

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

**к практическим занятиям
для студентов специальностей 1-36 01 01 «Технология машиностроения»
и 1-53 01 01-01 «Автоматизация технологических процессов и
производств (машиностроение и приборостроение)»
дневной и заочной на базе ссуз форм обучения**

Витебск
2019

УДК 681.5

Составители:

А.С. Соколова, А.А. Кузнецов, В.В. Мурычева

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом УО «ВГТУ», протокол № 7 от 30.09.2019.

Теория автоматического управления технологическими системами: методические указания к практическим занятиям / сост. А. С. Соколова, А. А. Кузнецов, В. В. Мурычева. – Витебск : УО «ВГТУ», 2019. – 59 с.

Методические указания являются руководством для проведения практических занятий по дисциплине «Теория автоматического управления технологическими системами». Каждое задание сопровождается необходимыми теоретическими сведениями и примерами решения.

Методические указания предназначены для студентов специальностей 1-36 01 01 «Технология машиностроения» и 1-53 01 01-01 «Автоматизация технологических процессов и производств (машиностроение и приборостроение)» дневной и заочной на базе ссуз форм обучения.

УДК 681.5

© УО «ВГТУ», 2019

СОДЕРЖАНИЕ

1 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ	4
1.1 Понятие о математической модели и передаточной функции системы	4
1.2 Частотные характеристики элементов и систем	5
Задача 1.1	6
Задача 1.2	10
2 ПРАВИЛА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ	15
2.1 Правила преобразования структурных схем	15
2.2 Запись передаточных функций и дифференциального уравнения динамики по структурной схеме системы	18
Задача 2.1	20
Задача 2.2	26
3 УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ САУ	30
3.1 Алгебраические критерии устойчивости	31
3.2 Частотные критерии устойчивости	32
Задача 3.1	35
4 МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ САУ	44
4.1 Критерий абсолютной устойчивости нелинейных систем В.М. Попова	44
4.2 Гармоническая линеаризация нелинейных элементов	46
4.3 Определение амплитуды и частоты режима автоколебаний	48
4.4 Метод И.С. Гольфарба	48
Задача 4.1	49
Задача 4.2	53

1 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ

1.1 Понятие о математической модели и передаточной функции системы

Математическая модель – это эквивалент динамического объекта, отражающий в математической форме важнейшие его свойства – законы, которым он подчиняется, связи, присущие составляющим его частям, и т. д.

Одним из способов задания математической модели объекта является составление дифференциальных уравнений, описывающих в динамике процесс преобразования входных величин объекта в выходные. При составлении дифференциального уравнения каждого элемента необходимо, прежде всего, выявить физический закон, определяющий его поведение. Математическое выражение соответствующего физического закона и является исходным дифференциальным уравнением данного элемента автоматической системы (уравнением динамики).

Математическим аппаратом, позволяющим представлять дифференциальные уравнения в виде степенных алгебраических уравнений, является преобразование Лапласа. Преобразование Лапласа позволяет ввести некоторую обобщенную модель объекта или системы в виде передаточной функции $W(p)$.

Передаточная функция представляет собой отношение изображения по Лапласу выходного сигнала элемента САУ (объекта, системы в целом) к изображению по Лапласу входного сигнала при нулевых начальных условиях.

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}, \quad (1.1)$$

где a_i, b_j – числовые коэффициенты полинома знаменателя и числителя соответственно; p – оператор Лапласа; $Y(p)$ – изображение по Лапласу выходного сигнала; $X(p)$ – изображение по Лапласу входного сигнала.

При нулевых начальных условиях уравнение звена в изображениях, соответствующее передаточной функции (1.1), записывается в виде:

$$[a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0] Y(p) = [b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0] X(p). \quad (1.2)$$

Дифференциальное уравнение можно записать по уравнению в изображениях, заменой оператора p на $\frac{d}{dt}$.

$$\begin{aligned}
 a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\
 = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t).
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

1.2 Частотные характеристики элементов и систем

Важную роль при описании линейных систем играют частотные характеристики, отражающие реакцию объекта на гармонический сигнал.

Частотные характеристики могут быть легко получены, если известен комплексный коэффициент передачи системы $W(j\omega)$, который представляет собой отношение значений сигналов на выходе и на входе элемента при подаче на вход гармонического сигнала:

$$\begin{aligned}
 W(j\omega) = \frac{A_{ВЫХ}(\omega) e^{j\varphi_{ВЫХ}(\omega)}}{A_{ВХ}(\omega) e^{j\varphi_{ВХ}(\omega)}} = \frac{A_{ВЫХ}(\omega)}{A_{ВХ}(\omega)} e^{j(\varphi_{ВЫХ}(\omega) - \varphi_{ВХ}(\omega))} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = \operatorname{Re}(\omega) + j \operatorname{Im}(\omega); \tag{1.4} \\
 A(\omega) = \sqrt{\operatorname{Re}^2(\omega) + \operatorname{Im}^2(\omega)}; \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(\omega)}{\operatorname{Re}(\omega)}.
 \end{aligned}$$

Если задана передаточная функция элемента $W(p)$, то для получения комплексного коэффициента передачи производят замену оператора Лапласа на оператор Фурье $p \rightarrow j\omega$, где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Различают следующие частотные характеристики:

1. Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) – изменение соотношения амплитуд $A(\omega) = \frac{A_{ВЫХ}}{A_{ВХ}}$ при изменении частоты $0 < \omega < \infty$.

2. Фазо-частотная характеристика (ФЧХ) отражает изменение фазового сдвига $\varphi(\omega) = \varphi_{ВЫХ} - \varphi_{ВХ}$ при изменении частоты $0 < \omega < \infty$.

3. Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) – траектория движения конца вектора комплексного коэффициента передачи $W(j\omega)$, при изменении частоты $0 < \omega < \infty$.

4. Действительная часть комплексного коэффициента передачи $\operatorname{Re}(\omega)$ называется вещественной частотной характеристикой (ВЧХ).

5. Мнимая часть комплексного коэффициента передачи $\operatorname{Im}(\omega)$ называется мнимой частотной характеристикой (МЧХ).

6. Вместо АЧХ чаще строят *логарифмическую амплитудно-частотную характеристику (ЛАЧХ)*, представляющую собой зависимость $L(\omega) = 20 \lg(A(\omega))$. При этом по оси абсцисс откладывают $\lg \omega$.

ЛАЧХ строят на одной координатной сетке с ФЧХ.

Для одноконтурной системы, если она не содержит в своем составе неминимально-фазовых звеньев, при построении ЛАЧХ и ФЧХ можно руководствоваться следующими правилами:

1. Определяется общий (эквивалентный) коэффициент усиления системы K и вычисляется $20 \lg K$.

2. Определяются частоты сопряжения звеньев $\omega_i = \frac{1}{T_i}$, вычисляются $\lg \omega_i$ и наносятся на координатную плоскость вертикальные штриховые линии, соответствующие этим значениям.

3. Определяется начальный наклон ЛАЧХ системы и начальный фазовый сдвиг: если в передаточной функции нет множителя p , то начальный наклон составляет 0 дБ/дек , а начальный фазовый сдвиг $\varphi_0 = 0$; если множитель p присутствует в числителе, то начальный наклон составит $+20 \text{ дБ/дек}$, а фазовый сдвиг $-\varphi_0 = +90^\circ$; если множитель p присутствует в знаменателе, то начальный наклон составит -20 дБ/дек , а фаза $\varphi_0 = -90^\circ$.

4. Через точку $20 \lg K$ на оси ординат (на частоте $\omega = 1$ или $\lg(\omega = 1) = 0$) проводится линия с начальным наклоном от $\omega = 0$ ($\lg(\omega = 0) = -\infty$) до пересечения с первой сопрягающей частотой.

5. Далее при достижении каждой сопрягающей частоты наклон будет изменяться на $+20 \text{ дБ/дек}$ – если множитель $(T_i p + 1)$ в числителе и на -20 дБ/дек – если сомножитель $(T_i p + 1)$ в знаменателе; слагаемые фазового сдвига, соответствующие каждому множителю $(T_i p + 1)$ для числителя $\varphi_i = +\arctg(T_i \omega)$ и для знаменателя $-\varphi_i = -\arctg(T_i \omega)$.

Примечание. Необходимо также учитывать степень, с которой множители входят в передаточную функцию, показатель степени будет являться множителем при определении соответствующего наклона (либо его изменения) и слагаемого фазового сдвига.

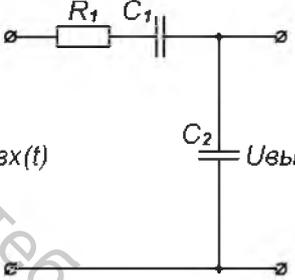
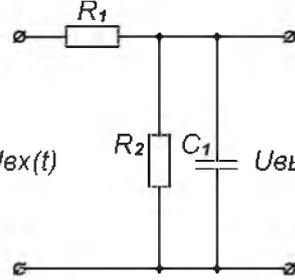
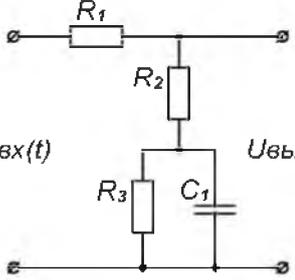
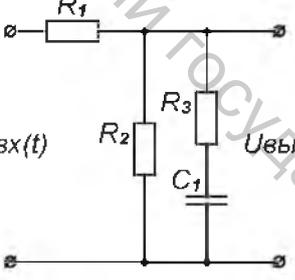
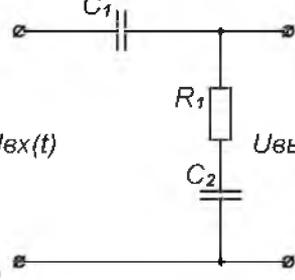
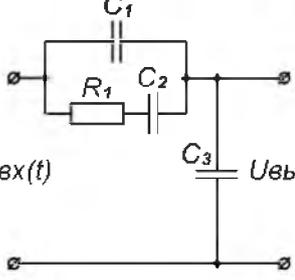
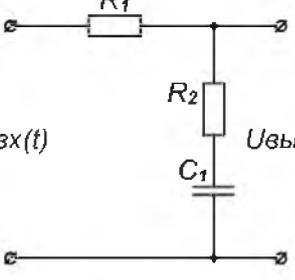
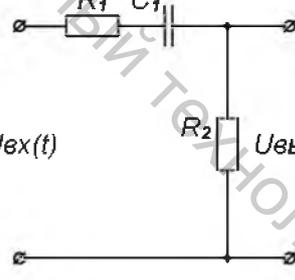
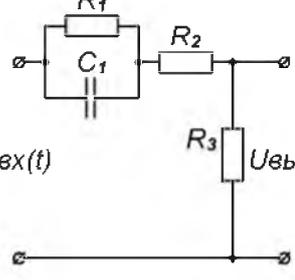
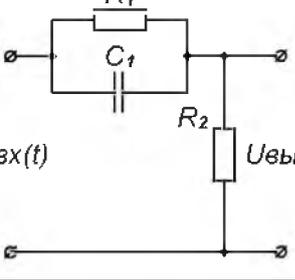
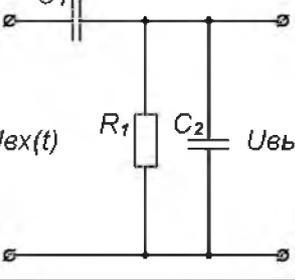
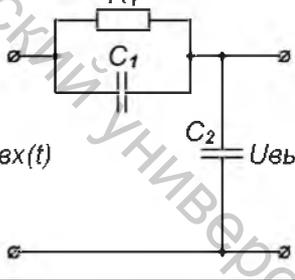
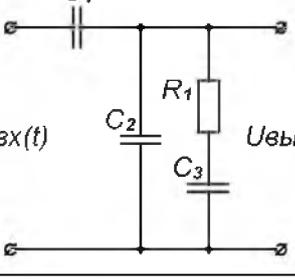
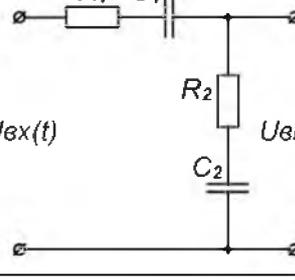
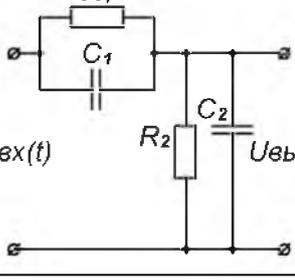
6. Наличие в передаточной множителе $e^{-p\tau}$ не влияет на ЛАЧХ, но ему соответствует слагаемое фазового сдвига $\varphi_i = -57,3^\circ \omega \tau$.

7. ФЧХ строится по выражению $\varphi(\omega) = \varphi_0 + \sum \varphi_i$.

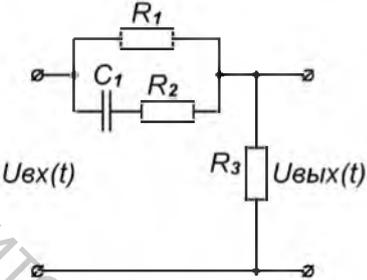
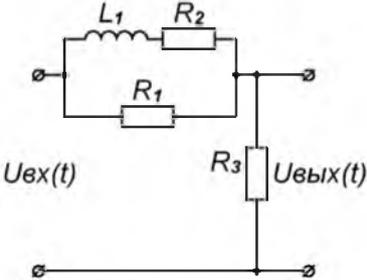
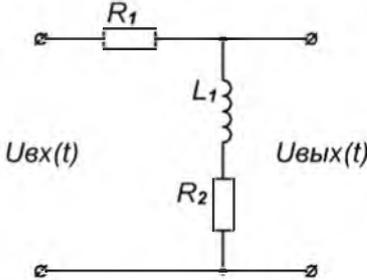
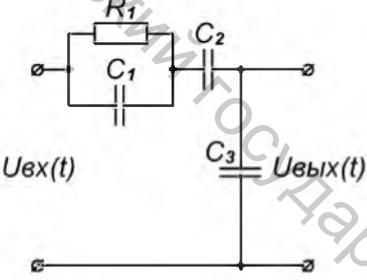
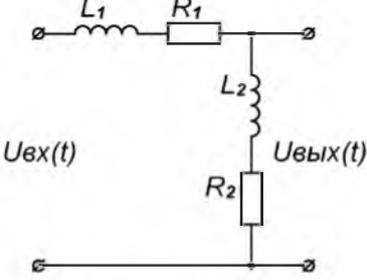
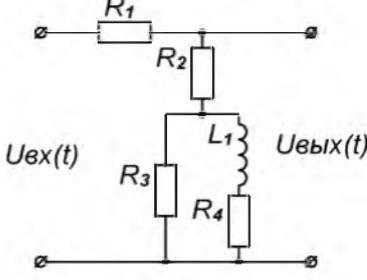
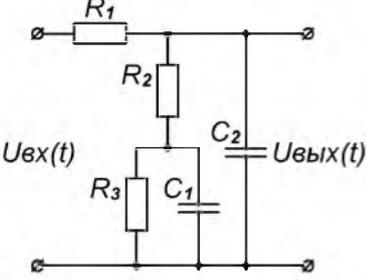
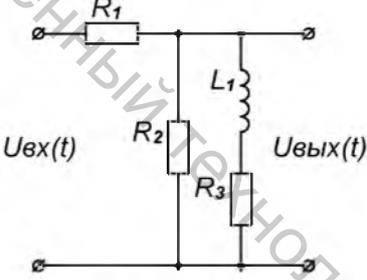
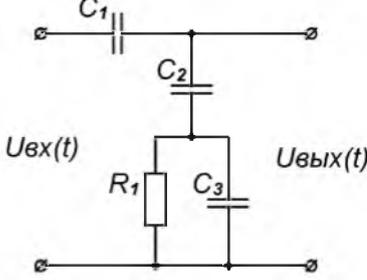
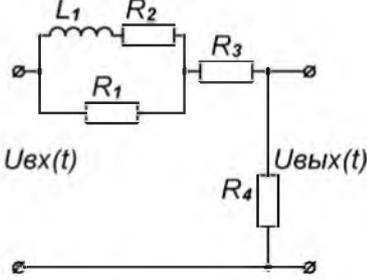
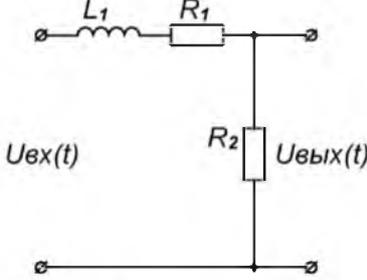
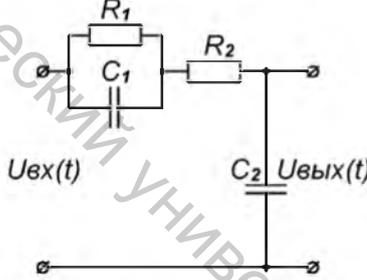
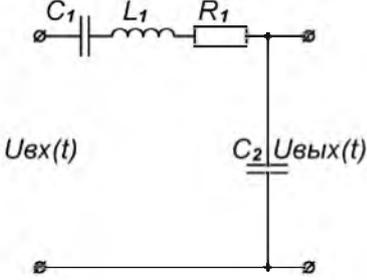
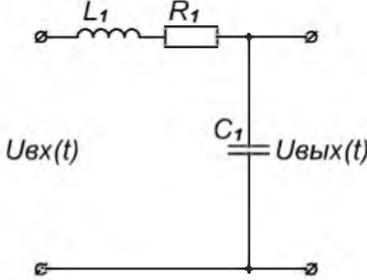
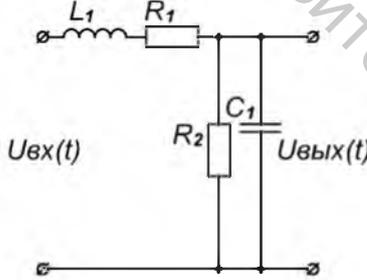
Задача 1.1

Записать передаточную функцию и уравнение динамики пассивного четырехполюсника, принципиальная электрическая схема которого представлена в таблице 1.1 (по вариантам). В случае необходимости принять $C_1 = C_2 = C_3$ и $L_1 = L_2$.

