УДК 539.376

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ МЯГКОГО И ЖЕСТКОГО НАГРУЖЕНИЯ ДЛЯ ОСНОВНЫХ ВАРИАНТОВ ЭНДОХРОННОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Ю.И.Кадашевич, С.П.Помыткин

Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров
198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4
e-mail: sp@pom.usr.pu.ru

Рассматриваются два основных варианта тензорно-параметрической теории пластичности эндохронного типа. Предлагаются способы обобщения определяющих соотношений теории на случай конечных деформаций. Рекомендуются две различные постановки для задач мягкого и жесткого нагружения материала.

В работах [1, 2] были сформулированы основные положения построения эндохронных вариантов теории пластичности для конечных деформаций. Ниже излагаются принципы решения задач мягкого и жесткого нагружения для различных вариантов эндохронных теорий пластичности, подчеркивая особенности постановок задач.

1. Рассмотрим два варианта эндохронной теории пластичности, применяемые для малых деформаций:

$$\frac{\sigma_{ij}}{2G} + \frac{\alpha\tau}{2G}\,\frac{d\sigma_{ij}}{dR} = \tau\,\frac{dR_{ij}}{dR} + \frac{1}{g+\alpha}R_{ij}\,, \tag{1}$$

$$R_{ij} = \varepsilon_{ij} - (1-\alpha)\frac{\sigma_{ij}}{2G}, \qquad dR = (\,dR_{ij}\,dR_{ij}\,)^{1/2}.$$

При $\alpha = 1$

$$\frac{\sigma_{ij}}{2G} + \frac{\tau}{2G}\,\frac{d\sigma_{ij}}{d\varepsilon} = \tau\,\frac{d\varepsilon_{ij}}{d\varepsilon} + \frac{1}{g+1}\varepsilon_{ij}\,,$$

$$\varepsilon_{ij} + \alpha\tau\,\frac{d\varepsilon_{ij}}{dR} = \tau\,\frac{dR_{ij}}{dR} + \frac{1+g}{(1+g)\alpha-g}R_{ij} \tag{2}$$

$$R_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2G} - (1-\alpha)\,\varepsilon_{ij},$$

При $\alpha = 1$

$$\varepsilon_{ij} + \tau\, 2G \frac{d\varepsilon_{ij}}{d\sigma} = \tau \frac{d\sigma_{ij}}{d\sigma} + (1+g)\frac{\sigma_{ij}}{2G},$$

При одноосном активном нагружении решения уравнения (1), (2) имеют асимптоту

$$\varepsilon = (1+g)\frac{\sigma}{2G} - g\tau.$$

В уравнениях (1) – (2) обозначены, как обычно, σ_{ij} - девиатор тензора напряжений, ε_{ij} – девиатор тензора деформаций, R_{ij} – девиатор вспомогательного параметрического тензора, g - константа упрочнения материала, α - малый параметр эндохронности ($0 \le \alpha \le 1$), G - модуль сдвига, τ - деформационный предел текучести материала.

2. Определим обобщение тензорно-параметрической эндохронной теории (1) на случай конечных деформаций и порядок действий при жестком нагружении. Пусть задано векторное уравнение движения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$, тогда известен градиент деформации $\mathbf{F} = \partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{X}$ и градиент скорости деформации $\mathbf{L} = \mathbf{F}^{\bullet}\mathbf{F}^{-1}$. После этого легко находятся тензор скорости деформации $\mathbf{D} = (\mathbf{L}+\mathbf{L}^T)/2$ и спин $\mathbf{W} = (\mathbf{L}-\mathbf{L}^T)/2$. Используя полярное разложение градиента деформации $\mathbf{F}$, имеем $\mathbf{F} = \mathbf{Q}\mathbf{u}$, где $\mathbf{Q}$ – ортогональный тензор поворота, а $\mathbf{u}$ – правый тензор удлинения. Кроме того, справедливы соотношения $\mathbf{u}^2 = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$ и $\mathbf{Q} = \mathbf{F}\mathbf{u}^{-1}$. Вводятся понятия приведенных деформаций и напряжений по формулам:

$$\mathbf{E} = \mathbf{Q}^T\varepsilon\mathbf{Q}; \qquad \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{Q}^T\mathbf{D}\mathbf{Q}; \qquad \mathbf{T} = \mathbf{Q}^T\sigma\mathbf{Q}; \qquad \dot{\mathbf{T}} = \dot{\overline{\mathbf{Q}^T\sigma\mathbf{Q}}} \tag{3}$$

