).$$

Предложенный метод не требует специальной математической подготовки. Техника его использования продемонстрирована на примерах решения многочисленных задач [1-9].

Проиллюстрируем его на двух примерах: плоскости с отверстием и с жестким включением общего вида. При конформном отображении внешности отверстия (включения) плоскости ζ на внутренность единичного круга плоскости χ

$$\zeta = \kappa(\chi) = R[\chi^{-1} + \kappa_0(\chi)], \quad \kappa_0(\chi) = c_1\chi + c_2\chi^2 + \dots + c_n\chi^n$$

и обозначении

$$X(\zeta, \bar{\zeta}) = X(\kappa(\chi), \overline{\kappa(\chi)}) = X^\vee(\chi, \bar{\chi})$$

находим [5-9] для плоскости с отверстием

$$\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^\vee(\chi) = \frac{a_0 - \bar{b}_0\chi^2}{1 - \chi^2\kappa'_0(\chi)}, \quad \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^\vee(\chi) = \frac{b_0 - \bar{a}_0\chi^2}{1 - \chi^2\kappa'_0(\chi)}$$

Полученные с помощью метода расчленения выражения не зависят от свойств материала (определяющих соотношений, не обязательно закона упругости). Их уместно называть решениями *статически определяемых задач*. При этом определяются и напряжения. Дисторсионные разрешающие функции находятся здесь из определяющих соотношений (также не обязательно закона упругости).

Для плоскости с жестким включением имеем аналогичные выражения

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)^\vee(\chi) - 1 = \frac{a_0 + \bar{b}_0\chi^2}{1 - \chi^2\kappa'_0(\chi)}, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}}\right)^\vee(\bar{\chi}) = \frac{b_0 + \bar{a}_0\chi^2}{1 - \chi^2\kappa'_0(\chi)}$$

также не зависящие от свойств материала – решение *дисторсионно определяемой задачи*. Статические разрешающие функции и условные напряжения находятся из определяющих соотношений (не обязательно закона упругости). Входящие в полученные выражения постоянные определяются напряжениями на бесконечности:

$$a_0 = \frac{\Sigma_1^{**}}{2\sigma^*} = \frac{\sigma_{11}^{**} + \sigma_{22}^{**}}{2\sigma^*}, \quad \bar{b}_0 = \frac{\Sigma_2^{**}}{2\alpha} = \frac{\sigma_{11}^{**} - \sigma_{22}^{**} + i2\sigma_{12}^{**}}{2\alpha}$$

5. Сопряжение областей с разными материалами Прямая и обратная обобщенные теоремы Эшелби

Метод расчленения был распространен и на случай сопряжения областей с разными материалами. Здесь условия статико-дисторсионного сопряжения (V)-(VI) приводит к связи значений разрешающих функций в области S^{*-} (включение) и S^{*+} (матрица):

$$\begin{pmatrix} \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^{\vee+}(\chi, \bar{\chi}) \\ \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^{\vee+}(\chi, \bar{\chi}) \\ (\partial z / \partial \zeta - 1)^{\vee+}(\chi, \bar{\chi}) \\ (\partial z / \partial \bar{\zeta})^{\vee+}(\chi, \bar{\chi}) \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \chi^2\kappa'_0(\chi)} \begin{pmatrix} \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^{\vee-}(\bar{\chi}^{-1}, \chi^{-1}) \\ \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^{\vee-}(\bar{\chi}^{-1}, \chi^{-1}) \\ (\partial z / \partial \zeta - 1)^{\vee-}(\bar{\chi}^{-1}, \chi^{-1}) \\ (\partial z / \partial \bar{\zeta})^{\vee-}(\bar{\chi}^{-1}, \chi^{-1}) \end{pmatrix}$$

$$= -\bar{\kappa}'_0(\chi^{-1}) \left[\begin{array}{c} \left\{ F^{-1} \cdot J \Sigma \right\}_2^{\vee-} (\bar{\chi}^{-1}, \chi^{-1}) \\ \left\{ F^{-1} \cdot J \Sigma \right\}_1^{\vee-} (\bar{\chi}^{-1}, \chi^{-1}) \\ \left(\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right)^{\vee-} (\bar{\chi}^{-1}, \chi^{-1}) \\ \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} - 1 \right)^{\vee-} (\bar{\chi}^{-1}, \chi^{-1}) \end{array} \right]$$

в инверсионно сопряженных точках χ и $\bar{\chi}^{-1}$ (рис.2). На эти соотношения следует смотреть, как на дисторсионно-статическое продолжение разрешающих функций через линию сопряжения Γ^m . Прделанное продолжение не связывалось с аналитичностью разрешающих функций.