Таблица 1.1 – Принципиальные электрические схемы пассивных четырехполосников

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
 <p>$U_{вх}(t)$ $U_{вых}(t)$</p>	 <p>$U_{вх}(t)$ $U_{вых}(t)$</p>	 <p>$U_{вх}(t)$ $U_{вых}(t)$</p>
Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6
 <p>$U_{вх}(t)$ $U_{вых}(t)$</p>	 <p>$U_{вх}(t)$ $U_{вых}(t)$</p>	 <p>$U_{вх}(t)$ $U_{вых}(t)$</p>
Вариант 7	Вариант 8	Вариант 9
 <p>$U_{вх}(t)$ $U_{вых}(t)$</p>	 <p>$U_{вх}(t)$ $U_{вых}(t)$</p>	 <p>$U_{вх}(t)$ $U_{вых}(t)$</p>
Вариант 10	Вариант 11	Вариант 12
 <p>$U_{вх}(t)$ $U_{вых}(t)$</p>	 <p>$U_{вх}(t)$ $U_{вых}(t)$</p>	 <p>$U_{вх}(t)$ $U_{вых}(t)$</p>
Вариант 13	Вариант 14	Вариант 15
 <p>$U_{вх}(t)$ $U_{вых}(t)$</p>	 <p>$U_{вх}(t)$ $U_{вых}(t)$</p>	 <p>$U_{вх}(t)$ $U_{вых}(t)$</p>

Окончание таблицы 1.1

<p>Вариант 16</p> 	<p>Вариант 17</p> 	<p>Вариант 18</p> 
<p>Вариант 19</p> 	<p>Вариант 20</p> 	<p>Вариант 21</p> 
<p>Вариант 22</p> 	<p>Вариант 23</p> 	<p>Вариант 24</p> 
<p>Вариант 25</p> 	<p>Вариант 26</p> 	<p>Вариант 27</p> 
<p>Вариант 28</p> 	<p>Вариант 29</p> 	<p>Вариант 30</p> 

Пример решения. Записать передаточную функцию и уравнение динамики пассивного четырехполюсника, принципиальная электрическая схема которого представлена на рисунке 1.1.

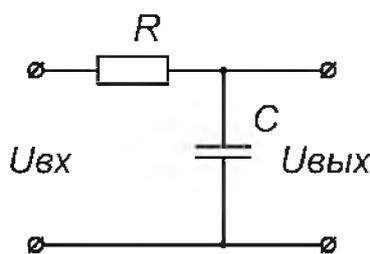


Рисунок 1.1 – Схема пассивного четырехполюсника

По закону Ома:

$$U_{BX}(p) = Z_{BX}(p) \cdot I(p);$$

$$U_{BЫX}(p) = Z_{BЫX}(p) \cdot I(p).$$

Передаточная функция четырехполюсника:

$$W(p) = \frac{U_{BЫX}(p)}{U_{BX}(p)} = \frac{Z_{BЫX}(p) \cdot I(p)}{Z_{BX}(p) \cdot I(p)} = \frac{Z_{BЫX}(p)}{Z_{BX}(p)}.$$

Запишем входное и выходное сопротивления четырехполюсника в комплексной форме:

$$Z_{BX}(p) = R + \frac{1}{pC} = \frac{pRC + 1}{pC}; \quad Z_{BЫX}(p) = \frac{1}{pC}.$$

Тогда передаточная функция четырехполюсника:

$$W(p) = \frac{Z_{BЫX}(p)}{Z_{BX}(p)} = \frac{\frac{1}{pC}}{\frac{pRC + 1}{pC}} = \frac{1}{pRC + 1}.$$

Обозначим $RC = T$:

$$W(p) = \frac{1}{Tp + 1}.$$

По передаточной функции запишем уравнение в изображениях:

$$W(p) = \frac{U_{BЫX}(p)}{U_{BX}(p)} = \frac{1}{Tp + 1} \rightarrow U_{BЫX}(p)[Tp + 1] = U_{BX}(p).$$

По уравнению в изображениях записываем дифференциальное уравнение:

$$T \frac{dU_{BЫX}(t)}{dt} + U_{BЫX}(t) = U_{BX}(t).$$

Задача 1.2

Рассчитать и построить частотные характеристик для элемента системы, передаточная функция которого задана в таблице 1.2.

Таблица 1.2 – Варианты заданий

№ варианта	Передаточная функция $W(p)$	Параметры			
		K	T_1	T_2	T_3
1	2	3	4	5	6
1	$W(p) = \frac{Kp(T_3p+1)}{(T_1p+1)(T_2p+1)}$	10	0,1	2	0,5
2	$W(p) = \frac{K(T_2p+1)}{p(T_1p+1)^2}$	17	5	0,3	
3	$W(p) = \frac{K(T_1p+1)(T_2p+1)}{p(T_3p+1)}$	50	0,5	0,1	4
4	$W(p) = \frac{K(T_1p+1)}{(T_2p+1)(T_3p+1)}$	40	0,8	0,05	5
5	$W(p) = \frac{Kp}{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)}$	12	0,1	5	40
6	$W(p) = \frac{K(T_2p+1)^2}{p(T_1p+1)}$	15	0,5	12	
7	$W(p) = \frac{Kp(T_2p+1)}{(T_1p+1)^2}$	0,2	10	0,1	
8	$W(p) = \frac{Kp(T_3p+1)}{(T_1p+1)(T_2p+1)}$	50	10	0,2	0,05
9	$W(p) = \frac{K(T_2p+1)}{p(T_1p+1)^2}$	100	25	0,8	
10	$W(p) = \frac{K(T_1p+1)(T_2p+1)}{p(T_3p+1)}$	15	10	0,4	2
11	$W(p) = \frac{K(T_1p+1)}{(T_2p+1)(T_3p+1)}$	0,1	20	0,2	1
12	$W(p) = \frac{Kp}{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)}$	40	0,05	50	2
13	$W(p) = \frac{K(T_2p+1)^2}{p(T_1p+1)}$	40	16	0,1	
14	$W(p) = \frac{Kp(T_2p+1)}{(T_1p+1)^2}$	15	0,8	15	
15	$W(p) = \frac{Kp(T_3p+1)}{(T_1p+1)(T_2p+1)}$	12	20	1	0,1
16	$W(p) = \frac{K(T_2p+1)}{p(T_1p+1)^2}$	60	0,2	4	

Окончание таблицы 1.2

1	2	3	4	5	6
17	$W(p) = \frac{K(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{p(T_3 p + 1)}$	0,5	50	15	0,2
18	$W(p) = \frac{K(T_1 p + 1)}{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}$	25	0,1	30	2
19	$W(p) = \frac{Kp}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}$	100	12	0,2	4
20	$W(p) = \frac{K(T_2 p + 1)^2}{p(T_1 p + 1)}$	25	0,2	5	
21	$W(p) = \frac{Kp(T_2 p + 1)}{(T_1 p + 1)^2}$	0,8	25	1	
22	$W(p) = \frac{Kp(T_3 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$	20	0,5	5	0,02
23	$W(p) = \frac{K(T_2 p + 1)}{p(T_1 p + 1)^2}$	25	1	50	
24	$W(p) = \frac{K(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{p(T_3 p + 1)}$	20	0,1	20	1
25	$W(p) = \frac{K(T_1 p + 1)}{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}$	18	0,5	4	16
26	$W(p) = \frac{Kp}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}$	2	1	20	0,04
27	$W(p) = \frac{K(T_2 p + 1)^2}{p(T_1 p + 1)}$	10	0,05	1	
28	$W(p) = \frac{Kp(T_2 p + 1)}{(T_1 p + 1)^2}$	25	0,4	2	
29	$W(p) = \frac{Kp(T_3 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$	30	2	10	0,2
30	$W(p) = \frac{K(T_2 p + 1)}{p(T_1 p + 1)^2}$	200	12	0,5	

Пример решения. Необходимо рассчитать и построить все виды частотных характеристик для элемента системы, передаточная функция которого $W(p) = \frac{K(T_1 p + 1)}{p(T_2 p + 1)}$, где $K = 10$, $T_1 = 0,2c$, $T_2 = 2c$.

Заменяя в передаточной функции элемента оператор Лапласа на оператор Фурье ($p \rightarrow j\omega$), получим комплексный коэффициент передачи элемента и выделим в нем вещественную и мнимую части:

$$W(j\omega) = \frac{K(T_1 j\omega + 1)}{j\omega(T_2 j\omega + 1)} = \frac{-jK(T_1 j\omega + 1)(-T_2 j\omega + 1)}{j\omega(-j)(T_2 j\omega + 1)(-T_2 j\omega + 1)} = \frac{K(-jT_1 T_2 \omega^2 + (T_1 - T_2)\omega - j)}{\omega(T_2^2 \omega^2 + 1)} =$$

$$= \frac{K(T_1 - T_2)}{T_2^2 \omega^2 + 1} - j \frac{K(T_1 T_2 \omega^2 + 1)}{\omega(T_2^2 \omega^2 + 1)}.$$

Выражение для построения вещественной частотной характеристики (ВЧХ):

$$\operatorname{Re}(\omega) = \frac{K(T_1 - T_2)}{T_2^2 \omega^2 + 1} = \frac{10(0,2 - 2)}{2^2 \omega^2 + 1} = -\frac{18}{4\omega^2 + 1}.$$

Выражение для построения мнимой частотной характеристики (МЧХ):

$$\operatorname{Im}(\omega) = -\frac{K(T_1 T_2 \omega^2 + 1)}{\omega(T_2^2 \omega^2 + 1)} = -\frac{10(0,2 \cdot 2\omega^2 + 1)}{\omega(2^2 \omega^2 + 1)} = -\frac{4\omega^2 + 10}{\omega(4\omega^2 + 1)}.$$

Выражение для построения амплитудно-частотной характеристики (АЧХ):

$$A(\omega) = \sqrt{(\operatorname{Re}(\omega))^2 + (\operatorname{Im}(\omega))^2} = \sqrt{\left(\frac{K(T_1 - T_2)}{T_2^2 \omega^2 + 1}\right)^2 + \left(-\frac{K(T_1 T_2 \omega^2 + 1)}{\omega(T_2^2 \omega^2 + 1)}\right)^2} =$$

$$= \frac{K\sqrt{T_1^2 T_2^2 \omega^4 + T_1^2 \omega^2 + T_2^2 \omega^2 + 1}}{\omega(T_2^2 \omega^2 + 1)} = \frac{K\sqrt{(T_1^2 \omega^2 + 1)(T_2^2 \omega^2 + 1)}}{\omega(T_2^2 \omega^2 + 1)} = \frac{K}{\omega} \cdot \frac{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}}{\sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}} = \frac{10}{\omega} \cdot \sqrt{\frac{0,04\omega^2 + 1}{4\omega^2 + 1}}.$$

Подставим различные значения частоты ω в выражения частотных характеристик и сведем результаты вычислений в таблицу 1.3.

Таблица 1.3 – Данные для построения частотных характеристик

ω	0	0,1	0,25	0,5	0,75	1	2	4	∞
$\operatorname{Re}(\omega)$	-18	-17,31	-14,4	-9	-5,54	-3,6	-1,06	-0,28	0
$\operatorname{Im}(\omega)$	$-\infty$	-96,54	-32,8	-11	-5,03	-2,8	-0,76	-0,28	0
$A(\omega)$	∞	98,08	35,82	14,21	7,48	4,56	1,31	0,40	0

По данным таблицы 1.3 строим частотные характеристики (рис. 1.2–1.5).

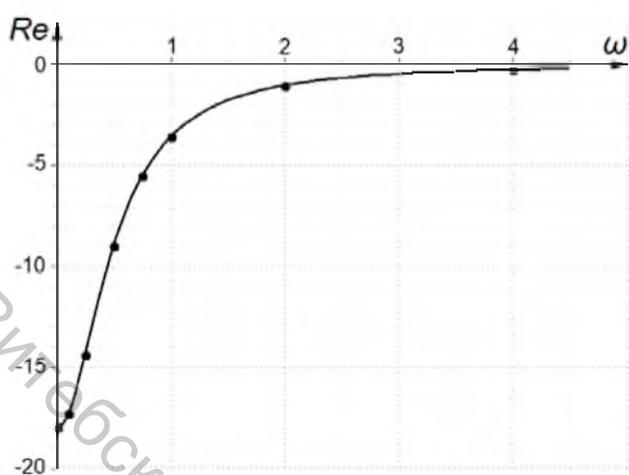


Рисунок 1.2 – ВЧХ

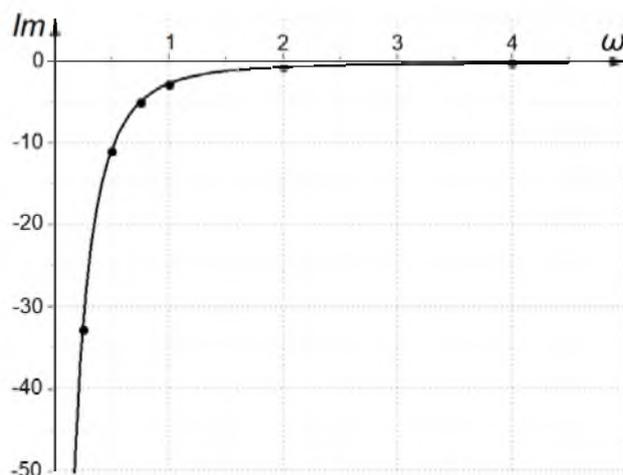


Рисунок 1.3 – МЧХ

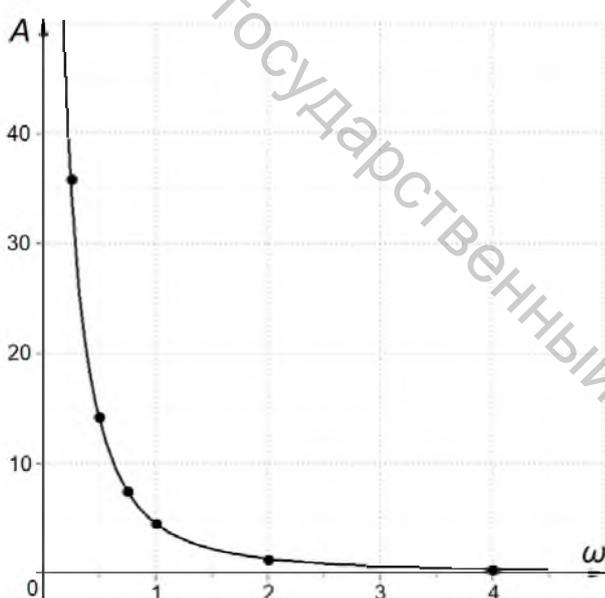


Рисунок 1.4 – АЧХ

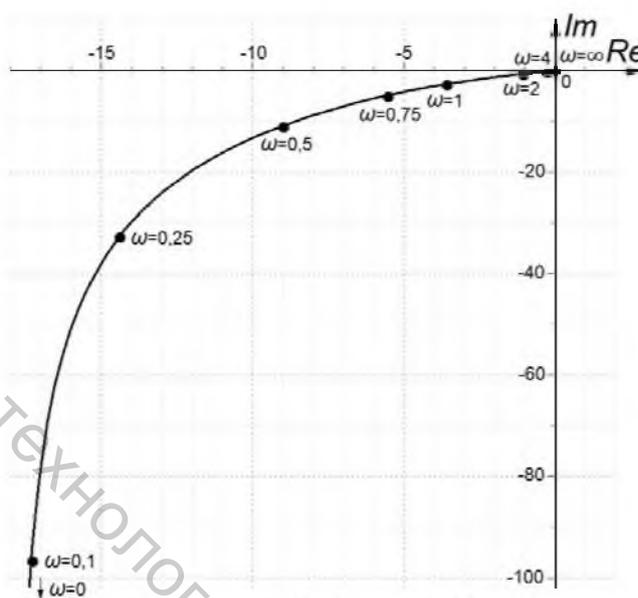


Рисунок 1.5 – АФЧХ

Запишем выражение для построения ФЧХ:

$$\varphi(\omega) = -90^\circ + \arctg(T_1\omega) - \arctg(T_2\omega) = -90^\circ + \arctg(0,2\omega) - \arctg(2\omega).$$

Подставим различные значения частоты ω в выражение ФЧХ и сведем результаты вычислений в таблицу 1.4. Так как ФЧХ и ЛАЧХ будем строить на одной координатной сетке в логарифмическом масштабе, то для каждого значения частоты ω из таблицы 1.4 найдем $\lg(\omega)$.

