УДК.539.374.1

КРИТЕРИИ МАКРОРАЗРУШЕНИЯ ДЛЯ ДВУХ ТИПОВ НЕОДНОРОДНЫХ СТРУКТУР

А. М. Авдеенко

Московский институт стали и сплавов (Технологический университет)
Россия, г. Москва, Ленинский пр-т 4

В формализме континуального интегрирования рассматривается алгоритм построения неравновесного потенциала модели разрушения среды с микроструктурой.

Пластическая деформация сопровождается и завершается разрушением. Неоднородности пластического течения делают возможным возникновение "элементарных объектов" разрушения – ямок вязкого излома, фасеток скола и зернограничного разрушения. Далее процесс переходит от разрушения элемента микроструктуры через многие трещины мезомасштаба к одной макротрещине, подавляющей рост остальных. Исходная среда также неоднородна — статистика частиц второй фазы, пор, ослабленных сегрегациями границ зерен определяет момент потери устойчивости пластического течения, условия и энергетические параметры разрушения [1…3].

Построению статистической модели разрушения нелинейных сред с локальными неоднородностями посвящена предложенная работа.

Определим локальное разрушение в масштабе v_l как скачок поля смещений A^f_μ на поверхности структурного элемента. Суммарное смещение A_μ — сумма полного (упругого + пластического) смещения структурного элемента A^c_μ и скачка на поверхности A^f_μ совместно, поэтому для любого замкнутого контура l, пересекающего поверхность v_l, можно записать

$$\oint A_{\mu,v}dx^v = \int_S (e^{vn}_\mu A^c_{v,nk} + e^{vn}_\mu A^f_{v,nk})ds^k = 0,$$

где e^{vn}_μ — тензор Леви–Чивиты, ds_k — элемент поверхности, натянутый на контур l.

Это соотношение справедливо всегда, если $e^{vn}_\mu A^c_{v,nk} + e^{vn}_\mu A^f_{v,nk} = 0$, что позволяет ввести тензор локальных повреждений в виде $\alpha_{\mu k} = e^{vn}_\mu A^f_{v,nk}$ и связать его с полем A^c_μ соотношением $\alpha_{\mu k} = -e^{vn}_\mu A^c_{v,km}$. Отсюда полная корреляционная функция определяется как

$$G^{m..q}_{2k}(r_i) = <\alpha^{mn}(r_1)..\alpha^{pq}(r_{2k})> = e^m_{ik}\nabla^l...e^p_{js}\nabla^s R^{i..s,c}_{2k}(r_i).$$

Корреляционные функции совместной деформации выражаются стандартным образом: $R^c_{2k,\mu...\nu}(r_i)=\frac{1}{Z}\int A^c_{\mu,p}...A^c_{q,\nu}f^c[A_\mu]dA_\mu$. Функционал плотности распределения совместной деформации $f^c[A_\mu]$ может быть получен континуальным интегрированием по поверхности в многообразии полей, удовлетворяющих условию сохранения $\alpha_{\mu k,\mu}=0$:

$$f^c[A_\mu]=\int C[A_\mu]f[A_\mu]\delta[\alpha_{\mu k,\mu}]dA_\mu,$$

где $\delta[\alpha_{\mu k,\mu}]=\prod_{r\subset\Omega_{di}}\delta(\alpha_{\mu k,\mu}(r_i))$ — дельта-функционал, $C[A_\mu]$ — функционал нормировки, определяемый соотношением $C[\dot{A}_\mu]\cdot\int\delta[\alpha_{\mu k,\mu}]dn=1$.