Представленные определения (3) подставляются в (1) и получаем определяющие соотношения следующей структуры $|(\bullet)| = ((\bullet)(\bullet))^{1/2}$:

$$\tau\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T}\,|\,\dot{\mathbf{E}}\,| = 2G\,\tau\,\dot{\mathbf{E}} + 2G\frac{1}{1+g}\mathbf{E}\,|\,\dot{\mathbf{E}}\,|.$$

После нахождения $\mathbf{T}$ проводится операция обратной свертки слева и справа по формуле $\mathbf{Q}(\bullet)\mathbf{Q}^T$ и определяется тензор напряжений σ. (Подчеркнем, что заданным считается тензор $\mathbf{D}$ и лишь затем находится тензор ε).

3. При мягком нагружении задается тензор скорости напряжений $\mathbf{P} = \sigma^{\bullet}$, а значит и тензор напряжений σ. Формально вводится градиент напряжений $\mathbf{F}_\sigma$, приводящий к заданному тензору скоростей напряжений $\mathbf{P} = (\mathbf{L}_\sigma+\mathbf{L}_\sigma^T)/2$, причем $\mathbf{L}_\sigma = \mathbf{F}_\sigma^{\bullet}\mathbf{F}_\sigma^{-1}$. На основе данного градиента напряжений $\mathbf{F}_\sigma$ вычисляется тензор поворота $\mathbf{Q}_\sigma=\mathbf{F}_\sigma\mathbf{u}_\sigma^{-1}$, где $\mathbf{u}_\sigma^2=\mathbf{F}_\sigma^T\mathbf{F}_\sigma$. Вновь вводятся приведенные напряжения и деформации по формулам, аналогичным (3):

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}_\sigma^T\sigma\mathbf{Q}_\sigma; \qquad \dot{\mathbf{T}} = \mathbf{Q}_\sigma^T\mathbf{P}\mathbf{Q}_\sigma, \qquad \mathbf{E} = \mathbf{Q}_\sigma^T\varepsilon\mathbf{Q}_\sigma; \qquad \dot{\mathbf{E}} = \dot{\overline{\mathbf{Q}_\sigma^T\varepsilon\mathbf{Q}_\sigma}}, \tag{4}$$

которые подставляются в определяющие соотношения (2). Тогда

$$2G\,\tau\,\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{E}}\,|\dot{\mathbf{T}}| = \tau\,\dot{\mathbf{T}} + \frac{1+g}{2G}\,\dot{\mathbf{T}}\,|\dot{\mathbf{T}}|.$$

После вычисления деформаций **E** проводится заключительная операция свертки слева и справа по тензору поворота $\mathbf{Q}_\sigma(\bullet)\mathbf{Q}_\sigma^{\mathrm{T}}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 99-01-00667).

Список литературы.

1. Ю.И.Кадашевич, С.П.Помыткин. Анализ эндохронных вариантов теории пластичности для конечных деформаций//Науч. труды II международ. семинара «Современные проблемы прочности» им. В.А.Лихачева. 5-9 октября 1998 г., Старая Русса. В 2-х томах. Новгород, 1998. Т.2. С.154-158.
2. Ю.И.Кадашевич, С.П.Помыткин. Анализ эндохронных вариантов теории неупругости уплотняемых материалов // Механизмы деформации и разрушения перспективных материалов: труды XXXV семинара «Актуальные проблемы прочности» 15-18 сентября 1999 г., Псков. В 2-ч частях. Ч.II. С.582-586.