Таблица 1.4 – Данные для построения ФЧХ

ω	0	0,1	0,2	0,5	1	2	5	10	20	50	∞
$\lg(\omega)$	$-\infty$	-1,0	-0,7	-0,3	0,0	0,3	0,3	0,7	1,0	1,3	0
$\varphi(\omega)$	-90	-100,2	-109,5	-129,3	-142,1	-144,2	-144,2	-129,3	-113,7	-102,6	-90

Для построения ЛАЧХ рассчитаем:

$$20 \lg K = 20 \lg 10 = 20 \text{ дБ};$$

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,2} = 5 \text{ с}^{-1}; \lg \omega_1 = \lg 5 = 0,7;$$

$$\omega_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ с}^{-1}; \lg \omega_2 = \lg 0,5 = -0,3.$$

Нанесем штриховые линии, соответствующие частотам излома ЛАЧХ (рис. 1.6). Через точку $20 \lg K = 20 \text{ дБ}$, отложенную на оси ординат, проводим линию с начальным наклоном ЛАЧХ -20 дБ/дек , поскольку в передаточной функции множитель p находится в знаменателе. После частоты $\omega_2 = \frac{1}{T_2} = 0,5 \text{ с}^{-1}$ наклон ЛАЧХ изменится на -20 дБ/дек и станет равным -40 дБ/дек , поскольку множитель $(T_2 p + 1)$ находится в знаменателе передаточной функции. После частоты $\omega_1 = \frac{1}{T_1} = 5 \text{ с}^{-1}$ наклон ЛАЧХ изменится на $+20 \text{ дБ/дек}$ и станет равным -20 дБ/дек , поскольку сомножитель $(T_1 p + 1)$ находится в числителе передаточной функции.

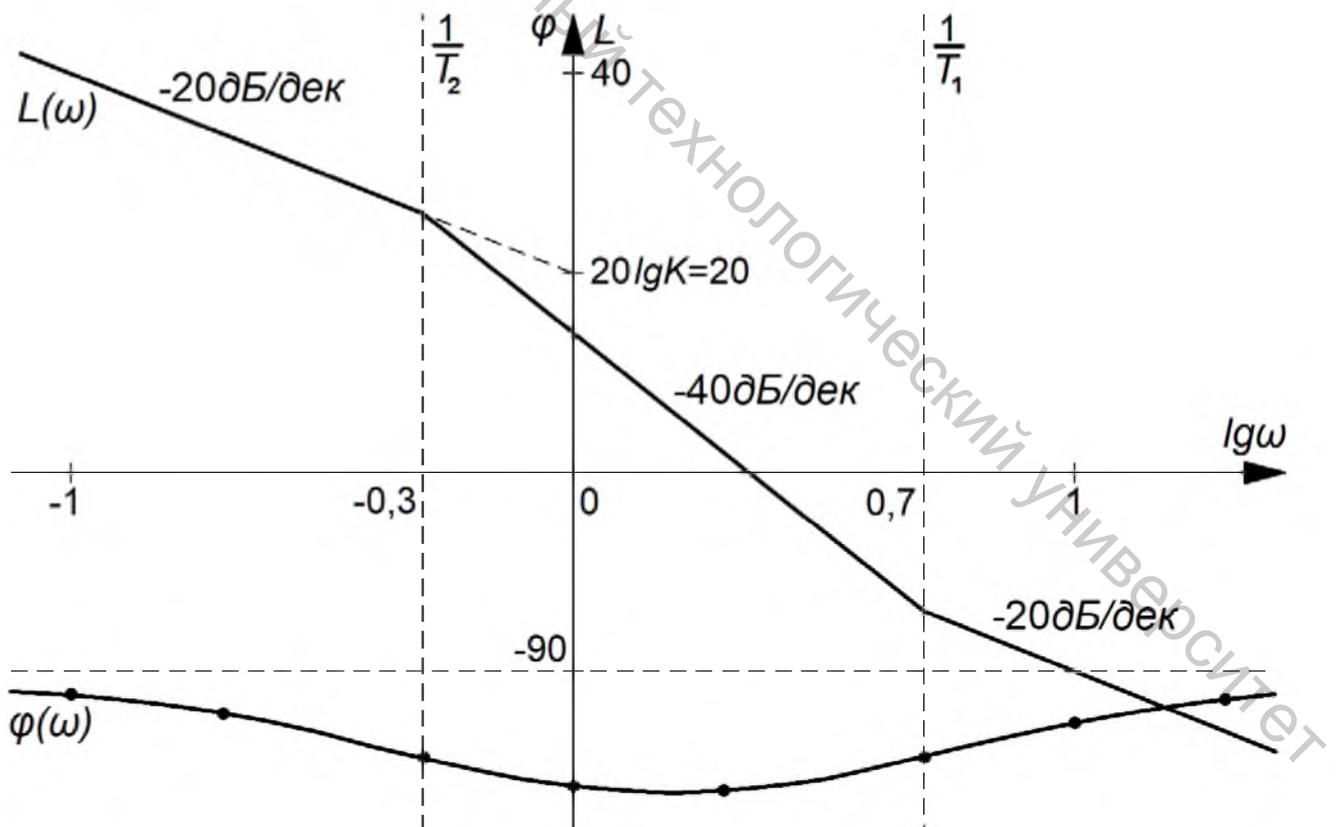


Рисунок 1.6 – ЛАЧХ и ФЧХ

2 ПРАВИЛА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ

2.1 Правила преобразования структурных схем

Элементы САУ, математические модели которых описываются в виде передаточных функций, могут быть соединены последовательно, параллельно и с обратной связью.

1. При параллельном соединении элементов на вход элементов $W_1(p)$ и $W_2(p)$ подается один и тот же сигнал $x(t)$ (рис. 2.1). Выходной сигнал параллельного соединения $y(t)$ будет являться суммой выходных сигналов элементов $y_1(t)$ и $y_2(t)$.

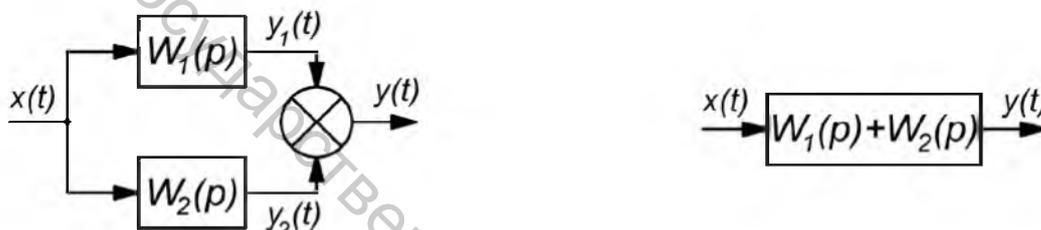


Рисунок 2.1 – Параллельное соединение

При вычитании сигналов соответствующая передаточная функция будет со знаком минус (рис. 2.2).

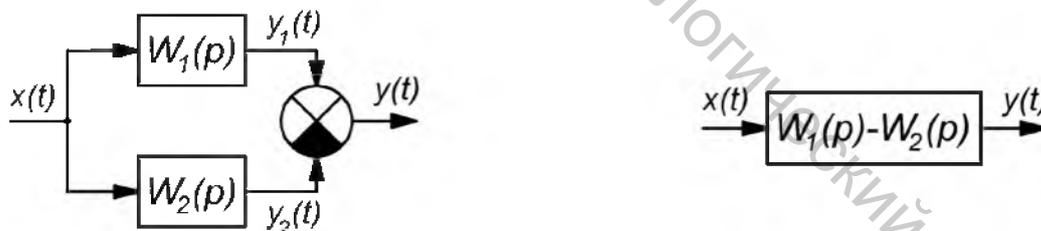


Рисунок 2.2 – Параллельное соединение с вычитанием сигналов

2. При последовательном соединении элементов $W_1(p)$ и $W_2(p)$ выходной сигнал первого элемента $y_1(t)$ будет равен входному сигналу второго элемента $x_2(t)$.



Рисунок 2.3 – Последовательное соединение

3. При соединении элементов с отрицательной обратной связью входной сигнал первого элемента равен разности входного сигнала соединения и выходного сигнала второго элемента, а входной сигнал второго элемента равен выходному сигналу соединения.

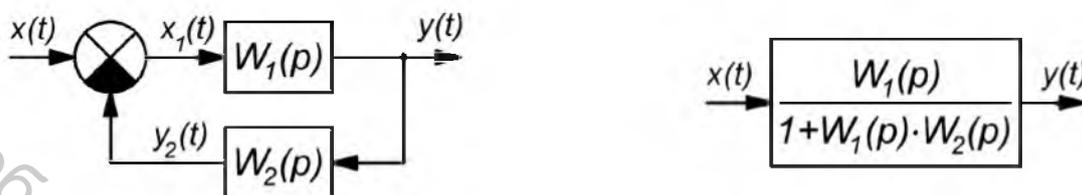


Рисунок 2.4 – Соединение элементов с отрицательной обратной связью

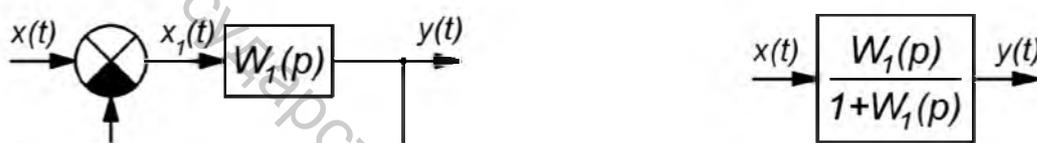


Рисунок 2.5 – Соединение элементов с единичной отрицательной обратной связью

4. При соединении элементов с положительной обратной связью входной сигнал первого элемента равен сумме входного сигнала соединения и выходного сигнала второго элемента, а входной сигнал второго элемента равен выходному сигналу соединения.

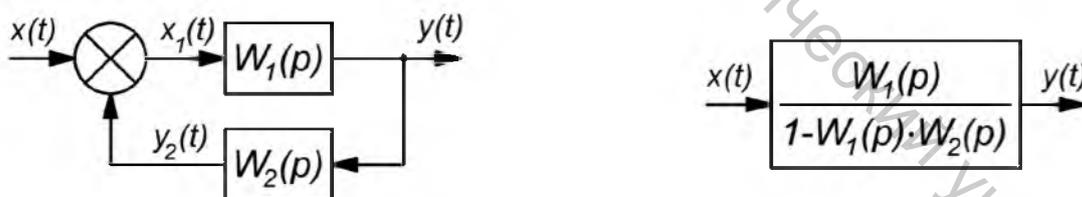


Рисунок 2.6 – Соединение элементов с положительной обратной связью

5. Звено можно переносить через сумматор как вперед (рис. 2.7), так и назад (рис. 2.8). При этом передаточные функции от обоих входов к выходу не изменятся.

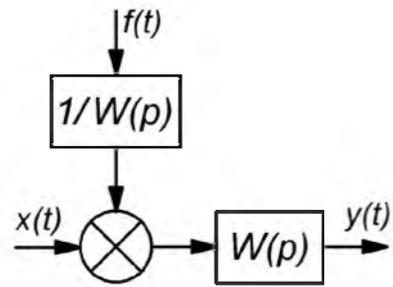
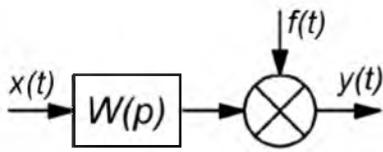


Рисунок 2.7 – Перенос звена через сумматор вперед

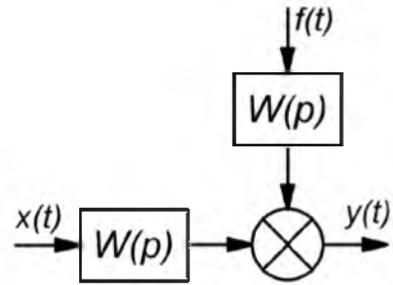
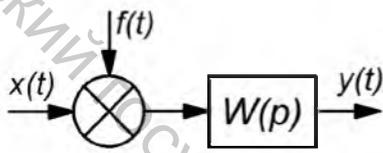


Рисунок 2.8 – Перенос звена через сумматор назад

6. Звено можно переносить также через точку разветвления вперед (рис. 2.9) и назад (рис. 2.10), сохраняя все передаточные функции.

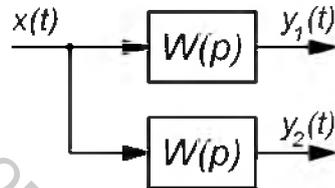
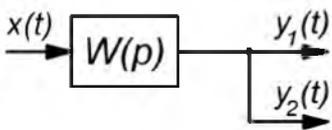


Рисунок 2.9 – Перенос звена через точку разветвления вперед

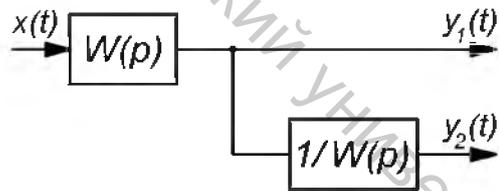
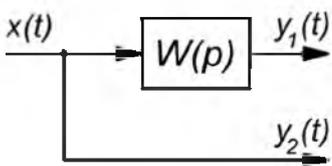


Рисунок 2.10 – Перенос звена через точку разветвления назад

7. Последовательно соединенные звенья можно переставлять местами (рис. 2.11).

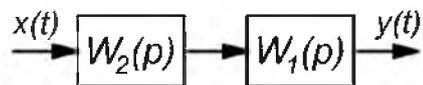
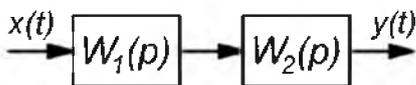


Рисунок 2.11 – Перестановка звеньев

8. Можно переставлять местами последовательно соединенные сумматоры (рис. 2.12).



Рисунок 2.12 – Перестановка сумматоров

9. Также можно переставлять местами последовательные точки разветвления.



Рисунок 2.13 – Перестановка точек разветвления

2.2 Запись передаточных функций и дифференциального уравнения динамики по структурной схеме системы

Если задана структурная схема системы, можно записать передаточные функции, воспользовавшись правилами преобразования структурных схем. Каждая передаточная функция – это отношение изображений Лапласа некоторых сигналов.

Рассмотрим на примере структурной схемы на рисунке 2.14.

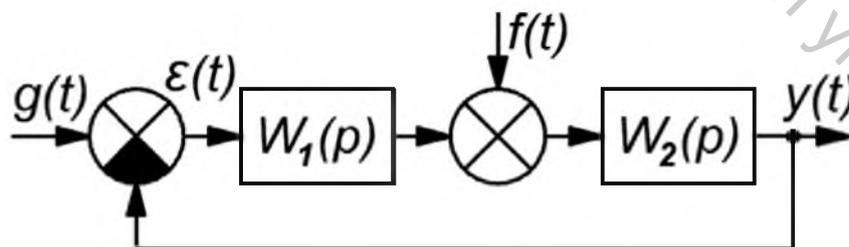


Рисунок 2.14 – Пример структурной схемы

$W_{\text{РАЗ}}(p) = \frac{Y(p)}{E(p)}$ – передаточная функция системы в разомкнутом состоянии

представляет собой отношение изображения выходного сигнала к изображению ошибки.

$$W_{PA3}(p) = W_{\text{пц}}(p) \cdot W_{oc}(p), \quad (2.1)$$

где $W_{\text{пц}}(p)$ – передаточная функция прямой цепи; $W_{oc}(p)$ – передаточная функция главной обратной связи.