В этом выражении $dn=\prod_{\substack{k\\ r\subset\Omega_{di}}}dn_k(r_i)$ — мера на поверхности $\alpha_{\mu k,\mu}=0$, параметризованная инфинитизимельным преобразованием $A_\mu\to A_\mu+t_\mu$. Отсюда следует: $C[A_\mu]\cdot\int\prod_{\substack{\nu\\ r_i\subset\Omega_d}}\delta(-e^{\nu n}_\mu t^{\mu}_{\nu,kn}(r_i))dt^\nu(r_i)=1$ или $C[A_\mu]=\det L=\prod_{\substack{k\\ r_i\subset\Omega_d}}L_{kk}(r_1-r_2)$, где оператор $L_{kk}(r_1-r_2)=e^{\nu n}_\mu e^{st}_\nu\nabla^2\nabla_1...\nabla_t\delta(r_1-r_2)$ не зависит от переменной A_μ.

Поэтому $f^c[A_\mu]=\det L\cdot f[A_\mu]$ и, следовательно, функционал плотности совместной деформации совпадает с исходным $f[A_\mu]$ с точностью до аддитивного и поэтому несущественного множителя. Индекс “с” в дальнейшем опускаем.

Определим критерий макроразрушения. Полюс $+-i\xi_*^{-1}$ двухточечной корреляционной функции тензора повреждений $G_2^{m...q}(p)$ совпадает с полюсом полной корреляционной функции флуктуаций полей деформации $R_2^{\mu...\nu}(p)$:

$p_*=+-i\xi^{-1}=+-i(\lambda^2)^{\frac{1}{2}}$, где $\lambda^2=V_2(p=0,\theta)$ — полная вершина второго порядка флуктуаций полей деформации, θ — безразмерный модуль упрочнения, параметризованный процессом нагружения [4].

Условие макроразрушения — скачок поля смещения с бесконечным интервалом корреляции — естественно определить как полюс $R_2^{\mu...\nu}(p)$ при $\lambda^2\to0$ или из соотношения $\lim_{p\to0}V_2(p,\theta)=0$ [5].

Решение этого уравнения относительно θ — величина θ_c — параметризует условие макроразрушения через безразмерный модуль упрочнения вдоль траектории нагружения, причем для простого (пропорционального) процесса величина однозначно связана с напряжением и деформацией макроразрушения.

Рассмотрим систему с дельта — коррелированной неоднородностью концентрацией N_0 и дисперсией $\Delta=\eta^2N_0(1-N_0)$, где $\eta=\frac{G_1-G_2}{G_2}$ — “мощность” неоднородности, G_1 и G_2 модули сдвига среды и частицы соответственно [6].

Пусть $\overline{\Delta}(\theta)$, $\overline{g}_4(\theta)$ — полная дисперсия неоднородностей и эффективное взаимодействие, параметризованное безразмерным модулем упрочнения — решения системы ренормгрупповых уравнений [7] в состоянии $\theta<1$ нужном порядке теории возмущений. В исходном состоянии $\theta \to 1 : \overline{g}_4(\theta) = g_4$, $\overline{\Delta}(\theta) = \Delta$.

Подстановка этих решений в выражение для $V_2(p,\theta)$ при $p^2 \to 0$ дает:

$$V_2(\theta, p=0) = \mu^2\theta(1+\nu(\theta)\ln\theta),$$

где $\overline{\nu}(\theta) = -a_1\overline{g}_4(\theta) + a_2\overline{\Delta}(\theta)$, $a_1, a_2, d_1.....$ — топологические коэффициенты, возникающие при вычислении полных корреляционных функций.

Тогда:

$$\theta_c(g_4, \Delta) = e^{-\frac{1}{\overline{\nu}_c(g_4,\Delta)}}. \tag{1}$$

В общем случае возможно численное решение этого уравнения. Однако, в ряде случаев, во втором порядке теории возмущений могут быть проведены аналитические оценки.

Для асимптотического поведения первого рода $(\frac{\Delta}{g_4} < c_2^{-1})$ во втором порядке теории возмущений

$$\overline{\nu}(\theta) = (a_2 - a_1 c_1)\overline{\Delta}(\theta),$$

где $\overline{\Delta}(\theta) = \Delta(1 + d_1\Delta\ln\theta)^{-1}$.

