

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КРИВЫХ БЕЗЬЕ ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОСНОВНОЙ КРИВОЙ НАМАГНИЧИВАНИЯ МАГНИТОМЯГКИХ МАТЕРИАЛОВ

маг. физ.-мат. наук Скурту Н.Т., докт. техн. наук Брановицкий И.И.

ГНУ "Институт прикладной физики НАН Беларуси", г. Минск

Различные этапы жизненного цикла электрических машин, в том числе проектирование и диагностика, получают качественно новый уровень сопровождения при использовании математического моделирования. Адекватная модель позволяет минимизировать затраты на оптимизацию конструкции, повысить КПД готового изделия, а также увеличить информативность различных видов диагностики (посредством совместного использования данных моделирования и данных реальных аппаратных испытаний устройств).

На сегодняшний день, математические модели намагничивания и перемангничивания, большинство из которых являются представлениями на основе элементарных и трансцендентных функций [2] либо эмпирико-статистическими [1], не обладают одновременно тремя качествами: гибкостью для описания различных направлений динамики гистерезиса, равномерностью ошибки и простотой. Таким образом, необходимо развитие подходов к описанию гистерезиса, позволяющих построение моделей, свободных от вышеприведенных недостатков.

Концептуальной основой предлагаемой модели является анализ распределения кривизны у основных кривых намагничивания. Все они [4], как статические, так и динамические, имеют два экстремума кривизны, соответствующих областям нижнего и верхнего перегибов. Естественно заключить, что кривой, имеющей два экстремума кривизны и обладающей достаточной гибкостью, можно описать широкий класс гистерезисных процессов. Такими кривыми могут быть, в частности, кривые Безье, на основе полиномов Бернштейна. Являясь параметрическими и задаваемыми точками, находящимися вне экспериментальных данных, они позволяют получить более высокий уровень гибкости представления, по сравнению с методами на основе точек, принадлежащих данной кривой. Геометрически, точки, не лежащие на кривой, управляют распределением кривизны, позволяя оперировать с широчайшим классом кривых. Кроме того, в процессе определения центров кривизны, соответствующих минимальной ошибке, форма кривой Безье хорошо угадывается по расположению грани своей оболочки, чего нельзя сказать, например, о сплайнах в явной форме.

В общем (векторно-полиномиальном) виде кривая Безье определяется как:

$$B(t) = \sum_{i=0}^n J_{n,i}(t) P_i, \quad t \in [0, 1]. \quad (1)$$

Здесь $J_{n,i}(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$ - это i -я функция базиса Бернштейна порядка n , P_i - координаты i -й точки. В свою очередь, n , являющееся порядком определяющей Бернштейновской функции на единицу меньше количества точек определяющего многоугольника. Также можно записывать кривые Безье в более удобном для использования в системах компьютерной математики матричном виде:

$$B(t) = [F][G]. \quad (2)$$

Здесь $[F] = [J_{n,0} \ J_{n,1} \ J_{n,2} \ \dots \ J_{n,n}]$ и $[G] = [P_0 \ P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n]^T$.

Поскольку базис Безье является Бернштейновским [3], кривые Безье обладают следующими свойствами:

- функции базиса вещественны;
- степень многочлена, определяющего участок кривой, на единицу меньше количества точек соответствующего многоугольника;
- основа формы кривой повторяет очертания многоугольника;
- первая и последняя точки кривой совпадают с соответствующими точками определяющего многоугольника;
- векторы касательных в концах кривой по направлению совпадают с первой и последней сторонами многоугольника;
- кривая лежит внутри выпуклой оболочки многоугольника, т.е. внутри самого большого многоугольника, построенного по заданным точкам;
- кривая обладает свойством уменьшения вариации – т.е. пересекает любую прямую линию не чаще, чем определяющий многоугольник;
- кривая инвариантна относительно аффинных преобразований.

Также следует отметить, что положение любой из задающих точек влияет на ход всей кривой, что непосредственно вытекает из формулы (1), поскольку координаты каждой точки участвуют в формировании коэффициента при наивысшей степени полинома. Таким образом, одним из возможных вариантов локального управления кривизной является использования кратных задающих точек.

Для случая кривой, содержащей много точек, можно создавать ансамбли кратных точек, минимизируя влияние изменения координат точек, формирующих другие области. Тем не менее, это приводит к нежелательному росту степени полинома и ограничивает применение такого подхода.

Более подходящим решением является использование кривых Безье в рациональной форме. В этом случае, каждая задающая точка имеет свой вес, изменение которого не приводит к изменению степени полинома. Кроме того, значение веса может быть нецелочисленным, отрицательным и нулевым, что еще более увеличивает гибкость метода.

Рациональные кривые Безье имеют следующий общий векторно-полиномиальный вид:

$$B(t) = \frac{\sum_{i=0}^n J_{n,i}(t) P_i w_i}{\sum_{i=0}^n J_{n,i}(t) w_i}, \quad t \in [0, 1].$$

Здесь w_i – вес i -й точки, на который умножаются её координаты.

С учётом свойств кривых Безье, изложенных выше, а также опыта их исследования и построения (включающего отработку и отказ от многих ошибочных подходов), для описания ОКН предлагается использовать рациональную форму на основе функций Бернштейна четвертого порядка. На рисунке 1 показаны общий вид и расположение задающих точек для ОКН.