В случае единичной главной обратной связи:

$$W_{PA3}(p) = W_{\text{пц}}(p). \quad (2.2)$$

$W_{3AM}(p) = \frac{Y(p)}{G(p)}$ – передаточная функция системы в замкнутом состоянии (эквивалентная) – отношение изображения выходного сигнала к изображению задающего воздействия.

$$W_{3AM}(p) = \frac{W_{\text{пц}}(p)}{1 + W_{PA3}(p)}. \quad (2.3)$$

В случае единичной главной обратной связи:

$$W_{3AM}(p) = \frac{W_{PA3}(p)}{1 + W_{PA3}(p)}. \quad (2.4)$$

$W_{\varepsilon g}(p) = \frac{E(p)}{G(p)}$ – передаточная функция ошибки относительно задающего воздействия – отношение изображения ошибки к изображению задающего воздействия.

$$W_{\varepsilon g}(p) = 1 - W_{3AM}(p). \quad (2.5)$$

В случае единичной главной обратной связи:

$$W_{\varepsilon g}(p) = \frac{1}{1 + W_{PA3}(p)}. \quad (2.6)$$

$W_{\text{ф}}(s) = \frac{Y(p)}{F(p)}$ – передаточная функция возмущения – отношение изображения выходного сигнала к изображению возмущения.

$$W_{\text{ф}}(s) = \frac{W_f(p)}{1 + W_{PA3}(p)}, \quad (2.7)$$

где $W_f(p)$ – передаточная функция элементов, стоящих после точки приложения возмущения.

Для рассматриваемого примера:

$$W_{PA3}(p) = W_1(p) \cdot W_2(p);$$

$$W_{3AM}(p) = \frac{W_1(p) \cdot W_2(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)};$$

$$W_{\varepsilon g}(p) = \frac{1}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)};$$

$$W_{fy}(p) = \frac{W_2(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)}.$$

Уравнение динамики связывает выходной сигнал системы со входными. В данной системе выходной сигнал $y(t)$, входные сигналы – $g(t)$ и $f(t)$.

Уравнение динамики в изображениях будет иметь вид:

$$Y(p) = G(p) \cdot W_{3AM}(p) + F(p) \cdot W_{fy}(p). \quad (2.8)$$

Дифференциальное уравнение записывается по уравнению в изображениях заменой оператора p на $\frac{d}{dt}$, $Y(p)$ на $y(t)$, $G(p)$ на $g(t)$ и $F(p)$ на $f(t)$.

Задача 2.1

1. Для заданной системы записать передаточные функции:

- разомкнутой САУ по главной обратной связи;
- передаточную функцию ошибки относительно задающего воздействия;
- передаточную функцию системы в замкнутом состоянии (эквивалентную передаточную функцию);
- передаточную функцию системы относительно возмущения.

2. Записать дифференциальное уравнение системы (уравнение динамики).

Структурные схемы систем изображены на рисунках 2.15–2.20. Передаточные функции элементов систем для различных вариантов представлены в таблице 2.1.

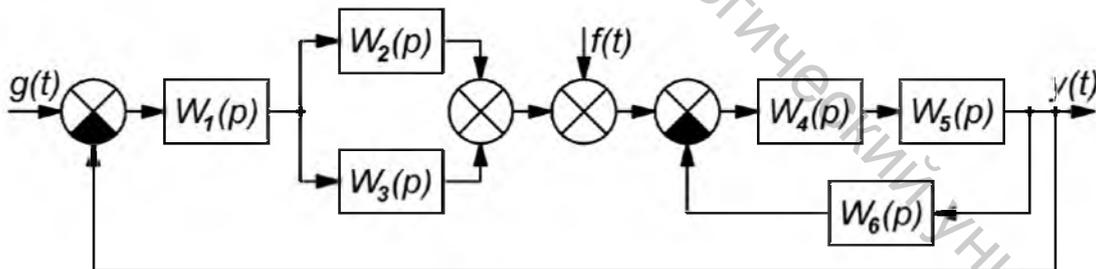


Рисунок 2.15 – Схема № 1

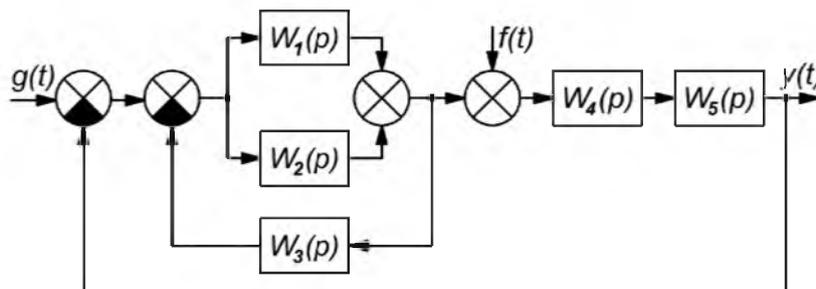


Рисунок 2.16 – Схема № 2

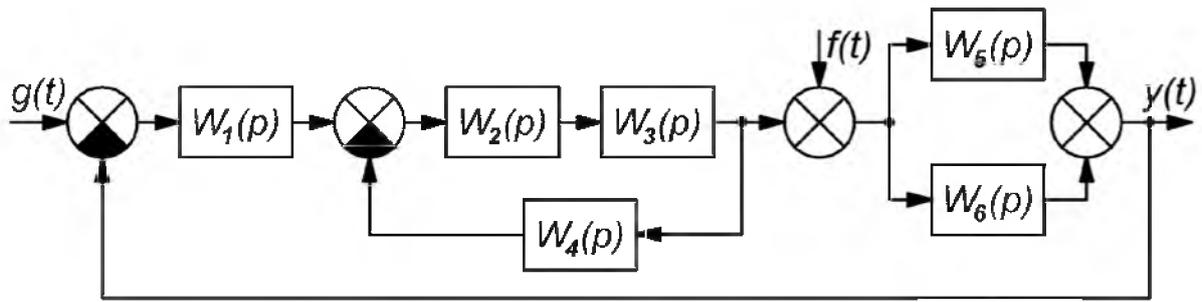


Рисунок 2.17 – Схема № 3

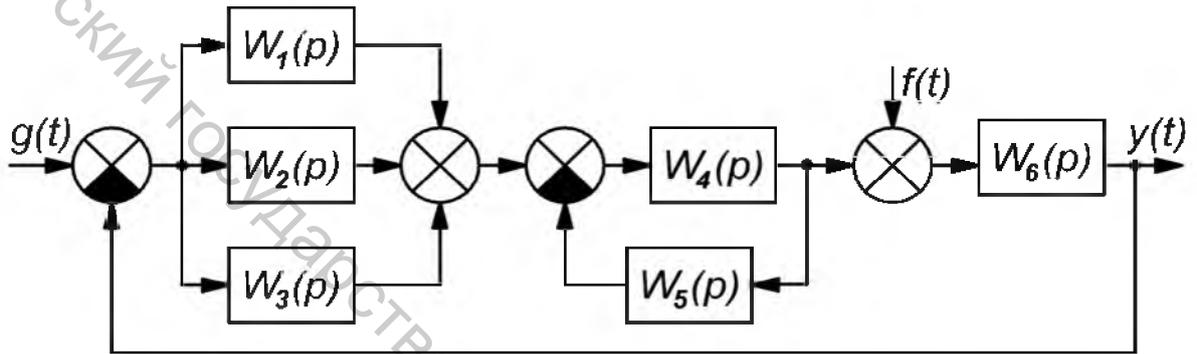


Рисунок 2.18 – Схема № 4

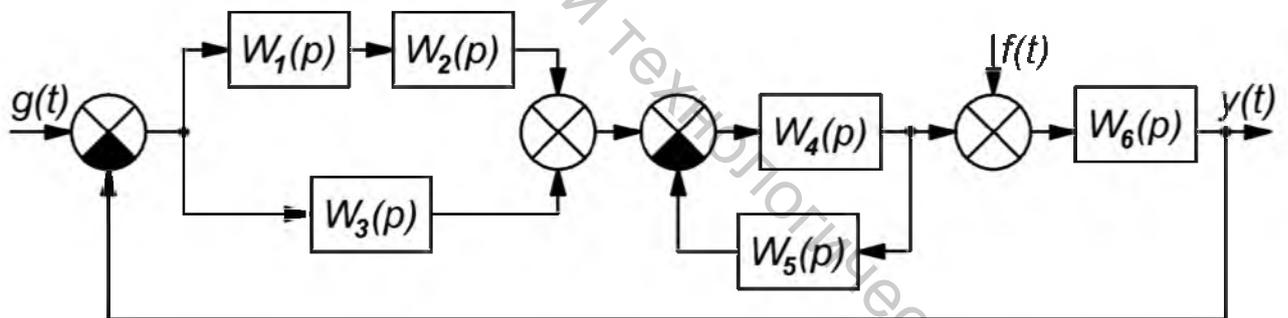


Рисунок 2.19 – Схема № 5

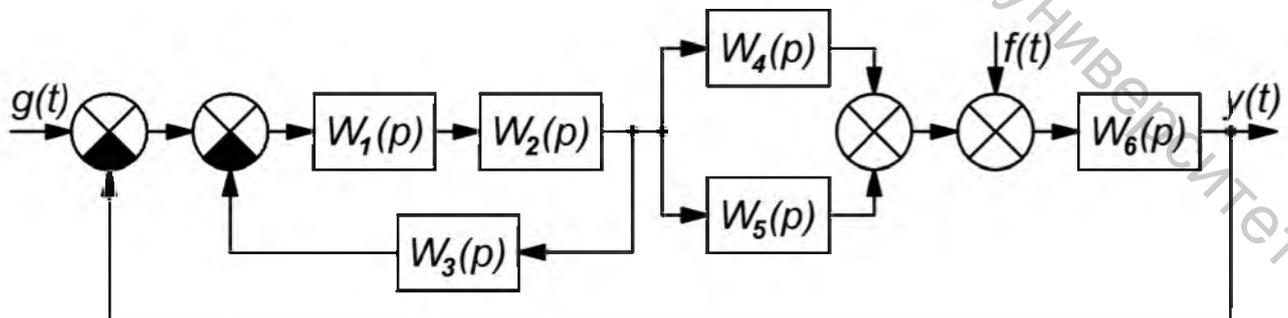


Рисунок 2.20 – Схема № 6

Таблица 2.1 – Варианты заданий

№ варианта	№ схемы	$W_1(p)$	$W_2(p)$	$W_3(p)$	$W_4(p)$	$W_5(p)$	$W_6(p)$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	$\frac{K_1}{p(T_1p+1)}$	K_2p	1	K_4	$\frac{K_5}{p}$	K_6
2	2	$\frac{K_1}{T_1p+1}$	K_2	1	$\frac{K_4}{T_4p+1}$	$\frac{K_5}{p(T_5p+1)}$	
3	3	$\frac{K_1(T_1p+1)}{T_2p+1}$	$\frac{K_2}{p}$	$\frac{K_3}{T_3p+1}$	K_4	$\frac{K_5}{p}$	1
4	4	$\frac{K_1}{p}$	K_2	1	$\frac{K_4}{p}$	K_5	$\frac{K_6}{(T_5p+1)(T_6p+1)}$
5	5	$\frac{1}{p}$	K_2	$\frac{K_3}{T_3p+1}$	$\frac{K_4}{p}$	K_5	$\frac{K_6}{p}$
6	6	$\frac{K_1}{T_1p+1}$	$\frac{K_2}{T_2p+1}$	1	$\frac{K_4}{p}$	$\frac{K_5}{T_5p+1}$	K_6
7	1	$\frac{K_1}{T_1p+1}$	$\frac{K_2}{p}$	K_3	$\frac{K_4}{T_4p+1}$	K_5	1
8	2	K_1	$\frac{K_2}{p}$	K_3	$\frac{K_4}{T_4p+1}$	$\frac{K_5}{T_5p+1}$	
9	3	$\frac{K_1}{T_1p+1}$	$\frac{K_2}{p(T_2p+1)}$	K_3	1	K_5	$\frac{K_6}{p}$
10	4	1	$\frac{K_2}{T_2p+1}$	K_3	$\frac{K_4}{T_4p+1}$	K_5	$\frac{K_6}{p(T_6p+1)}$
11	5	p	$\frac{K_2}{T_2p+1}$	K_3	$\frac{K_4}{p}$	1	$\frac{K_6}{T_6p+1}$

Продолжение таблицы 2.1

1	2	3	4	5	6	7	8
12	6	$\frac{K_1}{p}$	$\frac{K_2}{T_2p+1}$	K_3	K_4p	1	$\frac{K_6}{p(T_6p+1)}$
13	1	$\frac{K_1}{T_1p+1}$	$\frac{K_2}{p}$	$\frac{K_3}{T_3p+1}$	$\frac{K_4}{p}$	1	K_6
14	2	$\frac{K_1}{T_1p+1}$	$\frac{K_2}{T_2p+1}$	$\frac{K_3}{p}$	$\frac{K_4}{T_4p+1}$	K_5	
15	3	$\frac{K_1}{T_1p+1}$	$\frac{K_2}{T_2p+1}$	1	K_4	$\frac{K_5}{T_5p+1}$	$\frac{K_6}{p}$
16	4	$\frac{K_1}{T_1p+1}$	1	K_3	$\frac{K_4(T_4p+1)}{T_5p+1}$	1	$\frac{K_6}{p(T_6p+1)}$
17	5	$\frac{K_1}{p(T_1p+1)}$	K_2	1	$\frac{K_4}{T_4p+1}$	K_5	$\frac{K_6}{T_6p+1}$
18	6	K_1	$\frac{K_2}{p(T_2p+1)}$	1	$\frac{K_4}{p}$	K_5	$\frac{K_6}{T_6p+1}$
19	1	$\frac{K_1}{(T_1p+1)(T_2p+1)}$	1	K_3p	K_4	$\frac{K_5}{T_5p+1}$	K_6
20	2	$\frac{K_1}{p}$	$\frac{K_2}{T_2p+1}$	K_3	$\frac{K_4}{T_4p+1}$	$\frac{K_5}{p}$	
21	3	$\frac{K_1}{p}$	T_2p+1	$\frac{K_3}{T_3p+1}$	1	$\frac{K_5}{T_5p+1}$	$\frac{K_6}{T_6p+1}$
22	4	1	K_2	$\frac{K_3}{T_3p+1}$	$\frac{K_4(T_4p+1)}{p}$	K_5	$\frac{K_6}{(T_5p+1)(T_6p+1)}$
23	5	$\frac{K_1}{T_1p+1}$	$\frac{K_2}{p}$	K_3	$\frac{K_4}{T_4p+1}$	1	$\frac{K_6}{p}$

Окончание таблицы 2.1

1	2	3	4	5	6	7	8
24	6	$\frac{K_1}{T_1 p + 1}$	K_2	K_3	1	$\frac{K_5}{p}$	$\frac{K_6}{(T_5 p + 1)(T_6 p + 1)}$
25	1	$\frac{K_1}{T_1 p + 1}$	K_2	$\frac{K_3}{p}$	$\frac{K_4}{p}$	$\frac{K_5}{T_5 p + 1}$	
26	2	$\frac{K_1}{p}$	K_2	1	$\frac{K_4}{p(T_4 p + 1)}$	$\frac{K_5}{T_5 p + 1}$	
27	3	$\frac{K_1}{T_1 p + 1}$	$T_2 p + 1$	$\frac{K_3}{p}$	K_4	$\frac{K_5}{p}$	$\frac{K_6}{T_6 p + 1}$
28	4	K_1	$\frac{K_2}{p}$	K_3	$\frac{K_4}{p(T_4 p + 1)}$	1	$\frac{K_6}{(T_5 p + 1)(T_6 p + 1)}$
29	5	$\frac{K_1}{p}$	1	K_3	$\frac{K_4}{p(T_4 p + 1)}$	1	$\frac{K_6}{T_6 p + 1}$
30	6	K_1	$\frac{K_2}{T_2 p + 1}$	1	$\frac{K_4}{T_4 p + 1}$	K_5	$\frac{K_6}{p(T_6 p + 1)}$

Пример решения. Для системы, структурная схема которой представлена на рисунке 2.21, записать:

1) передаточные функции:

- разомкнутой САУ по главной обратной связи;
- передаточную функцию САУ в замкнутом состоянии;
- передаточную функцию ошибки относительно задающего воздействия;
- передаточную функцию САУ относительно возмущения;

2) уравнение динамики.

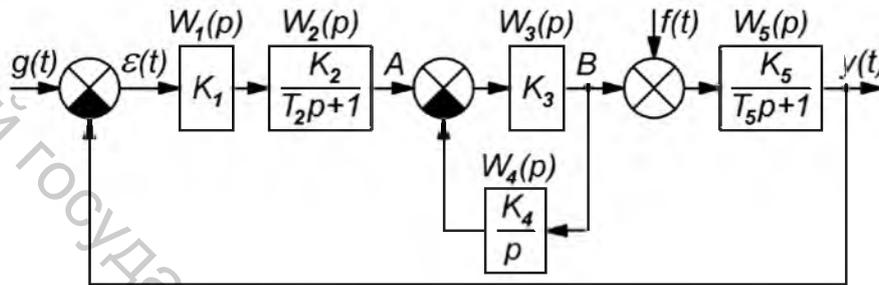


Рисунок 2.21 – Структурная схема САУ

Используя правила преобразования структурных схем, определим эквивалентную передаточную функцию между точками А и В:

$$W_{AB}(p) = \frac{W_3(p)}{1 + W_3(p)W_4(p)} = \frac{K_3}{1 + \frac{K_3K_4}{p}} = \frac{K_3p}{p + K_3K_4} = \frac{K_3p}{\left(\frac{1}{\frac{K_3K_4}{p+1}}\right)K_3K_4} = \frac{\frac{p}{K_4}}{\frac{1}{K_3K_4}p+1} = \frac{K_{AB}p}{T_{AB}p+1},$$

где $K_{AB} = \frac{1}{K_4}$, $T_{AB} = \frac{1}{K_3K_4}$.