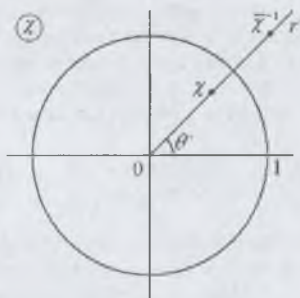


Рис.2.

Пусть заданные во включении (области S^{∞}) выражения для разрешающих функций на физической плоскости при $\zeta \rightarrow \infty$ удовлетворяют условиям:

$$\left\{ F^{-1} \cdot J \Sigma \right\}_1^{\vee-} (\zeta, \bar{\zeta}) = O(|\zeta|^{p_1}), \quad \left\{ F^{-1} \cdot J \Sigma \right\}_2^{\vee-} (\zeta, \bar{\zeta}) = O(|\zeta|^{p_2}),$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} - 1 \right)^{\vee-} (\zeta, \bar{\zeta}) = O(|\zeta|^{p_3}), \quad \left(\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right)^{\vee-} = O(|\zeta|^{p_4}) \quad (p_i > 0).$$

Из требования конечности напряжений, деформаций и поворота в матрице (области S^{∞}) следует [7-9], что здесь показатель степени должны быть неположительным. Отсюда и находится искомое неравенство:

$$p \leq n - 1 \quad (p = \max \{ p_1, p_2, p_3, p_4 \})$$

Здесь в случае строгого неравенства при заданной форме включения (с постоянной n) оно ограничивает скорость возрастания напряжений (постоянная p). Более интересен случай знака равенства:

$$p = n - 1$$

позволяющий рассматривать деформирование тела (плоскости на бесконечности) напряжениями $\sigma_{ij}^{\infty} = const$. Из полученного равенства следуют (для произвольного материала)

Прямая и обратная обобщенные теоремы Эшелби:

во включении эллиптической формы ($n = 1$) реализуется однородное напряженно-деформированное состояние ($p = 0$) и, обратно, однородное напряженно-деформированное состояние включения определяет его эллиптическую форму.

Проделанные преобразования проведены для любого материала, не обязательно упругого.

Получены [7-9] точные решения (при произвольном материале) для трех наиболее интересных в физической мезомеханике случаев:

1. равномерно нагруженное включение (зародыш новой фазы в матрице);
2. включение, нагруженное сосредоточенной силой (способствующее преодолению энергетического барьера при возникновении новой фазы);
3. включение, содержащее красную дислокацию.

Сформулирована также статико-дисторсионная аналогия, по которой статическим величинам и соотношениям отвечают соответствующие дисторсионные.

В целом же в работах автора и его учеников [1-9]:

– Введены статические и дисторсионные разрешающие функции, для которых получена предельно простая, без потери общности, разрешающая система уравнений, дающая возможность получать точные решения двумерных краевых задач. При этом подходе перемещения, поворот и напряжения являются, как бы, «вторичными» величинами, определяемыми после решения основной задачи.

– Введены формулируемые в терминах разрешающих функций новые типы граничных условий и условий сопряжения (дисторсионные, жесткого края, деформационные, термодинамические), более удобные, чем традиционные, и решающие специфические задачи. Так, в физике твердого тела дисторсионные условия сопряжения успешно заменяют условия на границе с проскальзыванием. Деформационные же условия сопряжения, не реагирующие на жесткие смещения и повороты, удобны при рассмотрении разориентированных кристаллитов.

– Изложенное в последнем разделе полезно при рассмотрении зародыша новой фазы в материнском кристалле (бесконечном и конечном), а также при двойниковании и мартенситных превращениях.

– Выявлены случаи получения точных решений задач для произвольного (не обязательно упругого) материала; либо частей решения (статически определимые и дисторсионно определимые задачи).

– Предложенный ранее автором (1951) в линейной плоской задаче метод расчленения граничных условий (простой и более общий, чем метод интегралов типа Коши – применимый и в случаях отсутствия функций Гурса-Колосова) распространен на нелинейные двумерные краевые задачи (антиплоская деформация, осесимметричная деформация тел вращения), анизотропные материалы и случаи сопряжения областей.