Координаты всех задающих точек определяются по физическим параметрам намагничивания. В частности, точка P_0 соответствует началу координат, P_4 – индукции и полю насыщения. Координаты же точек P_1 и P_3 определяются как координаты точек пересечения прямой, проходящей через точку максимума дифференциальной проницаемости $\mu_{dm} - (H_m, B_m)$ и имеющую такой же наклон, с прямой, исходящей из начала координат с наклоном, равным начальной дифференциальной проницаемости μ_{db} , и прямой, проходящей через точку индукции насыщения (H_s, B_s) с наклоном μ_{ds} , равным дифференциальной проницаемости насыщения соответственно. Точка P_2 имеет координаты (H_m, B_m) .

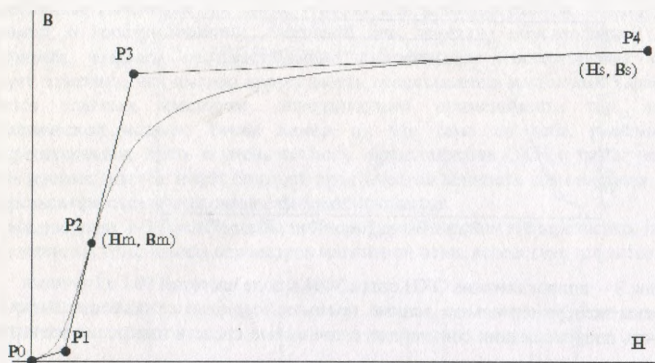


Рисунок 1 – общий вид основной кривой намагничивания и расположение задающих точек

Исходя из вышесказанного, матрица G в формуле (2) будет определяться как:

$$G_{NMK} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{B_m - \mu_{db} H_m}{\mu_{db} - \mu_{dm}} & \mu_{db} \frac{B_m - \mu_{dm} H_m}{\mu_{db} - \mu_{dm}} \\ H_m & B_m \\ \frac{B_s - B_m + \mu_{dm} H_m - \mu_{db} H_s}{\mu_{dm} - \mu_{ds}} & \mu_{dm} \frac{B_s - B_m + \mu_{dm} H_m - \mu_{db} H_s}{\mu_{dm} - \mu_{ds}} + B_m - \mu_{dm} H_m \end{bmatrix}$$

Определение весовых коэффициентов точек осуществляется посредством минимизации соответствующей функции ошибки.

На рисунках 2 и 3 представлены результаты представления ОКН для стали 3404 в квазистатическом режиме и при перемагничивании с частотой 50 Гц.

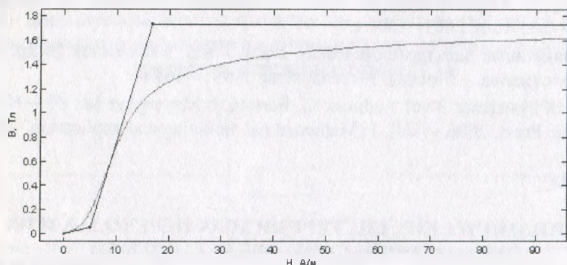


Рисунок 2 – аппроксимация ОКН стали 3404 в квазистатическом поле (точками обозначены экспериментальные данные, прямыми соединяются задающие точки)

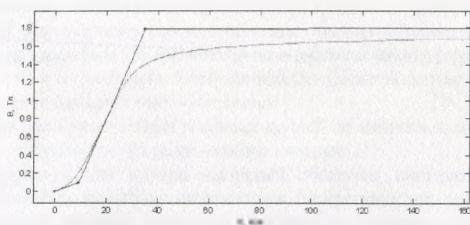


Рисунок 3 – аппроксимация ОКН стали 3404 в поле частотой 50 Гц (точками обозначены экспериментальные данные, прямыми соединяются задающие точки)

Точность аппроксимации соизмерима с точностью средств измерения магнитных величин.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о наличии у параметрического аналитического подхода к представлению процессов намагничивания и перемагничивания определенных преимуществ перед традиционными моделями на основе элементарных и трансцендентных функций. Сюда можно отнести:

- гибкость, позволяющую описывать широкий класс процессов для различных материалов;
- возможность представления динамики гистерезиса;
- отсутствие существенных осцилляций погрешности аппроксимации в пределах диапазона.

Список литературы

1. Зирка, С.Е. Моделирование переходных процессов в трансформаторе с учетом гистерезисных свойств магнитопровода/ С.Е. Зирка, Ю.И. Мороз, Е.Ю. Мороз, А.Л. Тарчуткин // *Технічна електродинаміка*. – 2010. – № 2. – С. 11–20.
2. Колесников, П.М. Введение в нелинейную электродинамику/ П.М. Колесников.- Мн.: Наука и техника, 1971. - 384 с.
3. Роджерс, Д. Математические основы машинной графики/ Д. Роджерс, Дж. Адамс. – М.: Мир, 2001. – 604 с.
4. Холоднокатаные электротехнические стали / Б.В. Молотилов [и др.]; под ред. Б.В. Молотилова. – Москва: Металлургия, 1989. – 168 с.
5. *Science of hysteresis: 3 vol.* / editors: G. Bertotti, I. Mayergoyz [at. al]. – NY: Elsevier Academic Press, 2006. – Vol. 1: Mathematical modeling and application. – 705 P.

УДК 621.317.43

О ДИНАМИЧЕСКИХ ГИСТЕРЕЗИСНЫХ ПЕРЕХОДАХ И ИХ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

маг. физ.-мат. наук Скурту И.Т., докт. техн. наук Брановицкий И.И.
ГНУ "Институт прикладной физики НАН Беларуси", г. Минск

Характеристики электрических машин как устройств, содержащих магнитную цепь, определяются её магнитными характеристиками (основной кривой