Передаточная функция системы, разомкнутой на главной обратной связи:

$$W_{PA3}(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_{AB}(p) \cdot W_5(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{K_1K_2K_{AB}K_5p}{(T_{AB}p+1)(T_2p+1)(T_5p+1)}.$$

Эквивалентная функция системы в замкнутом состоянии:

$$\begin{aligned} W_{34M}(p) &= \frac{Y(p)}{G(p)} = \frac{W_{PA3}(p)}{1 + W_{PA3}(p)} = \\ &= \frac{\frac{K_1K_2K_{AB}K_5p}{(T_{AB}p+1)(T_2p+1)(T_5p+1)}}{1 + \frac{K_1K_2K_{AB}K_5p}{(T_{AB}p+1)(T_2p+1)(T_5p+1)}} = \frac{K_1K_2K_{AB}K_5p}{(T_{AB}p+1)(T_2p+1)(T_5p+1) + K_1K_2K_{AB}K_5p} = \\ &= \frac{K_1K_2K_{AB}K_5p}{T_{AB}T_2T_5p^3 + (T_{AB}T_2 + T_{AB}T_5 + T_2T_5)p^2 + (T_{AB} + T_2 + T_5 + K_1K_2K_{AB}K_5)p + 1} \end{aligned}$$

Передаточная функция ошибки относительно задающего воздействия:

$$W_{\text{ог}}(p) = \frac{E(p)}{G(p)} = \frac{1}{1+W_{\text{ПАЗ}}(p)} = \frac{1}{1+\frac{K_1 K_2 K_{AB} K_5 p}{(T_{AB} p + 1)(T_2 p + 1)(T_5 p + 1)}} =$$

$$= \frac{(T_{AB} p + 1)(T_2 p + 1)(T_5 p + 1)}{(T_{AB} p + 1)(T_2 p + 1)(T_5 p + 1) + K_1 K_2 K_{AB} K_5 p}$$

Передаточная функция системы относительно возмущения $f(t)$:

$$W_{\text{fy}}(p) = \frac{Y(p)}{F(p)} = \frac{W_5(p)}{1+W_{\text{ПАЗ}}(p)} = \frac{\frac{K_5}{(T_5 p + 1)}}{1+\frac{K_1 K_2 K_{AB} K_5 p}{(T_{AB} p + 1)(T_2 p + 1)(T_5 p + 1)}} =$$

$$= \frac{K_5 (T_{AB} p + 1)(T_2 p + 1)}{(T_{AB} p + 1)(T_2 p + 1)(T_5 p + 1) + K_1 K_2 K_{AB} K_5 p} =$$

$$= \frac{K_5 T_{AB} T_2 p^2 + K_5 (T_{AB} + T_2) p + K_5}{T_{AB} T_2 T_5 p^3 + (T_{AB} T_2 + T_{AB} T_5 + T_2 T_5) p^2 + (T_{AB} + T_2 + T_5 + K_1 K_2 K_{AB} K_5) p + 1}$$

Изображение выходного сигнала: $Y(p) = G(p) \cdot W_{\text{ЗАМ}}(p) + F(p) \cdot W_{\text{fy}}(p)$.

Уравнение системы в изображениях:

$$Y(p) \cdot (a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0) = G(p) \cdot b_1 p + F(p) \cdot (c_2 p^2 + c_1 p + c_0),$$

где $a_3 = T_{AB} T_2 T_5$, $a_2 = T_{AB} T_2 + T_{AB} T_5 + T_2 T_5$, $a_1 = T_{AB} + T_2 + T_5 + K_1 K_2 K_{AB} K_5$, $a_0 = 1$,
 $b_1 = K_1 K_2 K_{AB} K_5$, $c_2 = K_5 T_{AB} T_2$, $c_1 = K_5 (T_{AB} + T_2)$, $c_0 = K_5$.

Уравнение динамики системы:

$$a_3 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_1 \frac{dg(t)}{dt} + c_2 \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + c_1 \frac{df(t)}{dt} + c_0 f(t).$$

Задача 2.2

Используя правила преобразования структурных схем, записать эквивалентную передаточную функцию системы, представленной на рисунках 2.22–2.31 (по вариантам).

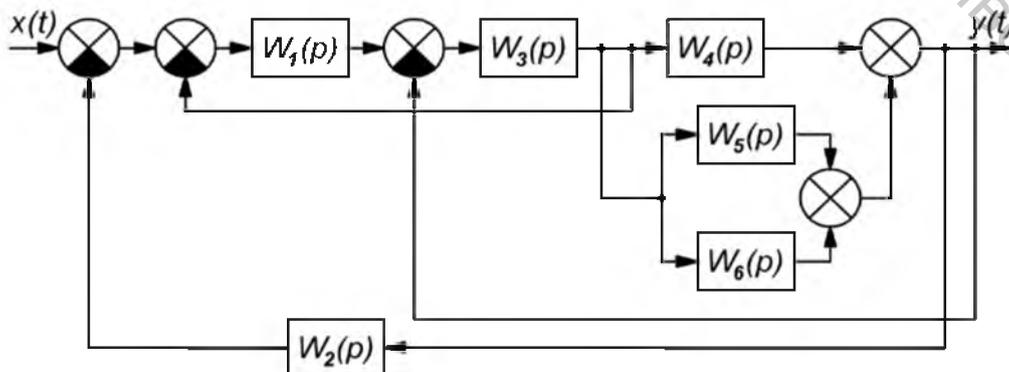


Рисунок 2.22 – Структурная схема системы (варианты 1, 11, 21)

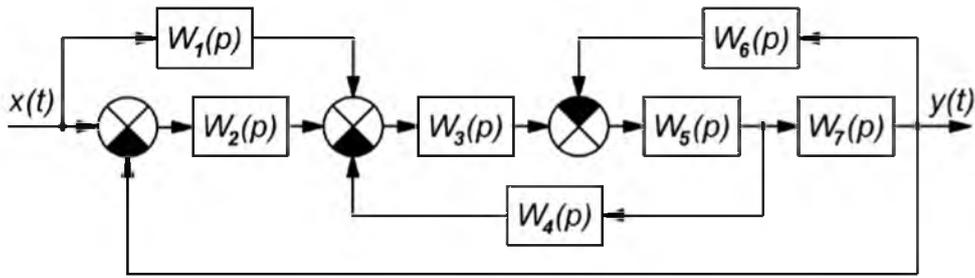


Рисунок 2.23 – Структурная схема системы (варианты 2, 12, 22)

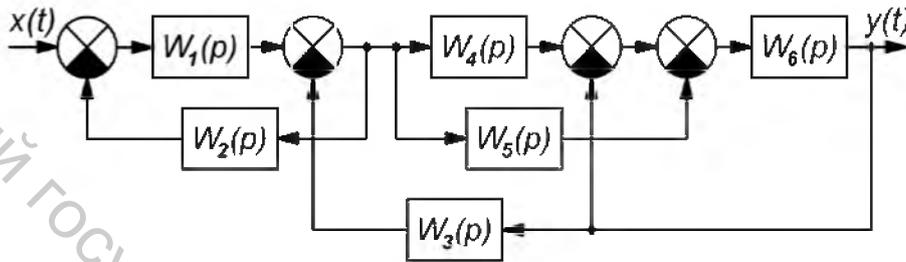


Рисунок 2.24 – Структурная схема системы (варианты 3, 13, 23)

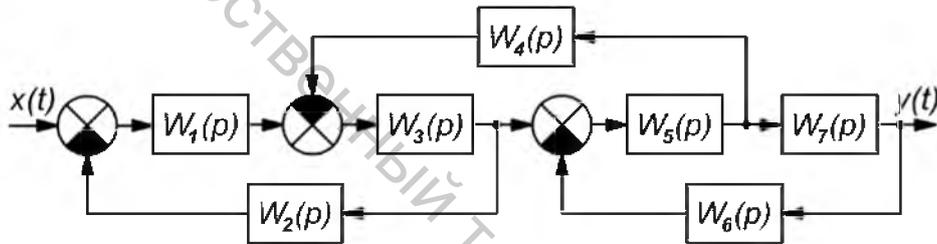


Рисунок 2.25 – Структурная схема системы (варианты 4, 14, 24)

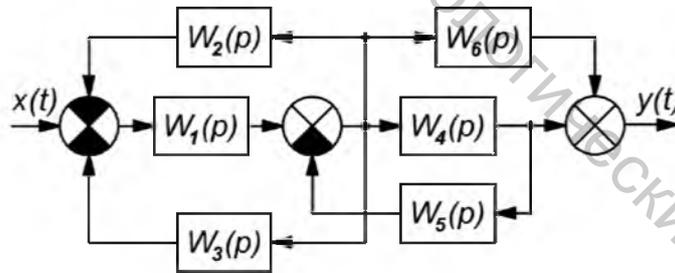


Рисунок 2.26 – Структурная схема системы (варианты 5, 15, 25)

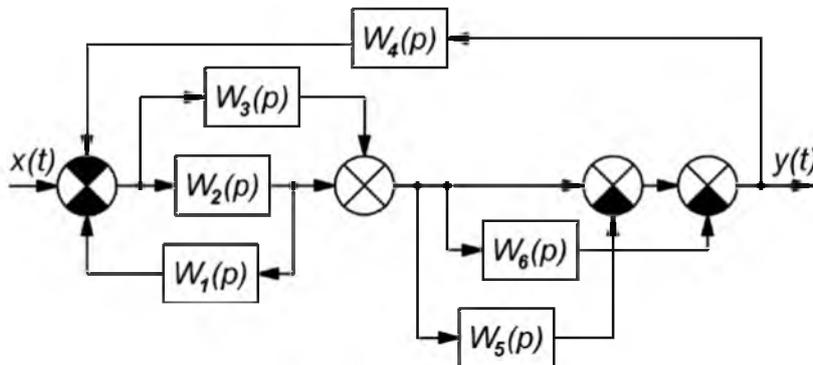


Рисунок 2.27 – Структурная схема системы (варианты 6, 16, 26)

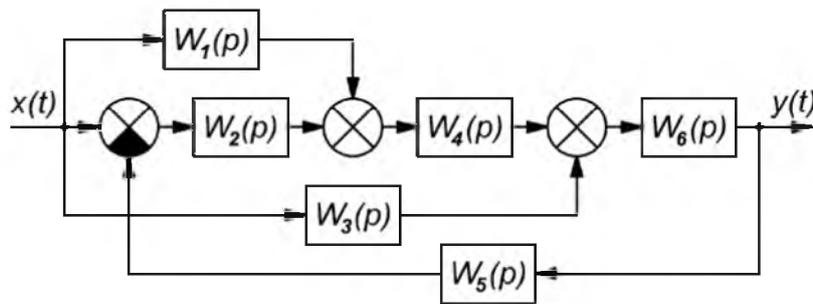


Рисунок 2.28 – Структурная схема системы (варианты 7, 17, 27)

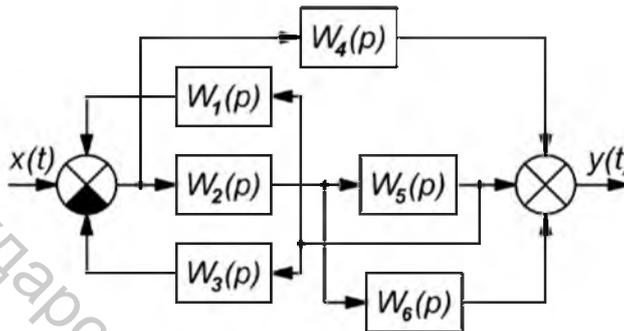


Рисунок 2.29 – Структурная схема системы (варианты 8, 18, 28)

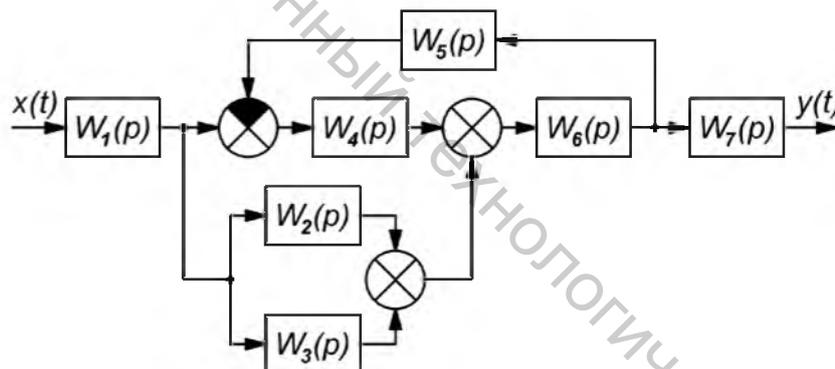


Рисунок 2.30 – Структурная схема системы (варианты 9, 19, 29)

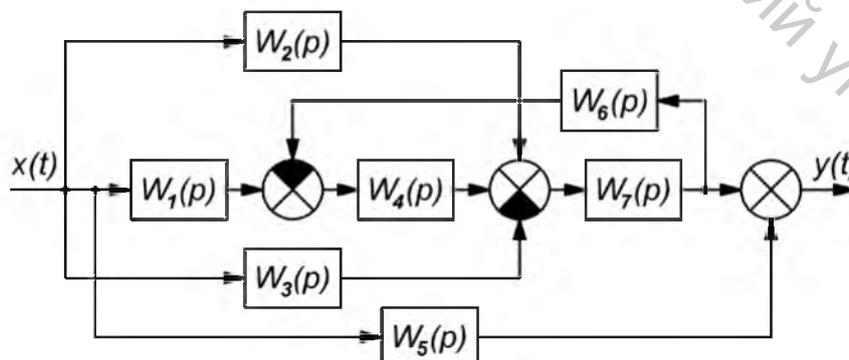


Рисунок 2.31 – Структурная схема системы (варианты 10, 10, 30)

Пример решения. Необходимо найти передаточную функцию системы, представленной на рисунке 2.32.

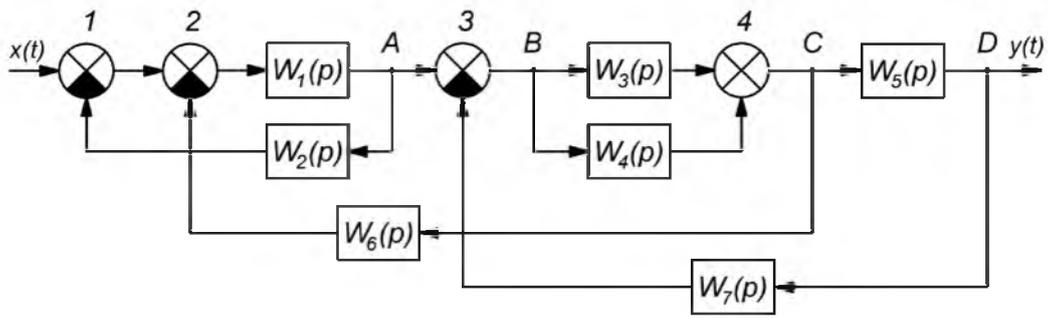


Рисунок 2.32 – Структурная схема системы

Перенесем звено $W_5(p)$ через точку разветвления D (рис. 2.33 а). Затем переставим сумматоры 1 и 2 (рис. 2.33 б) и точки разветвления C и D (рис. 2.33 в).

