

parameters of spatial executive mechanisms are stated. It is established, that at account kinematics parameters of the centre of the robot - manipulator it is necessary to use spherical and angular systems of coordinates.

УДК 539.3

## ВЛИЯНИЕ ВНЕШНЕГО УПРУГОГО ЗАПОЛНИТЕЛЯ НА РАСЧЕТ ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Т.В. Никонова

Рассматривается задача о расчете напряженно-деформированного состояния тонкостенной цилиндрической трубы (оболочки) кругового сечения длины  $L$ , залегающей в грунте (рис. 1). Воздействие внешнего упругого заполнителя (грунта) принимаем в предположении гидростатического характера его давления на оболочку. Реакция грунта при деформации трубы учитывается в рамках классической постановки закона Гука, при этом принимается одномерная модель Фусса-Винклера [1,2].

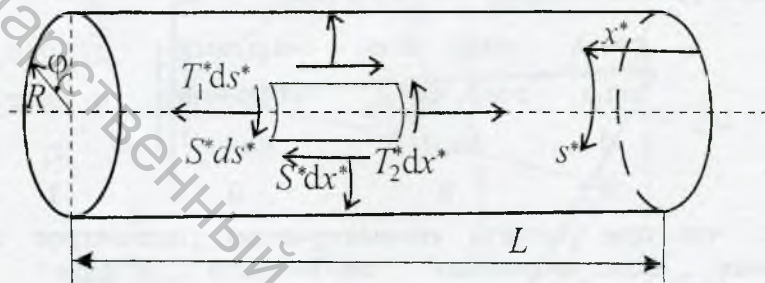


Рисунок 1 - Цилиндрическая оболочка

С учетом сделанных допущений уравнения равновесия безмоментной теории цилиндрических оболочек будут иметь вид [3]

$$\frac{\partial T_1^*}{\partial x^*} + \frac{\partial S^*}{\partial s^*} + q_1^* = 0, \quad \frac{\partial S^*}{\partial x^*} + \frac{\partial T_2^*}{\partial s^*} + q_2^* = 0, \quad T_2^* = q_n^* R - \alpha w^*, \quad (1)$$

где  $T_1^*, T_2^*, S^*$  — мембранные осевое, кольцевое и сдвигающее усилия, соответственно,  $0 \leq x^* \leq L$  — продольная координата,  $s^*$  — длина дуги на поверхности оболочки, отсчитываемая в окружном направлении,  $q_1^* = q_2^* = 0$ ,  $q_n^* = -\gamma\{H_0 + R(1 - \cos \varphi)\}$  — компоненты поверхностной нагрузки по направлениям  $x^*, s^*$  и нормали, соответственно,  $R$  — радиус оболочки,  $\alpha$  — коэффициент постели грунта,  $w^*$  — нормальное перемещение точек срединной поверхности,  $\gamma$  — удельный вес грунта,  $H_0$  — глубина залегания оболочки (расстояние от поверхности земли до верхней образующей оболочки),  $\varphi$  — угловая координата.

Принимаем граничные условия, при которых реализуется безмоментное напряженно-деформируемое состояние оболочки,

$$T_1^* = v^* = 0 \text{ при } x^* = 0, L, \quad (2)$$

где  $v^*$  — перемещение в окружном направлении.

Связи деформации с усилиями имеют вид [3]:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} = \frac{1}{Eh}(T_1^* - \nu T_2^*), \quad \frac{\partial v^*}{\partial s^*} + \frac{w^*}{R} = \frac{1}{Eh}(T_2^* - \nu T_1^*), \quad \frac{\partial u^*}{\partial s^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} = \frac{2(1+\nu)}{Eh} S^*, \quad (3)$$

где  $u^*$  — перемещение в осевом направлении,  $E$  — модуль Юнга материала оболочки,  $h$  — толщина цилиндрической оболочки,  $\nu$  — коэффициент Пуассона материала оболочки.

