Математика

УДК 517.925.12

СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОГО ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА ОДНОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ТОЧЕК РАВНОВЕСИЯ

В.С. Денисов

В работе [1] найдены достаточные условия существования устойчивого предельного цикла, охватывающего все точки равновесия системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \psi(g) + y(x) \quad \dot{y} = g(x). \tag{1}$$

При $\psi(y) = y$ систему (1) называют системой нелинейных колебаний, для которой в [2] доказан ряд теорем существовангия по крайней мере одного неустойчивого предельного цикла или по крайней мере двух предельных циклов, окружающих одну особую точку - начало системы координат. В статьях [3], [4] получены более общие достаточные условия существования неустойчивого предельного цикла системы нелинейных колебаний, охватывающих конечное число особых точек, часть из которых расположена на оси абсцис. В настоящей работе рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = y^{2n-1} + f(x);\ \dot{y} = g(x), \tag{2}$$

где $n \in N$, при выполнении условий:

A. $f(x)$ *и* $g(x)$ - нечетные функции,

B. $g(x) \geq 0$ *на* $(0;x_k)$; $g(x) < 0$ *на* $(x_k;+\infty)$; $f(x) > 0$ *на* $(0;x_k)$, $(x_{k+1};x_{k+3})$;

$f(x) < 0$ *на* $(x_k;x_{k+1})$; $g(0) = g(x_i) = f(0) = f(x_k) = f(x_{k+1}) = 0,\ i = \overline{1,k}$

и функции f(x) и g(x) обеспечивают существование и единственность решений при любых начальных значениях (x;y).

Обозначим:

$$G(x) = \int_0^x -g(s)ds, \quad \varphi(x) = \int_0^x -g(s)f(s)ds,\ d = -G(x_k),\ b = G(x_{k+1}) - G(x_k),$$

$$V(x;y) = y^{2n}/(2n) + G(x) \tag{3}$$

$$K(\gamma) = \left(\sqrt[2n-1]{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + d\Big/\sqrt[2n-1]{(\gamma-1)^{2n} M^{2n}} \right)^{2n-1} + \frac{1}{\gamma-1},\ M = \max_{[0;x_{k+3}]} |f(x)|.$$

Лемма 1. Если выполнено условие B и $\exists \gamma > 1$, такое, что

$$b \geq k(\gamma)d, \tag{4}$$

то для всякой дуги траектории системы (2), расположенной в полуплоскости $y \ge \sqrt[2n-1]{\gamma M}$ $[y \le -\sqrt[2n-1]{\gamma M}]$ и пересекающей прямые x=0, $x=x_{k+1}$, выполняется неравенство

$$y_0^+ - y_{k+1}^+ > 0 \quad [y_0^- - y_{k+1}^- < 0] \tag{5}$$

Доказательство. Рассмотрим дугу произвольной траектории $y = y(x)$ (L_1) системы (2), лежащей в полуплоскости $y \ge \sqrt[2n-1]{\gamma M}$. Интегрируем уравнение

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \Big/ \left(y^{2n-1} + f(x)\right) \tag{6}$$

вдоль L_1 на промежутке $[0;\ x_{k+1}]$. Разбивая последний на два отрезка $[0;\ x_k]$, $[x_k;\ x_{k+1}]$, и, используя неравенство (4), оценим разность ординат вдоль траектории L

$$y_{k+1}^+ - y_0^+ < \frac{d}{\left(y_0^+\right)^{2n-1} - M} - \frac{b}{\left(y_k^+\right)^{2n-1} + M} < \frac{d}{p}\left[\left(y_k^+\right)^{2n-1} + M - k(\gamma)\left(\left(y_0^+\right)^{2n-1} - M\right)\right] \tag{7}$$

где $p = \left[\left(y_0^+\right)^{2n-1} - M\right]\left[\left(y_k^+\right)^{2n-1} + M\right]$