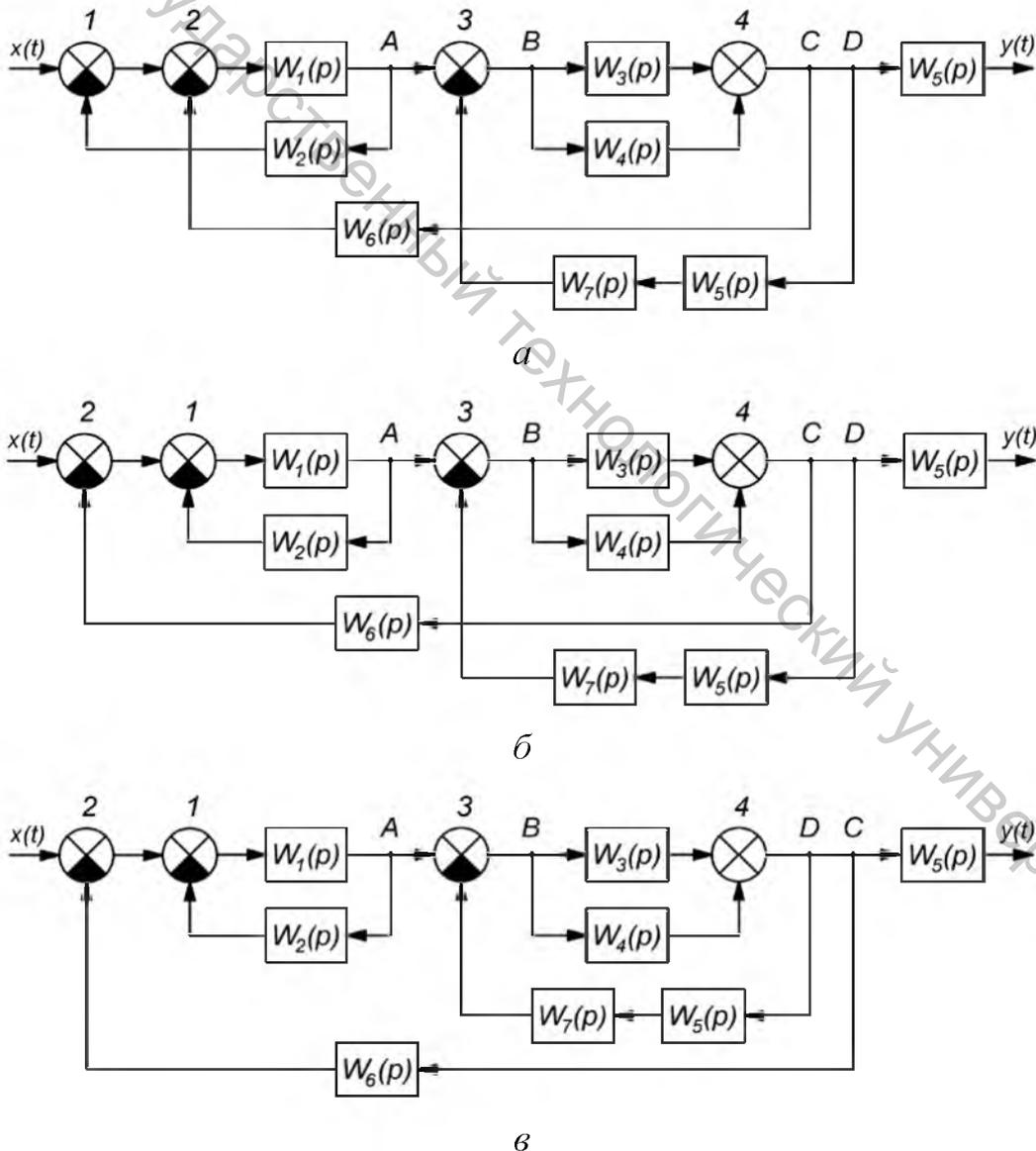


Рисунок 2.33 – Эквивалентные преобразования структурной схемы

Звено $W_1(p)$ охвачено отрицательной обратной связью из звена $W_2(p)$:

$$W_{12}(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)}.$$

Звенья $W_3(p)$ и $W_4(p)$ соединены параллельно:

$$W_{34}(p) = W_3(p) + W_4(p).$$

Звенья $W_3(p)$ и $W_4(p)$ охвачены обратной связью из последовательно соединенных звеньев $W_5(p)$ и $W_7(p)$ (участок AD):

$$W_{57}(p) = W_5(p) \cdot W_7(p);$$

$$W_{34D}(p) = \frac{W_{34}(p)}{1 + W_{34}(p) \cdot W_{57}(p)} = \frac{W_3(p) + W_4(p)}{1 + (W_3(p) + W_4(p)) \cdot W_5(p) \cdot W_7(p)}.$$

Звенья $W_1(p)$ и $W_2(p)$ соединены последовательно со звеньями на участке AD. Все эти звенья вместе охвачены обратной связью из звена $W_6(p)$:

$$W_{1D}(p) = W_{12}(p) \cdot W_{34D}(p) = \frac{W_1(p) \cdot (W_3(p) + W_4(p))}{(1 + W_1(p) \cdot W_2(p)) \cdot (1 + (W_3(p) + W_4(p)) \cdot W_5(p) \cdot W_7(p))};$$

$$W_{2C}(p) = \frac{W_{1D}(p)}{1 + W_{1D}(p) \cdot W_6(p)} = \frac{\frac{W_1(p) \cdot (W_3(p) + W_4(p))}{(1 + W_1(p) \cdot W_2(p)) \cdot (1 + (W_3(p) + W_4(p)) \cdot W_5(p) \cdot W_7(p))}}{1 + \frac{W_1(p) \cdot (W_3(p) + W_4(p)) \cdot W_6(p)}{(1 + W_1(p) \cdot W_2(p)) \cdot (1 + (W_3(p) + W_4(p)) \cdot W_5(p) \cdot W_7(p))}} =$$

$$= \frac{W_1(p) \cdot (W_3(p) + W_4(p))}{(1 + W_1(p) \cdot W_2(p)) \cdot (1 + (W_3(p) + W_4(p)) \cdot W_5(p) \cdot W_7(p)) + W_1(p) \cdot (W_3(p) + W_4(p)) \cdot W_6(p)}.$$

Звено $W_5(p)$ соединено последовательно с уже рассмотренной частью схемы:

$$W_{ЭКВ}(p) = W_{2C}(p) \cdot W_5(p) =$$

$$= \frac{W_1(p) \cdot (W_3(p) + W_4(p)) \cdot W_5(p)}{(1 + W_1(p) \cdot W_2(p)) \cdot (1 + (W_3(p) + W_4(p)) \cdot W_5(p) \cdot W_7(p)) + W_1(p) \cdot (W_3(p) + W_4(p)) \cdot W_6(p)}.$$

3 УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ САУ

Устойчивость – способность системы возвращаться в исходное состояние равновесия после приложения и снятия воздействия, которое вывело ее из этого состояния.

Для определения устойчивости необходимо получить характеристическое уравнение системы. Для этого необходимо записать передаточную функцию системы в замкнутом состоянии и приравнять ее знаменатель к нулю. Также характеристическое уравнение можно получить также приравняв к нулю сумму числителя и знаменателя передаточной функции системы в разомкнутом состоянии.

3.1 Алгебраические критерии устойчивости

Характеристическое уравнение линейной САУ можно представить в виде:

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0. \quad (3.1)$$

Критерий устойчивости Рауса и Гурвица позволяет по коэффициентам характеристического уравнения без вычисления его корней сделать суждение об устойчивости системы.

Необходимым (но не достаточным) условием устойчивости системы является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения. Это значит, что при положительности всех коэффициентов система может быть устойчивой, но не исключена возможность неустойчивости системы. Если же не все коэффициенты характеристического уравнения положительны, то система наверняка неустойчива и никаких дополнительных исследований устойчивости не требуется.

Критерий устойчивости Гурвица

Гурвиц разработал алгебраический критерий устойчивости в форме определителей, составленный из коэффициентов характеристического уравнения системы.

Критерий устойчивости Гурвица формулируется следующим образом: для того, чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения и определители Гурвица до $(n-1)$ -го порядка включительно были положительны.

Если $a_0 = 0$ или $\Delta_{n-1} = 0$ при $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots$, то система находится на границе устойчивости, причем при $a_0 = 0$ – аperiodическая граница устойчивости; при $\Delta_{n-1} = 0$ – колебательная граница устойчивости.

Главный определитель Гурвица строит из коэффициентов характеристического уравнения по следующему правилу: по главной диагонали определителя слева направо выписывают все коэффициенты характеристического уравнения от a_{n-1} до a_0 в порядке убывания индексов. Столбцы вверх от главной диагонали дополняют коэффициентами характеристического уравнения с последовательно убывающими индексами, а

столбцы вниз – коэффициентами с последовательно возрастающими индексами. На место коэффициентов с индексами больше n и меньше нуля проставляют нули.

Отчеркивая в главном определителе Гурвица диагональные миноры, получим определители Гурвица низшего порядка Δ_i .

$$\begin{array}{c|ccccccc} \Delta_1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \Delta_2 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \Delta_3 & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \dots & a_3 & a_1 & 0 \\ \Delta_n & 0 & 0 & 0 & \dots & a_4 & a_2 & a_0 \end{array}$$

Рисунок 3.1 – Определители Гурвица

По критерию Гурвица можно определить критическое значение параметра, при котором система находится на границе устойчивости. Для этого необходимо определитель, содержащий данный параметр, приравнять к 0 и решить полученное уравнение.

3.2 Частотные критерии устойчивости

Частотные критерии устойчивости позволяют судить об устойчивости систем автоматического управления по виду их частотных характеристик. Эти критерии позволяют исследовать устойчивость систем высокого порядка и имеют простую геометрическую интерпретацию.

Критерий Михайлова

Рассмотрим характеристический полином:

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0. \quad (3.2)$$

Замена p на $j\omega$ приводит к комплексному полиному, называемому функцией Михайлова или характеристическим вектором:

$$D(j\omega) = a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0 = re(\omega) + j \cdot im(\omega). \quad (3.3)$$

где $re(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - a_6\omega^6 \dots$, $im(\omega) = \omega(a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 - a_7\omega^6 \dots)$.

При изменении частоты конец вектора $D(j\omega)$ будет описывать некоторую кривую в комплексной плоскости, которая называется годографом Михайлова или годографом характеристического вектора.

Согласно критерию Михайлова, для того, чтобы САУ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы годограф характеристического вектора при изменении частоты от 0 до ∞ , начинаясь при $\omega = 0$ на положительном отрезке вещественной оси, обходил только против часовой стрелки последовательно n квадрантов координатной плоскости, не менял порядка следования и не проходил через 0. Годограф при $\omega = 0$ начинается на положительном отрезке вещественной оси на расстоянии a_0 от начала координат, а при $\omega \rightarrow \infty$ уходит в бесконечность в том квадранте, каков порядок характеристического уравнения.

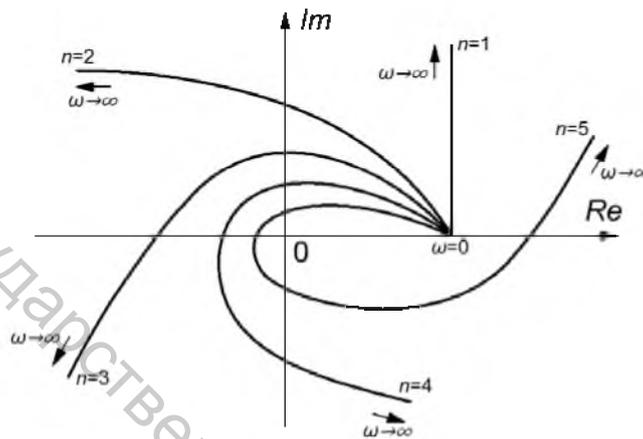


Рисунок 3.2 – Годографы Михайлова для устойчивых систем

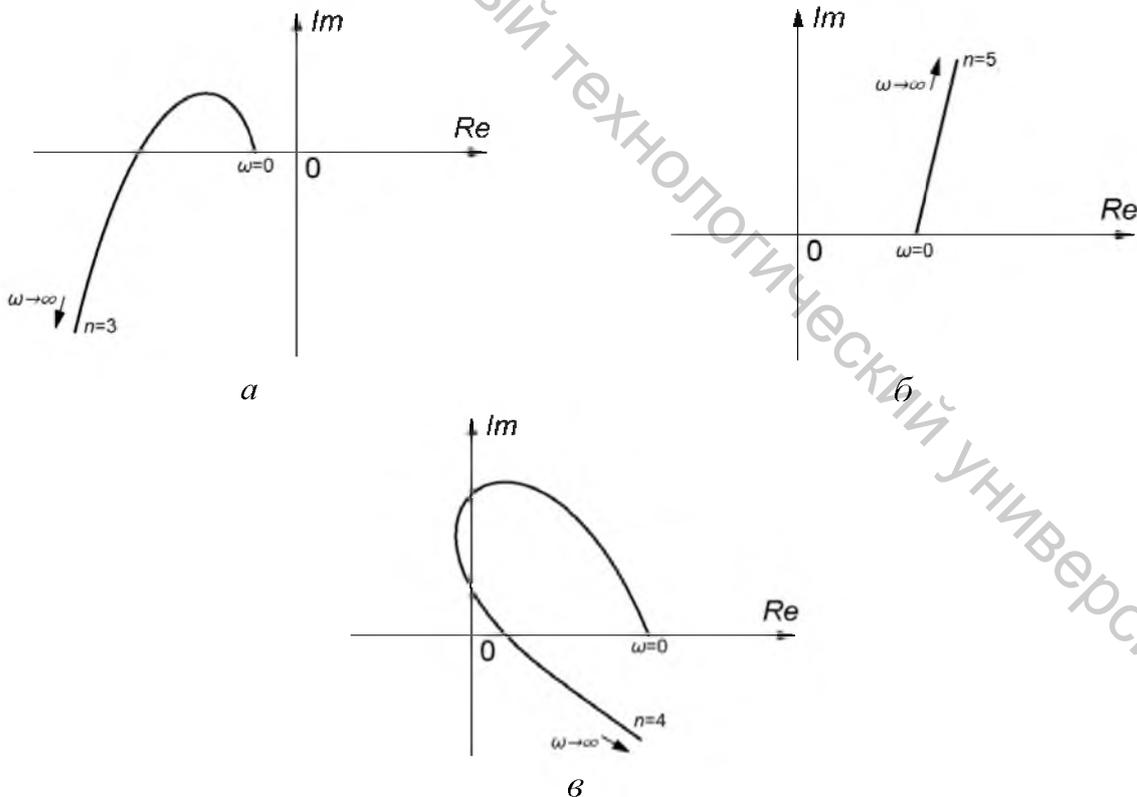


Рисунок 3.3 – Годографы Михайлова для неустойчивых систем: *а* – начинается на отрицательной действительной оси; *б* – не обходит n -квадрантов координатной плоскости; *в* – нарушает порядок следования квадрантов

В случае аperiodической границы устойчивости годограф Михайлова выходит из начала координат, а в случае колебательной границы устойчивости – проходит через ноль.

Критерий Найквиста

Данный критерий позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по виду АФЧ системы в разомкнутом состоянии. Вид АФЧХ зависит от того, устойчива ли система в разомкнутом состоянии и от астатизма системы.

Для устойчивых в разомкнутом состоянии систем (статических), при $\omega = 0$, АФЧХ начинается на положительном отрезке вещественной оси на расстоянии K от начала координат, с увеличением частоты, вектор движется по часовой стрелке, и при $\omega \rightarrow \infty$ $W_{РАЗ}(j\omega) \rightarrow 0$. Если АФЧХ при этом не охватывает точку с координатами $(-1, 0j)$, то система и в замкнутом состоянии будет устойчива.

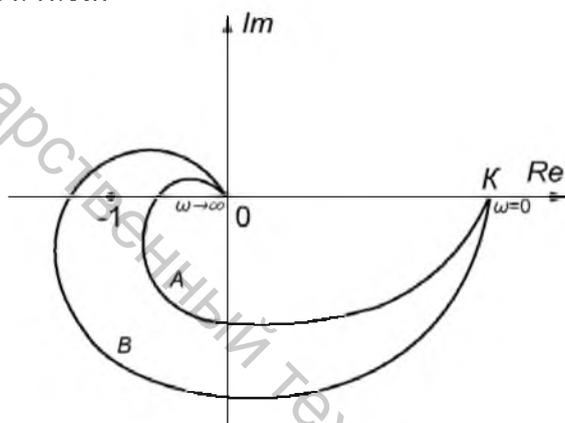


Рисунок 3.4 – АФЧХ устойчивой в разомкнутом состоянии системы (A – устойчива в замкнутом состоянии, B – неустойчива)

Нейтральная (астатическая) в разомкнутом состоянии система будет устойчива в замкнутом состоянии, если ее АФЧХ в разомкнутом состоянии, при дополнении ее дугой бесконечного радиуса до положительного отрезка вещественной оси, не будет охватывать точку с координатами $(-1, 0j)$.

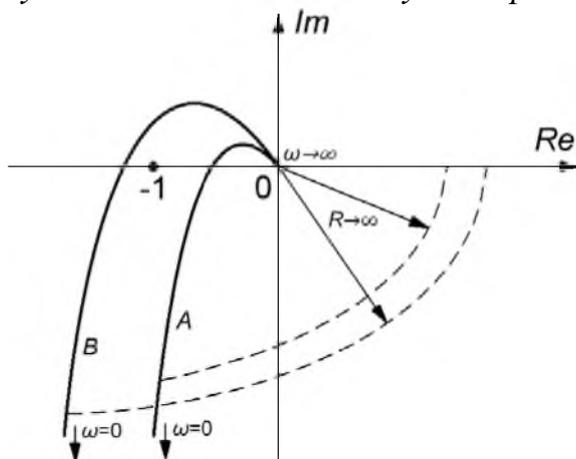


Рисунок 3.5 – АФЧХ нейтральной в разомкнутом состоянии системы (A – устойчива в замкнутом состоянии, B – неустойчива)

Неустойчивая система в разомкнутом состоянии имеет m корней в правой полуплоскости. Такая система будет устойчива в замкнутом состоянии, если её АФЧХ в диапазоне частот $0 < \omega < \infty$ охватывает $m/2$ раз точку с координатами $(-1; 0j)$, или если разность числа переходов АФЧХ сверху вниз и снизу вверх отрезка отрицательной оси от $-\infty$ до -1 равно $m/2$.