Перейдем к безразмерным величинам, используя следующие соотношения:

$$x^* = Rx, \quad s^* = R\varphi, \quad (u^*, v^*, w^*) = R(u, v, w), \quad (T_1^*, T_2^*, S^*) = Eh(T_1, T_2, S), \quad L = Rl. \quad (4)$$

С учетом (3),(4) из (1) получим систему уравнений в перемещениях

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\nu^2} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right) &= q_{n0} + q_{nc} \cos \varphi - \alpha_0 w, \\ \frac{1}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} + \nu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} \right) &= 0, \\ \frac{1}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{1-\nu^2} \left( \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $q_{n0} = -\gamma R^2(H_0/R+1)/(Eh)$ ,  $q_{nc} = \gamma R^2/(Eh)$ ,  $\alpha_0 = \alpha R/(Eh)$ .

Решение системы (5) будем искать в виде

$$w = w_0(x) + w_c(x) \cos \varphi, \quad u = u_0(x) + u_c(x) \cos \varphi, \quad v = v_0(x) + v_s(x) \sin \varphi. \quad (6)$$

Граничные условия (2) с учетом (3) и (6) имеют вид

$$\begin{aligned} v_0(0) = v_s(0) = v_0(l) = v_s(l) = 0, \quad u_0'(0) + \nu w_0(0) = 0, \\ u_0'(l) + \nu w_0(l) = 0, \quad u_c'(0) + \nu w_c(0) = 0, \quad u_c'(l) + \nu w_c(l) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя (6) в (5), получим систему уравнений

$$u_0''(x) + \nu v_0'(x) + w_0(x) = [q_{n0} - \alpha_0 w_0(x)](1 - \nu^2), \quad u_0''(x) + \nu w_0'(x) = 0, \quad v_0''(x) = 0 \quad (8)$$

$$\nu u_c'(x) + v_s(x) + w_c(x) = (1 - \nu^2)[q_{nc} - \alpha_0 w_c(x)], \quad (9)$$

$$2[u_c''(x) + \nu v_s'(x) + \nu w_c'(x)] + (1 - \nu)[-u_c'(x) + v_s'(x)] = 0, \quad (10)$$

$$(1 - \nu)[-u_c'(x) + v_s''(x)] + 2[-\nu u_c'(x) - v_s(x) - w_c(x)] = 0. \quad (11)$$

Решая уравнения (8) с учетом граничных условий (7), находим

$$w_0(x) = \frac{q_{n0}}{1 + \alpha_0}, \quad u_0(x) = -\frac{\nu q_{n0}}{1 + \alpha_0} x + u_{00}, \quad v_0(x) = 0, \quad (12)$$

где  $u_{00}$  — некоторая константа.

Из уравнения (11) получим

$$w_c(x) = -\frac{1+\nu}{2} u_c'(x) + \frac{1-\nu}{2} v_s''(x) - v_s(x) \quad (13)$$

и, подставив (13) в (9), находим

$$u_c'(x) = \frac{1 + \alpha_0(1 - \nu^2)}{1 + (1 + \nu)^2 \alpha_0} v_s''(x) - \frac{2(1 + \nu)\alpha_0}{1 + (1 + \nu)^2 \alpha_0} v_s(x) - \frac{2(1 + \nu)q_{nc}}{1 + (1 + \nu)^2 \alpha_0}. \quad (14)$$

Подставив (13),(14) в (10), приходим к уравнению относительно  $v_s(x)$

$$a_4 v_s^{IV}(x) + a_2 v_s''(x) + a_0 v_s(x) = f, \quad (15)$$

где

$$a_4 = 1 + \alpha_0, \quad a_2 = -2\alpha_0, \quad a_0 = \alpha_0, \quad f = -q_{nc}.$$

Общее решение уравнения (15) имеет вид

$$v_s(x) = c_1 e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x + c_2 e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x + c_3 e^{-\alpha_1 x} \cos \beta_1 x + c_4 e^{-\alpha_1 x} \sin \beta_1 x + f/a_0, \quad (16)$$

где

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{d^2 + c^2} + c}{2}}, \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{d^2 + c^2} - c}{2}}, \quad c = \frac{2\alpha_0}{1 + \alpha_0}, \quad d = \frac{\sqrt{\alpha_0}}{1 + \alpha_0},$$

$c_i$  — неизвестные константы ( $i = 1..4$ ).