Интегрируя уравнение (6) вдоль L на $[0;\ x_k]$ найдем оценку для y_k^+ сверху

$$y_k^+ < y_0^+ + d \Big/ \left[\left(y_0^+\right)^{2n-1} - M\right]$$

Учитывая ее, из неравенства (7), получим

$$y_{k+1}^+ - y_0^+ < \frac{d}{p}\left[\left(y_0^+ + \frac{d}{\left(y_0^+\right)^{2n-1} - M}\right)^{2n-1} + M - k_\gamma\left(\left(y_0^+\right)^{2n-1} - M\right)\right]$$

Полагая $y_0^+ = \sqrt[2n-1]{(\gamma + z)M}$, *где* $z \ge 0$, из последнего неравенства получим оценку

$y_{k+1}^+ - y_0^- < \frac{d}{p}\left[k(\gamma + z) - k(\gamma)\right] < 0$, так как $k(\gamma)$ - убывающая функция.

Лемма 2. Если выполнено условие B и C. $\exists\, x_{k+2} \in (x_{k+1}; x_{k+3})$, $\exists\, \gamma > 1$ такие, что выполнены неравенства (4) и

$$\varphi(x_{k+2}) \ge 2\varphi(x_{k+1})/(1-\gamma), \tag{8}$$

то разность значений функции (3) вдоль дуг траекторий системы (2) на отрезке $[0; x_{k+2}]$, лежащих в полуплоскости $y \ge \sqrt[2n-1]{\gamma M}$ $[y \le -\sqrt[2n-1]{\gamma M}$ и пересекающих прямые $x = 0;\ x = x_{k+2}$ удовлетворяет неравенству

$$V(x_{k+2},y^{+}_{k+2})-V(0,y_0{}^{+})>0 \quad [V(0,y_0{}^{-})-V(x_{k+2},y^{-}_{k+2})>0] \tag{9}$$

Производная функции (3) по x вдоль траекторий системы (2) имеет вид

$$\frac{dV}{dx}=\frac{-g(x)f(x)}{y^{2n-1}+f(x)} \tag{10}$$

В силу леммы 1 и структуры поля направлений

$$\left(y^{+}_{k+1}\right)^{2n-1}=\min_{[0;x_{k+1}]}(y(x))^{2n-1};\quad \left(y^{+}_{k+1}\right)^{2n-1}=\max_{[x_{k+1};x_{k+2}]}(y(x))^{2n-1} \tag{11}$$

Интегрируя равенство (10) на отрезке $[0;x_{k+2}]$ вдоль дуг траекторий, указанных в условиях леммы 2, и, разбивая $\int\limits_0^{x_{k+2}}(g(x)/(y^{2n-1}+f(x))]dx$ точкой x_{k+1} на два интеграла, с учетом равенств (11) и неравенства (8), получим оценку: $V(x_{k+2};y^{+}_{k+2})-V(0,y^{+}_0)>\frac{1}{q}\left[\frac{2\varphi(x_{k+1})}{1-\gamma}(\gamma M-M)+2\varphi(x_{k+1})M\right]=0,$ где $q=((y^{+}_{k+1})^{2n-1}+M)((y^{+}_{k+1})^{2n-1}-M)$. Аналогично доказывается лемма для полуплоскости $y\le-\sqrt[2n-1]{\gamma M}$.

Обозначим: $m_1=\max\limits_{i=\overline{0,k}}\left\{\frac{1}{2n}\left(\sqrt[2n-1]{-f(x_i)}\right)^{2n}+G(x_i)\right\},\ m_2=G(x_{k+1})$

Лемма 3. Если выполнены условия А, В и неравенство $m_1<m_2$, то тогда кривые V=C при $m_1<C\le m_2$ обладают следующими свойствами:

1) симметричны относительно оси OX,
2) лежат в полосе $-x_{k+1}\le x\le x_{k+1}$
3) замкнуты и ограничивают область $(V\le C)$, внутри которой находятся все конечные точки системы (2).

Доказательство следует из вида ординат кривых уровня функции (3)

$y=\pm\sqrt[2n]{2n(C-G(x))}$

и проводится аналогично [1, с.76].