Анализ устойчивости по логарифмическим амплитудно-частотным характеристикам (ЛАЧХ)

Наиболее удобным и наглядным способом оценки устойчивости является критерий Найквиста, в котором используются логарифмические амплитудно-частотные характеристики (ЛАЧХ) и фазо-частотные характеристики (ФЧХ).

Согласно этому критерию, система будет устойчивой в замкнутом состоянии, если ЛАЧХ системы пересекает ось частот раньше, чем ФЧХ пересекает линию $\varphi = -180^\circ$ или, по-другому, фазовый сдвиг системы на частоте среза (частоте, на которой ЛАЧХ пересекает ось частот) будет больше -180° .

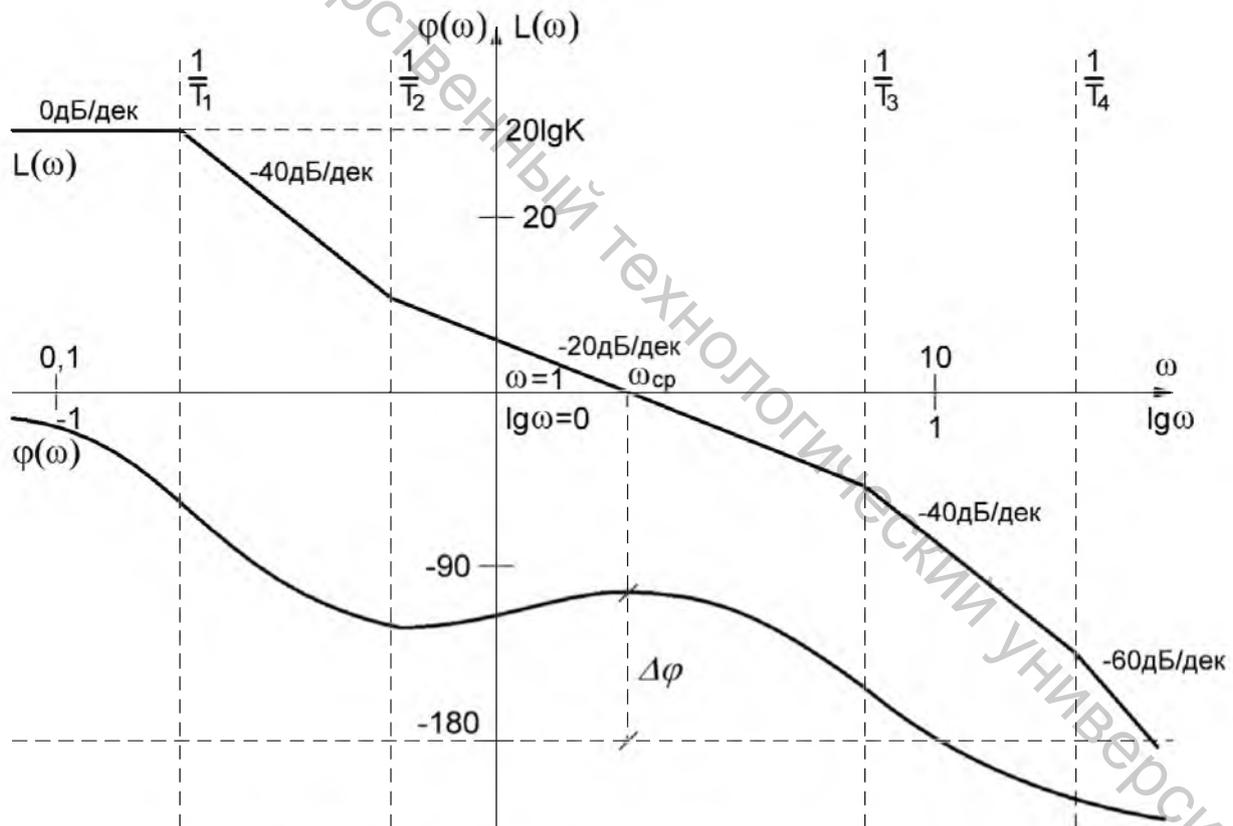


Рисунок 3.6 – ЛАЧХ и ФЧХ устойчивой статической системы

Задача 3.1

Определить устойчивость системы, используя алгебраические и частотные критерии устойчивости. Определить критический коэффициент усиления.

Структурные схемы систем изображены на рисунках 3.7–3.11. Параметры систем для различных вариантов представлены в таблице 3.1.

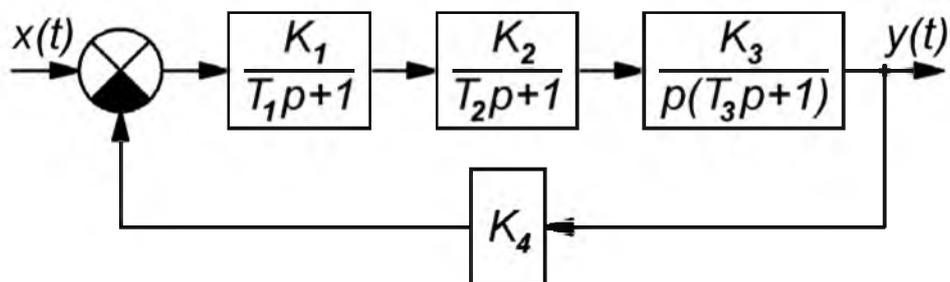


Рисунок 3.7 – Схема № 1

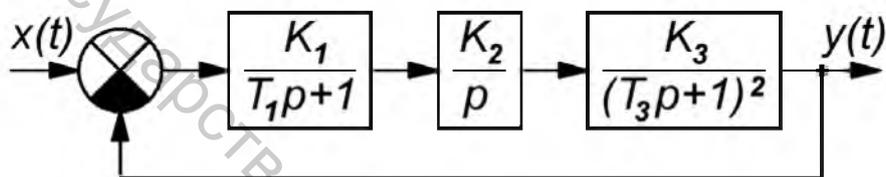


Рисунок 3.8 – Схема № 2

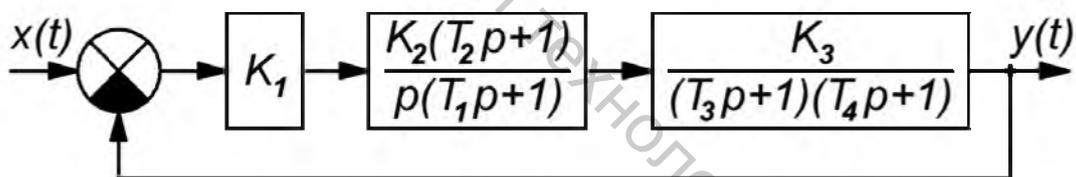


Рисунок 3.9 – Схема № 3

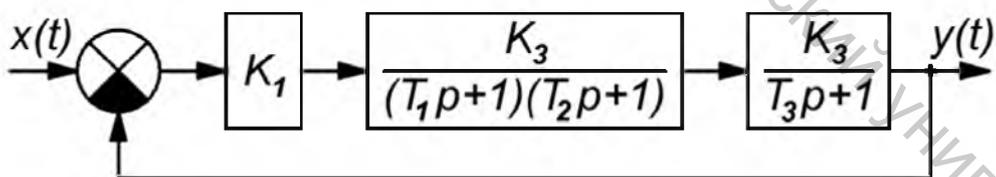


Рисунок 3.10 – Схема № 4

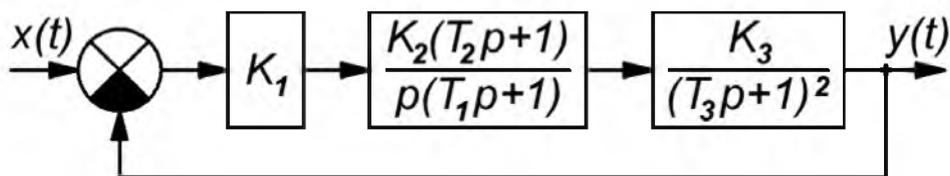


Рисунок 3.11 – Схема № 5

Таблица 3.1 – Варианты заданий

№ варианта	№ схемы	Параметры							
		K_1	K_2	K_3	K_4	T_1	T_2	T_3	T_4
1	1	40	4	0,5	1	0,1	2,5	5	
2	2	12	4	0,5		0,01		1	
3	2	25	5	0,25		0,01		2	
4	3	50	2,5	0,5		0,01	0,05	0,5	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	3	32	3	1		0,1	0,05	0,25	2,5
6	4	20	2,5	1		0,01	0,05	1	
7	4	15	4	0,5		0,05	0,1	2	
8	5	36	2,5	1		0,01	0,1	1	
9	5	24	5	0,4		0,5	0,1	2,5	
10	1	15	2	0,8	1,2	0,02	1	4	
11	1	25	1,5	1	5	0,05	1,5	8	
12	1	10	3	1	2,5	1	0,5	2,5	
13	1	12	1,5	2,5	3	0,5	4,5	0,1	
14	1	8	1,5	4,5	2	1	0,5	1	
15	1	14	2	3	1,5	1,5	5	2,5	
16	2	10	2,5	0,5		0,01		0,5	
17	2	12,5	4	1		1		2,5	
18	2	15	1,5	0,8		0,5		2,5	
19	2	8	4,5	1		0,8		0,05	
20	2	40	0,8	1,5		0,1		0,01	
21	2	25	0,8	1		1		0,01	
22	3	14	3	1,5		0,1	0,05	0,02	1
23	3	18	1,5	0,8		1	0,5	0,1	0,05
24	3	20	1,5	0,75		5	1	0,5	0,01
25	3	16	3,5	1		2,5	0,5	0,25	0,05
26	4	25	4	0,8		0,5	0,1	0,01	
27	4	12	3	0,5		1	0,5	0,05	
28	5	15	1,5	2		2,5	0,5	0,1	
29	5	14	2	1		5	0,1	0,5	
30	1	24	2,5	0,2	1,1	0,01	0,5	2	

Пример решения. Необходимо определить устойчивость и критический коэффициент усиления системы, заданной следующей структурной схемой (рис. 3.12).

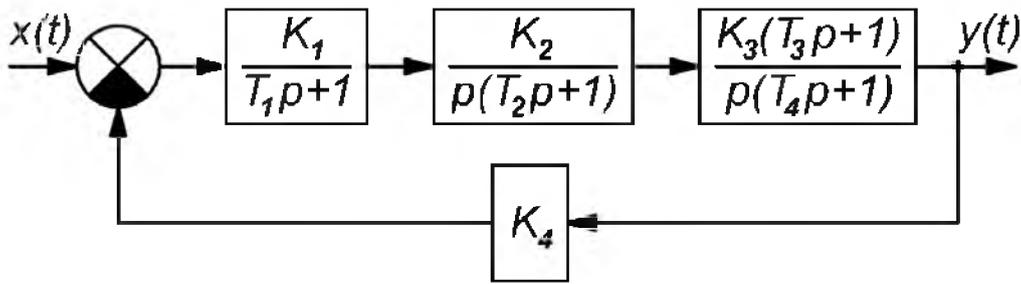


Рисунок 3.12 – Структурная схема САУ

Параметры звеньев: $K_1 = 10$, $K_2 = 5$, $K_3 = 3$, $K_4 = 2$, $T_1 = 0,1c$, $T_2 = 0,05c$, $T_3 = 2c$, $T_4 = 40c$.

Расчет устойчивости по критерию Гурвица

Запишем передаточную функцию системы в разомкнутом состоянии:

$$W_{P43}(p) = \frac{K_1 K_2 K_3 K_4 (T_3 p + 1)}{p (T_1 p + 1) (T_2 p + 1) (T_4 p + 1)}.$$

Эквивалентная передаточная функция системы (в замкнутом состоянии):

$$\begin{aligned} W_{34M}(p) &= \frac{W_{\text{шл}}(p)}{1 + W_{P43}(p)} = \frac{W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p)}{1 + W_{P43}(p)} = \frac{\frac{K_1 K_2 K_3 (T_3 p + 1)}{p (T_1 p + 1) (T_2 p + 1) (T_4 p + 1)}}{1 + \frac{K_1 K_2 K_3 K_4 (T_3 p + 1)}{p (T_1 p + 1) (T_2 p + 1) (T_4 p + 1)}} = \\ &= \frac{K_1 K_2 K_3 (T_3 p + 1)}{p (T_1 p + 1) (T_2 p + 1) (T_4 p + 1) + K_1 K_2 K_3 K_4 (T_3 p + 1)}. \end{aligned}$$

Запишем характеристическое уравнение системы, приравняв знаменатель $W_{34M}(p)$ к 0.

$$p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_4 p + 1) + K_1 K_2 K_3 K_4 (T_3 p + 1) = 0.$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$T_1 T_2 T_4 p^4 + (T_1 T_2 + T_1 T_4 + T_2 T_4) p^3 + (T_1 + T_2 + T_4) p^2 + (K_1 K_2 K_3 K_4 T_3 + 1) p + K_1 K_2 K_3 K_4 = 0.$$

Обозначим $a_4 = T_1 T_2 T_4 = 0,2$; $a_3 = T_1 T_2 + T_1 T_4 + T_2 T_4 = 6,005$; $a_2 = T_1 + T_2 + T_4 = 40,15$; $a_1 = K_1 K_2 K_3 K_4 T_3 + 1 = 601$; $a_0 = K_1 K_2 K_3 K_4 = 300$.

Тогда характеристическое уравнение примет вид:

$$a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$$

Так как все коэффициенты характеристического уравнения положительны, то необходимое условие устойчивости по критерию Гурвица выполняется.

Составим матрицу Гурвица:

$$\begin{array}{cccc} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{array}.$$

Для того чтобы система была устойчива, все определители матрицы Гурвица до $(n-1)$ -го порядка включительно должны быть положительны. Так как порядок системы $n=4$, запишем:

$$\Delta_1 = a_3 = 6,005 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = a_3 a_2 - a_4 a_1 \approx 120,9 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_3 a_2 a_1 - a_3^2 a_0 - a_1^2 a_4 \approx 61843 > 0.$$

Вывод: так как все коэффициенты характеристического уравнения положительны и все определители матрицы Гурвица до $(n-1)$ -го порядка включительно положительны, то система устойчива.

Критический коэффициент усиления $K_{кр}$ найдем из условия $\Delta_i > 0$. При этом в выражения для коэффициентов a_i не будем подставлять $K_{сис}$.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = a_3 a_2 - a_4 a_1 \approx 6,005 \cdot 40,15 - 0,2 \cdot (2K_{сис} + 1) = 240,9 - 0,4K_{сис} > 0;$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_3 a_2 a_1 - a_3^2 a_0 - a_1^2 a_4 = \\ &= 6,005 \cdot 40,15 \cdot (2K_{сис} + 1) - 6,005^2 \cdot K_{сис} - (2K_{сис} + 1)^2 \cdot 0,2 = 240,9 + 445,34K_{сис} - 0,8K_{сис}^2 > 0. \end{aligned}$$

Решив совместно полученную систему неравенств, получим:

$$-0,54 < K_{сис} < 557,21.$$

Таким образом, критическое значение коэффициента усиления системы $K_{кр} = 557,21$.

Расчет устойчивости по критерию Михайлова

Запишем уравнение характеристического вектора, заменяя в характеристическом уравнении p на $j\omega$:

$$D(j\omega) = a_4(j\omega)^4 + a_3(j\omega)^3 + a_2(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + a_0 = a_4\omega^4 - ja_3\omega^3 - a_2\omega^2 + ja_1\omega + a_0.$$

Выделим вещественную и мнимую части:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[D(j\omega)] &= a_4\omega^4 - a_2\omega^2 + a_0; \\ \operatorname{Im}[D(j\omega)] &= -a_3\omega^3 + a_1\omega = \omega(a_1 - a_3\omega^2). \end{aligned}$$

Подставим числовые значения:

$$\operatorname{Re}[D(j\omega)] = 0,2\omega^4 - 40,15\omega^2 + 300; \operatorname{Im}[D(j\omega)] = \omega(601 - 6,005\omega^2).$$

Рассчитаем значения частот, при которых годограф характеристического вектора пересекает оси координат:

$$\operatorname{Re}[D(j\omega)] = 0,2\omega^4 - 40,15\omega^2 + 300 = 0;$$

$$\omega_1^2 = \frac{40,15 + \sqrt{(40,15)^2 - 4 \cdot 0,2 \cdot 300}}{2 \cdot 0,2} = 192,977 \rightarrow \omega_1 = 13,892c^{-1};$$

$$\omega_2^2 = \frac{40,15 - \sqrt{(40,15)^2 - 4 \cdot 0,2 \cdot 300}}{2 \cdot 0,2} = 7,773 \rightarrow \omega_2 = 2,788c^{-1}.$$

$$\operatorname{Im}[D(j\omega)] = \omega(601 - 6,005\omega^2) = 0;$$

$$\omega_3 = 0c^{-1}; \omega_4 = \sqrt{\frac{601}{6,005}} = 10,004c^{-1}.$$

Задавая частоту в интервале $0 < \omega < \infty$, рассчитываем значения вещественной и мнимой части характеристического вектора (табл. 3.2).