С учетом (16), (13), (14) и граничных условий (7) для  $w_c(x)$ ,  $u_c(x)$ ,  $v_s(x)$  получим систему четырех линейных уравнений относительно  $c_i$  ( $i = 1..4$ ), для решения которой использована математическая среда MAPLE.

С учетом (12)-(14), (16), соотношения для возникающих мембранных усилий имеют вид

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{Eh}{v^2 - 1} [u_c''(x) + vv_s'(x) + vw_c'(x)] \sin \varphi, \\ T_1^* &= Eh [u_c'(x) + v(q_{nc} - \alpha_0 w_c(x))] \cos \varphi, \\ T_2^* &= Eh \left[ \frac{q_{n0}}{1 + \alpha_0} + (q_{nc} - \alpha_0 w_c(x)) \cos \varphi \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

По формулам (17) определены значения усилий, возникающих в срединной поверхности оболочки, залегающей в грунте на глубине  $H_0 = 4$  м. На рис. 2-4 приведены для различных углов  $\varphi$  графики распределения усилий по длине оболочки  $x$  при  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $h = 0.04946$  м,  $\nu = 0.25$ ,  $\gamma = 1.8 \cdot 10^4$  Н/м<sup>3</sup>,  $\alpha_0 = 3 \cdot 10^7$  Н/м<sup>2</sup>,  $R = 1.5$  м.

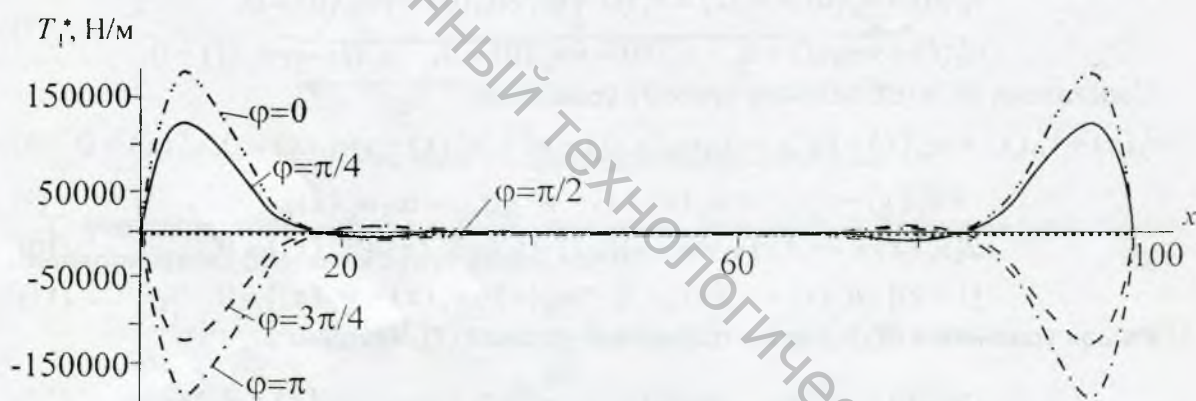


Рисунок 2 - Распределение усилия  $T_1^*$  по длине оболочки  $x$  при различных значениях угла  $\varphi$