Теорема 1. Если выполнены условия А, В, неравенство $m_1<m_2$ и $\exists\gamma>1, \exists x_{k+2}\in(x_{k+1};x_{k+3})$ такие, что выполняются неравенства (4), (8) и

$$G(x_{k+3})-G(x_{k+2})\ge\frac{1}{2n}\left(\sqrt[2n-1]{\gamma M}\right)^{2n}+2M\sqrt[2n-1]{\gamma M}, \tag{12}$$

то тогда система (2) в полосе $-x_{k+3}\le x\le x_{k+3}$ имеет по крайней мере один неустойчивый предельный цикл, окружающий все особые $(0;0),(\pm x_i;\sqrt[2n-1]{-f(\pm x_i)}),\quad i=\overline{1,k}.$

Доказательство. Из условия А, В следует, что производная функции (3) в силу системы (2) $\frac{dV}{dT} = -f(x)g(x) \le 0$ на $[-x_{k+1}; x_{k+1}]$, поэтому кривая $V = C_0$, где $m_1 < C_0 \le m_2$ пересекается траекториями системы снаружи вовнутрь. Траектория L, начинающаяся в точке $C(x_{k+2}; y^+_{k+2} = \sqrt[2n-1]{\gamma m})$, при уменьшении t выйдет на ось ординат в точке $A(0; y_0^+)$. При увеличении t она пересечет изоклину бесконечности $y^{2n-1} + f(k) = 0$ при $x_{k+2} < x \le x_{k+3}$, так как в противном случае, интегрируя неравенство $\frac{dy}{dx} = g(x)/(y^{2n-1} + M)$, справедливое вдоль L на $[x_{k+2}; x_{k+3}]$ и проводя оценки, получим неравенство противоположное неравенству (12) из условий теоремы. В дальнейшем полутраектория L^+ выходит на прямую $x = x_{k+2}$ в точке D, и при этом, в силу неравенства $\frac{dV}{dy} = -f(x) < 0$, имеем оценку:

$$V_D - V_c > 0 \qquad (13)$$

Затем полутраектория L^+ выходит на ось ординат в точке $B(0, y_0^-)$ где $y_0^- < -\sqrt[2n-1]{\gamma m}$. В силу леммы 2 выполняются неравенства: $V_C - V_A > 0$; $V_B - V_D > 0$. Складывая их с неравенством (13), получим, что вдоль L $V_B - V_A > 0$, откуда в силу симметрии кривых $V = C$ относительно оси OX получим неравенство OB>OA.

В силу нечетности функций $f(x), g(x), \psi(y) = y^{2n-1}$ в полуплоскости $x \le 0$ существует дуга A_1B_1 траектории L^+, симметричная дуге AB траектории L относительно начала координат. Эти дуги с отрезками $[BA_1], [AB_1]$ оси ординат образуют контур Г, ограничивающий область σ, такую, что ни одна траектория системы (2) не входит в эту область. Тогда в кольцевой области $\sigma \backslash (V \le C_0)$ существует по крайней мере один неустойчивый предельный цикл, окружающий все особые точки системы.

Литература

1. Денисов В.С., Примакова С.И. О предельных циклах, охватывающих конечное число особых точек одной динамической системы. Труды института математики, том 6, Минск. : Институт математики НАН Беларуси, 2000. (с.75-77)
2. Кушков Н.Н. Некоторые теоремы о предельных циклах для системы нелинейных колебаний. УМН. 1958. т.13, вып. 2(80). с.203-209
3. Денисов В.С. Предельные циклы одной автономной системы. Дифференциальные уравнения. 1979.т.15,№9. с. 1572-1579
4. Денисов В.С., Примакова С.И. Об условиях существования предельных циклов одной автономной системы. Совершенствование технологических процессов, оборудования и организация производства в легкой промышленности и машиностроении. ч.2, Минск, 1994. с. 69-74.

SUMMARY

In this paper the sufficient conditions for existence at least of one unstable limit cycle, which surrounds all singular points, of some autonomous system are given.