В этом случае уравнение разрешается в виде:

$$\theta_c = e^{-\frac{1}{q\Delta}},$$

где $q = d_1 + a_2 - c_1 a_1 > 0$. В трехмерной системе $n = d = 3$ величина $q = 2{,}13...$

Для асимптотического поведения второго рода $(\frac{\Delta}{g_4} < c_2^{-1})$ при Δ=0 (N_0 =0) достаточно рассмотреть первое ренормгрупповое уравнение в порядке g_4^3. Оно имеет неподвижную точку $g_4^c = -\frac{b_1}{b_2}$, подстановка которой дает:

$$\theta_c = e^{-\frac{1}{\nu_c}},$$

где $\nu_c = a_1 g_4^c$.

Для n = d = 3: $\theta_c = 1.66...10^{-3}$. Величина θ_c дает верхнюю оценку прочностных свойств среды, разрушение в которой развивается по второму типу. Нижняя оценка для локально-неоднородной среды следует из уравнения границы области второго типа:

$$\theta_c^{max}(\Delta) = e^{-\frac{1}{q'\Delta}},$$

где $q' = a_1 + a_2 - c_2 a_1$.

Для трехмерного случая q'= 2,02.... Наблюдаемые значения безразмерного модуля упрочнения параметризующего макроразрушение должны лежать в области $e^{-\frac{1}{\nu_c}} < \theta_c^{max} < e^{-\frac{1}{q'\Delta}}$ и могут быть получены численным решением.

Аналитические оценки возможны в областях $|g_4^c| \approx \Delta$ либо $(g_4^c)^2 \approx \Delta$. В первом случае достаточно в выражении для полной дисперсии неоднородностей $\overline{\Delta}(\theta) = \Delta - d_1\Delta^2\ln\theta$ заменить $\theta \to \theta_c(\Delta = 0)$, тогда имеем:

$$\theta_c(\Delta) = e^{-\frac{1}{\nu_c + q_1(\Delta)}},$$

где $q_1(\Delta)=a_2\Delta(1+\frac{d_1}{\nu_c}\Delta)$.

Необходимые ограничения для величины Δ: $\Delta\le\frac{\nu_c}{d_1}$. В области $N_0<<1$ (в системе пор при $N_0<<0,16$) разложение показателя экспоненты в ряд дает:

$$\theta_c(N_0)=\theta_c e^{\frac{\eta^2 a_2 N_0}{\nu_c^2}}$$

Если "классическая" траектория активного нагружения аппроксимируется степенным выражением $\sigma=\sigma_0 s^m$, то истинная деформация макроразрушения s_c экспоненциально убывает с ростом концентрации пор:

$$s_c(N_0)=s_1 e^{-aN_0},$$

где $s_1=\left(\frac{\theta_c}{m\sigma_0}\right)^{\frac{1}{m-1}}$, $a=\frac{a_2}{(1-m)\nu_c^{\,2}}$.

Во втором случае $\left(g_4^c\right)^2\approx\Delta$ необходимо учесть слагаемое $\approx g_4^2$ в выражении для полной вершины третьего порядка $\overline{L}^{\mu...\nu}(\theta)$ (свободная вершина в состоянии s→ +0: $L^{\mu...\nu}=T_2^{\mu...\nu}\mu^2$). В нагруженном состоянии соответствующий континуальный интеграл сводится к выражению:

$$J_5=d_2\overline{g}_4^2(\theta)\int R_{20}^2(q)R_{20}k)R_{20}(q-k)dqdk,$$

где d_2 — топологический коэффициент, $\overline{g}_4(\theta)$ — эффективное взаимодействие флуктуаций полей деформации во втором порядке, g_4 — решение первого ренормруппового уравнения при $\Delta=0$.