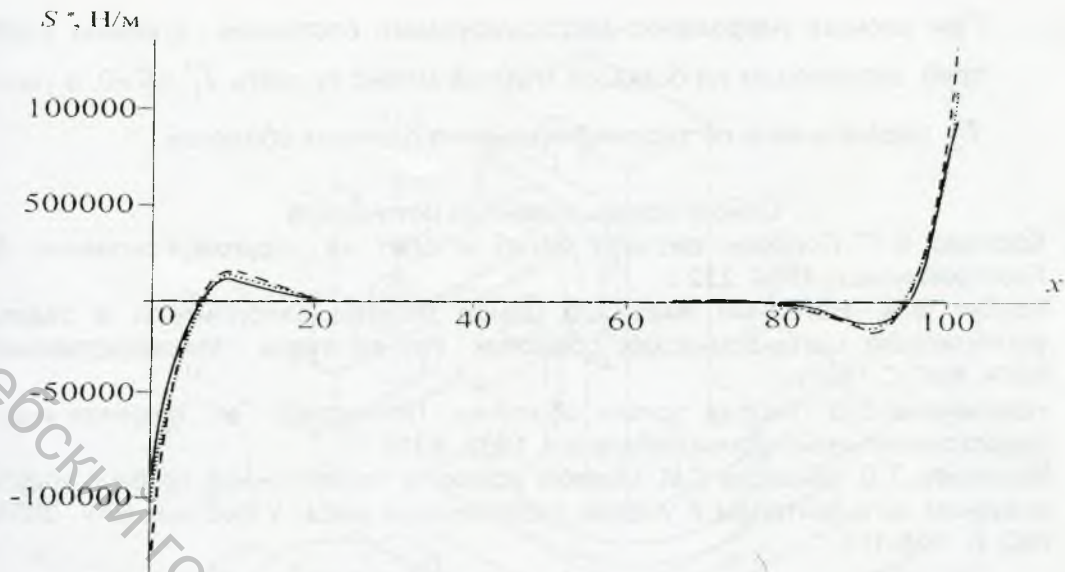


Рисунок 3 - Распределение усилия  $S^*$  по длине оболочки  $x$  при различных значениях угла  $\varphi$  (обозначения как на рис. 2)

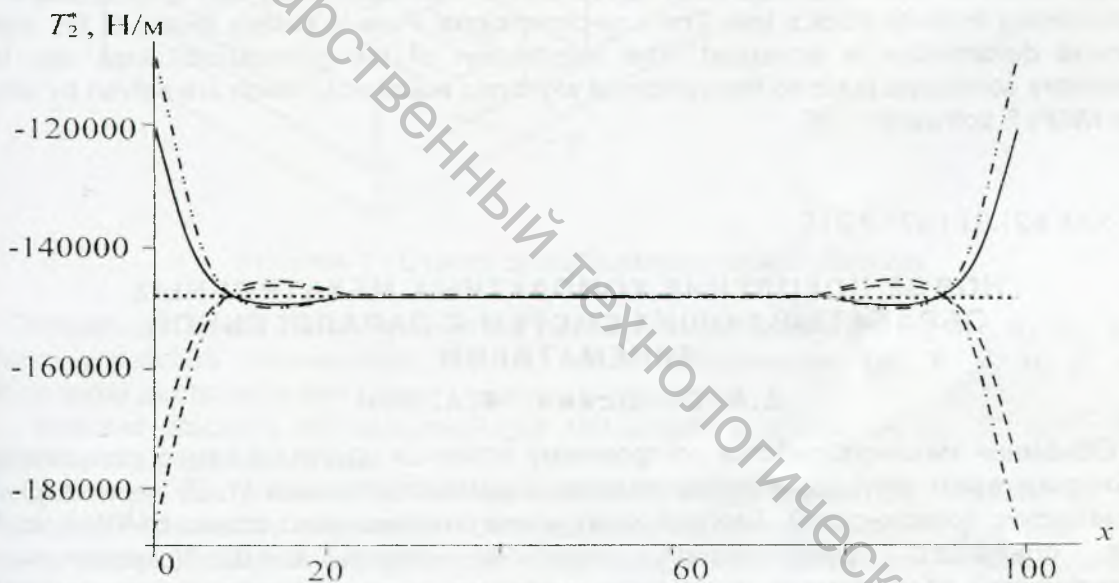


Рисунок 4 - Распределение усилия  $T_2^*$  по длине оболочки  $x$  при различных значениях угла  $\varphi$  (обозначения как на рис. 2)

#### Выводы

1. Установлено, что при принятых выше граничных условиях, усилия  $T_1^*$  и  $S^*$  являются значительными лишь у краев оболочки.
2. Наибольшее по величине сжимающее усилие  $T_2^*$  возникает у краев на нижней образующей оболочки (при  $\varphi=\pi$ ). Вдали от краев  $T_2^*$  совпадает с усилием, полученным в [4] для бесконечно длинной оболочки.
3. Зависимость мембранных усилий  $T_1^*$ ,  $T_2^*$ ,  $S^*$  на краях оболочки от угла  $\varphi$  является одинаковой для любой величины  $H_0$ .