– В линейной теории упругости известна статико-геометрическая аналогия. В нелинейной же механике твердого деформируемого тела прослеживается статико-дисторсионная аналогия, проявляющаяся в однотипности выражений для статических и дисторсионных разрешающих функций и отвечающих им соотношениях.

– Проделанное позволило получить точные решения актуальных двумерных нелинейных задач (в том числе краевых) теории упругости и физики твердого тела. Полученные результаты существенно (численно и даже качественно) отличаются от своих линейных аналогов.

– Из соотношений разрешающей системы (I)-(VI) только первое является нелинейным относительно искомым разрешающих функций. Так что задачи, разрешимые

для любого материала (без привлечения уравнений состояния), являются (по существу) линейными. Таковыми же являются и задачи, при решении которых используется редуцированный стандартный материал. В этом смысле задачи, в которых используются статически определяемые, либо дисторсионно определяемые решения, уместно называть полулинейными

Особенностями использованного подхода являлись:

- отказ от использования уравнений совместности;
- отказ от использования смещений (отыскиваются комплексные координаты материальной точки после деформации);
- введение новых граничных условий и условий сопряжения;
- введение новых типов (нелинейных) уравнений упругости;
- последовательное развитие и использование комплексного метода;
- созданный аппарат позволяет рассмотреть актуальные проблемы физической мезомеханики (двойникование, фазовые переходы);
- просматриваются пути распространения полученного на неупругие материалы.

6. Некоторые конкретные результаты

Помимо рассмотренной здесь плоской задачи получены новые результаты по созданным простым версиям общей теории, антиплоской деформации, осесимметричной деформации тел вращения, комплексным инвариантным интегралам (J - интегралам), оболочкам и тонким слоям (антиоболочкам). Упомянем некоторые, наиболее интересные результаты:

в нелинейной теории трещин:

- Линейная теория обособанно применима в задачах, где определяющим параметром является один (единственный) коэффициент интенсивности напряжений.
- Учет нелинейности вносит существенную поправку (около 30%) в известный критерий хрупкого разрушения Кейли-Тайсона-Котрелла, определяющий, будет ли разрушение хрупким или вязким.
- Выявлено отсутствие излома траектории распространения трещины смешанного типа.
- Выявлено фактическое совпадение критериев разрушения Ирвина и нормально-го отрыва (Эрдогана-Си).
- Именно применительно к теории трещин, впервые выявлена непригодность истинных напряжений в сингулярных проблемах.
- Выявлено качественное различие результата действия на берег трещины "мертвой" (не меняющей направления при деформации) и следящей (например, нормального давления) нагрузок.
- Применительно к нелинейному подходу уточнен дискретный критерий разрушения Новожилова.
- Выявлено отсутствие осциляции деформаций и напряжений в конце трещины между полуплоскостями с разными упругими свойствами.
- Рассмотрена нелинейная комплексная теории инвариантных интегралов (в том числе, и применительно к угловым вырезам и включениям). Полученные инвариантные интегралы позволили избежать использования теории скачков Адамара при построении термодинамического условия сопряжения. Полученный здесь химический потенциал структурно отличается от использованных ранее.
- В нелинейной постановке модифицированным методом граничных элементов рассмотрены трещины в конечных областях. Использован также модифицированный применительно к рассматриваемым нелинейным проблемам метод конечных элементов.

в теории дислокаций и дисклинаций и физической мезомеханике:

– Рассмотрены нелинейные краевые и винтовая дислокации, а также клиновидная дисклинация в кристаллах.

– При рассмотрении взаимодействия прямолинейных дислокаций с границей области, с концом трещины и между собой полученные точные решения соответствующих задач показали существенные, порой качественные их отличия от линейных аналогов. Так, например, было выяснено, что параллельные прямолинейные дислокации одного знака (вопреки известным из линейной теории классическим результатам) везде отталкиваются. В отличие от линейного подхода, нелинейный обнаруживает (положительную) дилатацию дислокаций (дислокационное разрыхление материала).

– Из закона для малосжимаемого материала получен гибридный закон, удовлетворяющий макрозакону сжимаемости материала и микрозакону взаимодействия частиц. Он может быть полезным и при рассмотрении ядра дислокации.