Регуляризованное значение $J_3(reg)$ имеет вид: $J_3(reg)=d_2\overline{g}_4^2(\theta)\ln\theta$ и соответствующее выражение для полной вершины:

$$\theta\frac{d\overline{L}(\theta)}{d\theta}=\mu^2 d_2\overline{g}_4^2(\theta).$$

Его решение $\overline{L}(\theta)=\mu^2\theta^{-d_2\overline{g}_4^2}$ после замены $\theta\to\theta_c$, $g_4,\overline{g}_4(\theta)\to g_4^c$ дает: $\overline{L}(\theta_c)=\mu^2 e^{\frac{d_2 b_2}{d_1 b_1}}$ и тогда $\theta_c(\Delta)=e^{-\frac{1}{\nu_c+q_1(\Delta)}}$, где величина $q_1(\Delta)=a_2 e^{-\frac{d_2 b_2}{d_1 b_1}}\Delta$, причем при $n=d=3$: $q_1(\Delta)\cong1{,}34\Delta$.

В обоих случаях, если $N_0\to0$, то $\theta_c(\Delta)\to\theta_c>0$, что принципиально отличается от условия макроразрушения для асимптотического поведения первого рода.

Таким образом, построен производящий функционал полей деформации модели нелинейного псевдоконтинуума с локальными неоднородностями – порами или частицами второй фазы. Локальное разрушение определено как скачок поля разрушения на границе структурного элемента. Производящий функционал флуктуаций полей разрушения определен континуальным интегрированием производящего функционала флуктуаций суммарной деформации по полям совместной (упругой + пластической) деформации.

Установлено существование двух типов асимптотического поведения среды с локальными неоднородностями. Для первого типа характерна большая дисперсия локальной неоднородности и положительное (либо малое отрицательное) взаимодействие флуктуаций полей деформации; асимптотическому поведению второго рода соответствует отрицательное взаимодействие флуктуаций полей деформации и малая дисперсия локальной неоднородности. Каждому типу соответствует свое условие макроразрушения, определяемое через полюс полной корреляционной функции флуктуаций полей разрушения с бесконечным интервалом корреляций.

Критерий макроразрушения может быть параметризован через безразмерный модуль упрочнения вдоль классической траектории; его величина зависит от дисперсии локальной неоднородности. Для пропорционального нагружения полученные соотношения позволяют определить напряжение и деформацию макроразрушения. Для дельта-коррелированной неоднородности ее дисперсия определяется объемной долей и "мощностью" η. Для поры $\eta = -1$, для частиц обычно $|\eta| < 1$, например, для зернистого цементита в ферритной матрице (модуль Юнга цементита E = 250…260 ГПа, феррита E = 90 ГПа) η = 0,25…0,30. Учет следующих порядков теории возмущений связан с эффектами взаимной корреляции в расположении локальной неоднородности т. н. кластеризацией. Рассмотрение этих поправок – предмет следующей работы.

Список литературы

1. Владимиров В. И., Романов А.Е. Дисклинации в кристаллах. СПб.: Наука, 1986. 223 с.
2. Рыбин В.В. Большие пластические деформации и разрушение металлов М.: Мет. 1986. 224 с.
3. Лихачев В. А., Малинин В. Г. Структурно-аналитическая теория прочности. СПб.: Наука, 1993. 471 с.
4. Авдеенко А. М. Кузько Е.И. Разрушение – как самоорганизация с вырождением размерности // ДАН РФ, 1997, Т. 355, № 1. С.34 .
5. Авдеенко А. М. Скейлинг структурно-неоднородных сред // Известия АН СССР, Металлы. 1992. № 2. С.64-67.
6. Авдеенко А.М., Крупин Ю.А. Флуктуационная модель потери устойчивости пластического течения высокомодульного композиционного материала Al-SiC// Механика композиционных материалов. 1999. № 4. С.65-76
7. Авдеенко А.М. Неустойчивость пластической деформации и разрушения. Часть 1. Синтез диаграмм деформации локально неоднородной структуры.// ПМТФ, 2000. № 4.