4. При расчете напряженно-деформируемого состояния длинных труб и труб, залегающих на большой глубине можно принять  $T_1^* = S^* \approx 0$ , а усилие  $T_2^*$  рассчитывать по теории бесконечно длинных оболочек.

#### Список использованных источников

1. Корнев Б.Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. М., Госстрой-издат, 1954, 232 с.
2. Корбут Б.А., Нагорный Ю.Н. Об одной модели заполнителя в задачах устойчивости цилиндрических оболочек. Изв-во вузов, "Машиностроение", 1971, №6, С.16-21.
3. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Ленинград: Гос. союзное изд-во судостроительной промышленности, 1962, 431с.
4. Никонова Т.В., Михасев Г.И. Оценка усилий в тонкостенной трубе с упругим внешним заполнителем с учетом собственного веса. // Вестник ВГУ, 2003г., №2, С. 105-108.

#### SUMMARY

The problem on calculation of the strain-stress state of a thin cylindrical shell with elastic external filler is considered. The reaction of externally filling during deformation is considering in limits Hook's law. The one-dimensional Fuss-Winkler's model of the shell-ground deformation is accepted. The substitution of the general solutions into the boundary conditions leads to the system of algebraic equations, which are solved by using the MAPLE software.

УДК 621.01 : 621.9.015

### НОВОЕ ПОКОЛЕНИЕ КОМПАКТНЫХ МЕХАТРОННЫХ ОБРАБАТЫВАЮЩИХ СИСТЕМ С ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ КИНЕМАТИКОЙ

Д.Н. Свирский, Ф.А. Ким

Объемная механообработка по-прежнему остается одним из самых популярных технологических методов «сканирующего» формокопирования [1, 2] нерегулярных технических поверхностей. Типовая компоновка современного станка с ЧПУ (рис. 1) для объемного фрезерования подобных сверхсложных (скульптурных) поверхностей обеспечивает управляемые перемещения по девяти координатам [3, 4]. Станок включает плиту 8, на которой расположены станины 7 и 9. По станине 7 перемещаются салазки 6 с планшайбой 5, на которой установлена стойка 1. По стойке двигаются салазки 2 с планшайбой 3 и с укрепленным на ней хоботом 4. На оси этого хобота крепится вертлюг 15, около которого поворачивается бабка 14 со шпинделем 13 и фрезой. По станине 9 перемещаются салазки 10, а по ним стол 11 с планшайбой 12. Такой станок обеспечивает одно перемещение вдоль оси  $x$ , два перемещения ( $y_1, y_2$ ) вдоль оси  $y$ , одно перемещение вдоль оси  $z$ , один поворот вокруг оси  $\alpha$ , один поворот вокруг оси  $\beta$  и три поворота ( $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ) вокруг оси  $\gamma$ .

В последнее время в этой области машиностроения расширяется применение станков манипуляционного типа, построенных на механизмах параллельной структуры [5, 6], в частности, типа «гексапод». Типичный гексапод (рис. 2) выполнен на базе шести мехатронных телескопических устройств 2 поступательного перемещения, представляющих собой шариковые винтовые передачи (ШВП). Их длины изменяются регулируемые электроприводами. Величина перемещения контролируется датчиками положения. Одним концом телескопическое устройство шарнирно соединено с основанием 1 (нижней платформой), а другим (также шарнирно) — с подвижной верхней платформой 3, на которой расположен исполнительный орган (ИО), например, инструмент или измерительная головка.