– В нелинейной постановке рассмотрен вопрос о межкристаллитных и межфазных большеугловых границах. Рассмотрен круг вопросов, связанных с равновесием зародыша (произвольной формы и материала) с (бесконечной и конечной) материнской матрицей (также произвольного материала). Установлена для двумерных проблем связь между этой задачей и обобщенными (прямой и обратной) теоремами Эшелби.

в проблеме сосредоточенных сил и моментов:

– Выявлена непригодность истинных напряжений, вследствие их независимости от величины сосредоточенных воздействий и завышенной сингулярности.

– Решены единообразным путем обобщенные задачи Фламана (для сосредоточенных сил и моментов, приложенных к границам областей общего вида), Рассмотрена краевая дислокация на границе кристалла (кристаллита) – т.н. ступенька.

– Рассмотрены сосредоточенные силы и моменты в полуплоскости.

Созданный аппарат может быть полезен при построении (нелинейных, анизотропных) механики деформируемого твердого тела и физики твердого тела. Уже полученные результаты свидетельствуют о своевременности и реальности решения этой «сверхзадачи».

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов: поддержки ведущих научных школ РФ (НШ- 2180-2003.1, РФФИ (02-01-01258), мин-ва. науки и образования (ЕО 2-А.0-75).

Список литературы

1. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах – Л.: Машиностроение, 1986
2. Черных К.Ф. Введение в анизотропную упругость – М.: Наука, 1988
3. Черных К.Ф. Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин.– М.: Наука, 1996.
4. Chernykh K.F. Nonlinear Theory of Anisotropic Elasticity. USA, N.Y.: Begell Publishing House, 1998.
5. Черных К.Ф. Нелинейная сингулярная упругость. Часть 1. Теория – СПб, НИИХ СПбГУ, 1999, 276 с.

6. Черных К.Ф. Нелинейная сингулярная упругость. Часть 2. Приложения.– СПб, НИИХ СПбГУ, 1999, 195 с.
7. Черных К.Ф. Комплексная нелинейная теория упругости // Успехи механики, Т. 1, №4, 2002, С. 121-161.
8. Черных К.Ф. На подступах к нелинейной физической мезомеханике.// Физическая мезомеханика, т.5, №2, 2002, С.5-15
9. Черных К.Ф. Нелинейная упругость (теория и приложения).– СПб, изд. СПбГУ (в печати)

УДК 519.248

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ЭМПИРИЧЕСКИХ И ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РАСЧЁТА ПРОГИБОВ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК

Грибняк В. Т., Каслаускас Г. Г.

*Вильнюсский Технический Университет им. Гедиминаса, Вильнюс, Литва,
bridge@st.vtu.lt*

Аннотация. В статье статистически оценивается точность различных методов расчёта прогибов железобетонных балок. В частности, рассмотрены эмпирические методы, используемые в американских (ACI), европейских (EC2) и российских (СНиП) нормативных документах, а также специализированный компьютерный пакет ATENA, использующий метод конечных элементов для численного моделирования железобетонных элементов, и итерационная процедура расчёта прогибов железобетонных элементов, предложенная вторым автором (Flexural).

Ключевые слова: Железобетонные балки, методы расчёта, статистический анализ

1. Введение

Инженеры для расчёта железобетонных конструкций могут использовать как традиционные методы, используемые в нормативных документах, так и методы численного моделирования и расчёта. Несмотря на то, что нормативные методы обеспечивают некоторую надёжность, они в малой мере отражают реальную физическую сущность напряжённо-деформированного состояния рассчитываемой конструкции, особенно в стадии образования трещин. Численные методы, получившие широкое развитие в последние десятилетия, опираются на универсальные методы расчёта и позволяют учитывать особенности нелинейного поведения материалов и конструкций в целом. Однако, выбирая тот или другой метод, инженер должен обладать уверенностью в точности выбранного метода.

В данной статье представлены результаты статистического анализа соответствия экспериментальным данным прогибов железобетонных балок, рассчитанных с использованием различных методов. Анализируются результаты расчёта с использованием американских (ACI), европейских (EC2) и российских (СНиП) нормативных методов, а также специализированного компьютерного пакета ATENA, использующего метод конечных элементов (КЭ) для численного моделирования железобетонных элементов, и