Примечание: заполняя таблицу обязательно рассчитать значения вещественной и мнимой части на частотах, где годограф пересекает оси координат, а также в нескольких точках между этими значениями.

Таблица 3.2 – Данные для построения годографа характеристического вектора

ω	0	1	2	2,788	5	7,5	10,004	12,5	13,892	14,5	∞
$\operatorname{Re}[D(j\omega)]$	300	260	143	0	-579	-1326	-1715	-1091	0	699	ω
$\operatorname{Im}[D(j\omega)]$	0	595	1154	1545	2254	1974	0	-4216	-7749	-9592	$-\infty$

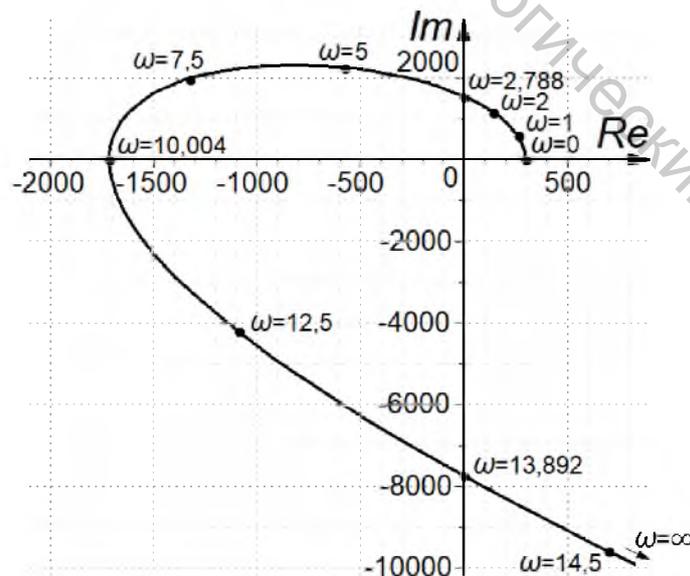


Рисунок 3.13 – Годограф характеристического вектора

Вывод: так как годограф характеристического вектора при изменении частоты от 0 до ∞ , начинаясь при $\omega = 0$ на вещественной положительной

полуоси, обходит против часовой стрелки последовательно 4 квадранта координатной плоскости, то система устойчива.

Расчет устойчивости по критерию Найквиста

Получим выражение для комплексного коэффициента передачи системы в разомкнутом состоянии:

$$\begin{aligned}
 W_{PA3}(j\omega) &= \frac{K_1 K_2 K_3 K_4 (T_3 j\omega + 1)}{j\omega (T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)(T_4 j\omega + 1)} = \\
 &= \frac{K_1 K_2 K_3 K_4 (T_3 j\omega + 1)(-j)(-T_1 j\omega + 1)(-T_2 j\omega + 1)(-T_4 j\omega + 1)}{\omega (T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)(T_4 j\omega + 1)(-T_1 j\omega + 1)(-T_2 j\omega + 1)(-T_4 j\omega + 1)} = \\
 &= \frac{-j K_1 K_2 K_3 K_4 \left[-T_1 T_2 T_3 T_4 \omega^4 - j\omega^3 (T_1 T_2 T_3 + T_1 T_3 T_4 + T_2 T_3 T_4 - T_1 T_2 T_4) \right] +}{\omega (T_1^2 \omega^2 + 1)(T_2^2 \omega^2 + 1)(T_4^2 \omega^2 + 1)} + \\
 &+ \frac{-j K_1 K_2 K_3 K_4 \left[-\omega^2 (-T_1 T_3 - T_2 T_3 - T_3 T_4 + T_1 T_2 + T_1 T_4 + T_2 T_4) + j\omega (T_3 - T_1 - T_2 - T_4) + 1 \right]}{\omega (T_1^2 \omega^2 + 1)(T_2^2 \omega^2 + 1)(T_4^2 \omega^2 + 1)} = \\
 &= \frac{K_1 K_2 K_3 K_4 \left[j T_1 T_2 T_3 T_4 \omega^4 - \omega^3 (T_1 T_2 T_3 + T_1 T_3 T_4 + T_2 T_3 T_4 - T_1 T_2 T_4) \right] +}{\omega (T_1^2 \omega^2 + 1)(T_2^2 \omega^2 + 1)(T_4^2 \omega^2 + 1)} + \\
 &+ \frac{K_1 K_2 K_3 K_4 \left[j\omega^2 (-T_1 T_3 - T_2 T_3 - T_3 T_4 + T_1 T_2 + T_1 T_4 + T_2 T_4) + \omega (T_3 - T_1 - T_2 - T_4) - j \right]}{\omega (T_1^2 \omega^2 + 1)(T_2^2 \omega^2 + 1)(T_4^2 \omega^2 + 1)} = \\
 &= \frac{K_1 K_2 K_3 K_4 \left[-\omega^3 (T_1 T_2 T_3 + T_1 T_3 T_4 + T_2 T_3 T_4 - T_1 T_2 T_4) + \omega (T_3 - T_1 - T_2 - T_4) \right] +}{\omega (T_1^2 \omega^2 + 1)(T_2^2 \omega^2 + 1)(T_4^2 \omega^2 + 1)} + \\
 &+ j \frac{K_1 K_2 K_3 K_4 \left[T_1 T_2 T_3 T_4 \omega^4 + \omega^2 (-T_1 T_3 - T_2 T_3 - T_3 T_4 + T_1 T_2 + T_1 T_4 + T_2 T_4) - 1 \right]}{\omega (T_1^2 \omega^2 + 1)(T_2^2 \omega^2 + 1)(T_4^2 \omega^2 + 1)}.
 \end{aligned}$$

Выделим вещественную и мнимые части:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(\omega) &= \frac{K_1 K_2 K_3 K_4 \left[-\omega^3 (T_1 T_2 T_3 + T_1 T_3 T_4 + T_2 T_3 T_4 - T_1 T_2 T_4) + \omega (T_3 - T_1 - T_2 - T_4) \right]}{\omega (T_1^2 \omega^2 + 1)(T_2^2 \omega^2 + 1)(T_4^2 \omega^2 + 1)}, \\
 \operatorname{Im}(\omega) &= \frac{K_1 K_2 K_3 K_4 \left[T_1 T_2 T_3 T_4 \omega^4 + \omega^2 (-T_1 T_3 - T_2 T_3 - T_3 T_4 + T_1 T_2 + T_1 T_4 + T_2 T_4) - 1 \right]}{\omega (T_1^2 \omega^2 + 1)(T_2^2 \omega^2 + 1)(T_4^2 \omega^2 + 1)}.
 \end{aligned}$$

Подставим числовые значения:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(\omega) &= -\frac{300(11,81\omega^2 + 38,15)}{(0,01\omega^2 + 1)(0,0025\omega^2 + 1)(1600\omega^2 + 1)}; \\
 \operatorname{Im}(\omega) &= \frac{300(0,4\omega^4 - 74,295\omega^2 - 1)}{\omega(0,01\omega^2 + 1)(0,0025\omega^2 + 1)(1600\omega^2 + 1)}.
 \end{aligned}$$

Рассчитаем значения частот, при которых АФЧХ системы в разомкнутом состоянии пересекает оси координат:

$$\operatorname{Re}(\omega) = -\frac{300(11,81\omega^2 + 38,15)}{(0,01\omega^2 + 1)(0,0025\omega^2 + 1)(1600\omega^2 + 1)} = 0;$$

$$11,81\omega^2 + 38,15 = 0.$$

Уравнение не имеет корней.

$$\operatorname{Im}(\omega) = \frac{300(0,4\omega^4 - 74,295\omega^2 - 1)}{\omega(0,01\omega^2 + 1)(0,0025\omega^2 + 1)(1600\omega^2 + 1)} = 0;$$

$$0,4\omega^4 - 74,295\omega^2 - 1 = 0;$$

$$\omega_1^2 = \frac{74,295 + \sqrt{(74,295)^2 + 4 \cdot 0,4}}{2 \cdot 0,4} = 185,75 \rightarrow \omega_1 = 13,63 \text{ c}^{-1};$$

$$\omega_2^2 = \frac{74,295 - \sqrt{(74,295)^2 + 4 \cdot 0,4}}{2 \cdot 0,4} < 0.$$

Задавая частоту в интервале $0 < \omega < \infty$, рассчитываем значения вещественной и мнимой части АФЧХ системы в разомкнутом состоянии (табл. 3.3).

Примечание: заполняя таблицу, обязательно рассчитать значения вещественной и мнимой части на частотах, где АФЧХ пересекает оси координат, а также в нескольких точках между этими значениями.

Таблица 3.3 – Данные для построения АФЧХ системы в разомкнутом состоянии

ω	0	4	5	7,5	10	13,63	20	30	∞
$\operatorname{Re}(\omega)$	-11445	-2,206	-1,883	-1,314	-0,914	-0,538	-0,223	-0,068	0
$\operatorname{Im}(\omega)$	$-\infty$	-2,640	-1,816	-0,727	-0,257	0	0,080	0,055	0

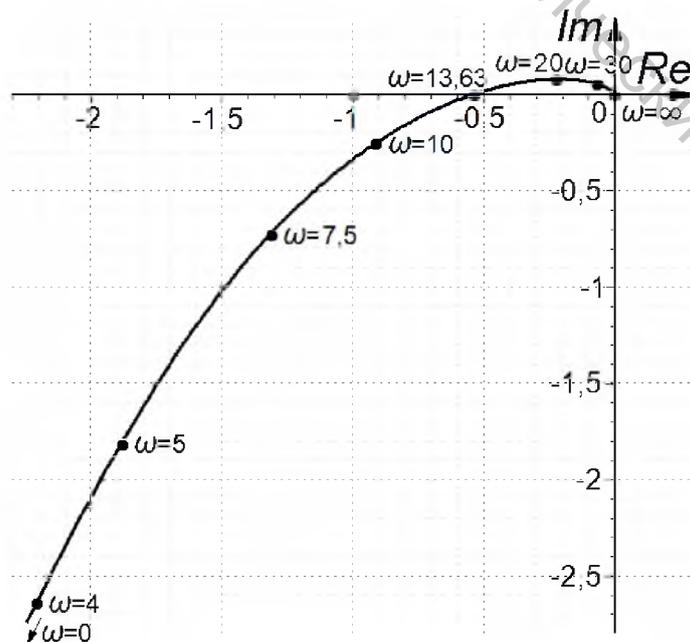


Рисунок 3.14 – АФЧХ системы в разомкнутом состоянии

Вывод: система астатическая. Ее АФЧХ в разомкнутом состоянии, при дополнении ее дугой бесконечного радиуса до положительного отрезка вещественной оси, не охватывает точку с координатами $(-1; 0j)$. Следовательно, система устойчива.

Расчет устойчивости по ЛАЧХ и ФЧХ

Для построения ЛАЧХ системы рассчитаем $20\lg K_{сис}$ и частоты сопряжения звеньев:

$$20\lg K_{сис} = 20\lg(K_1 K_2 K_3 K_4) = 20\lg(10 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2) = 49,5 \text{ дБ};$$

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,1} = 10 \rightarrow \lg \omega_1 = \lg 10 = 1;$$

$$\omega_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0,05} = 20 \rightarrow \lg \omega_2 = \lg 20 = 1,3;$$

$$\omega_3 = \frac{1}{T_3} = \frac{1}{2} = 0,5 \rightarrow \lg \omega_3 = \lg 0,5 = -0,3;$$

$$\omega_4 = \frac{1}{T_4} = \frac{1}{40} = 0,025 \rightarrow \lg \omega_4 = \lg 0,025 = -1,6.$$

Запишем уравнение для ФЧХ:

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \text{arctg}(\omega T_1) - \text{arctg}(\omega T_2) + \text{arctg}(\omega T_3) - \text{arctg}(\omega T_4).$$

Подставим числовые значения:

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \text{arctg}(0,1\omega) - \text{arctg}(0,05\omega) + \text{arctg}(2\omega) - \text{arctg}(40\omega).$$

Таблица 3.4 – Данные для построения ФЧХ

ω	0	0,01	0,02	0,025	0,05	0,1	0,2	0,5
$\lg(\omega)$	$-\infty$	-2	-1,7	-1,6	-1,3	-1	-0,7	-0,3
$\varphi(\omega)$	-90	-110,74	-126,54	-132,35	-148,15	-155,51	-152,79	-136,43
ω	1	2	5	10	20	50	100	∞
$\lg(\omega)$	0	0,3	0,7	1	1,3	1,7	2	∞
$\varphi(\omega)$	-123,71	-120,34	-136,03	-164,28	-199,79	-237,43	-253,25	-270

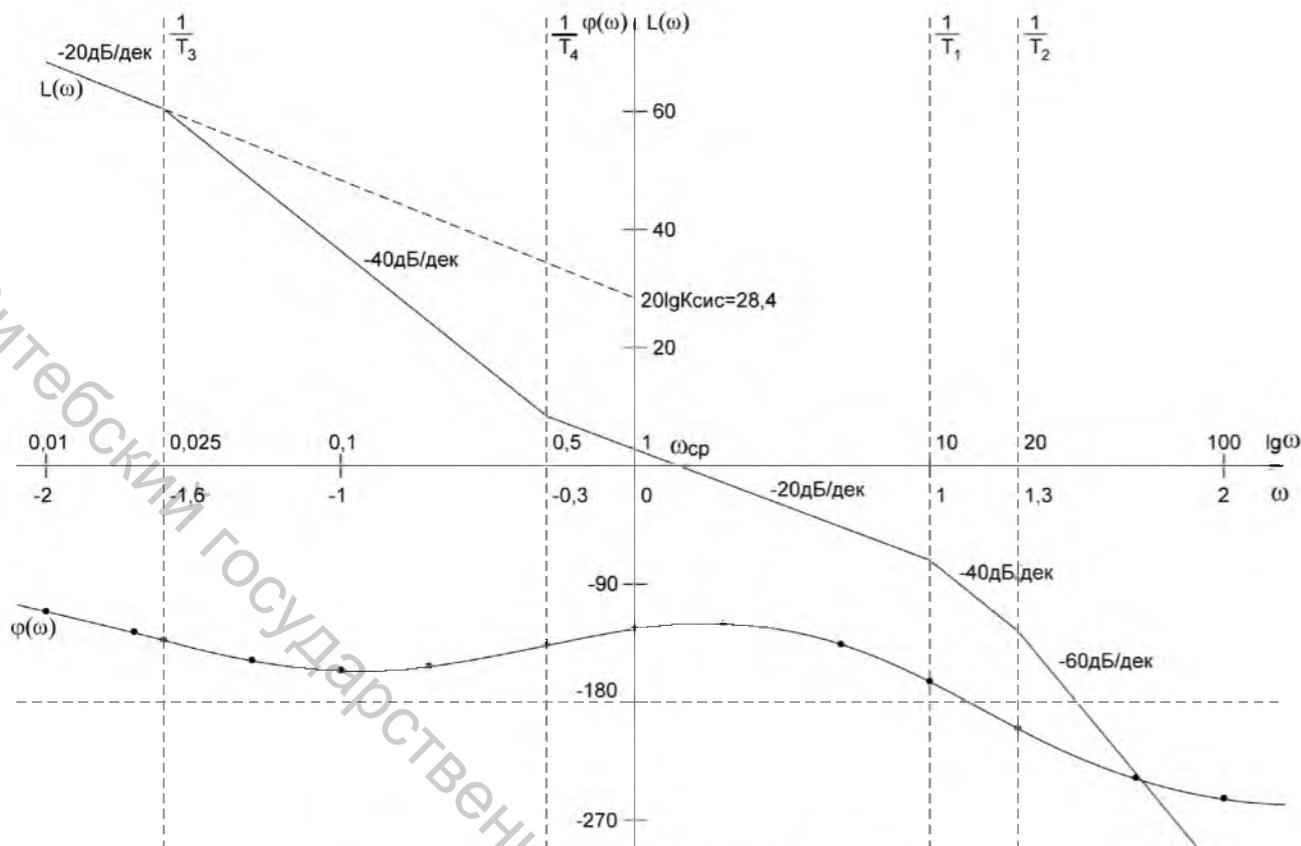


Рисунок 3.15 – ЛАЧХ и ФЧХ системы

Вывод: так как ЛАЧХ пересекает ось частот раньше, чем ФЧХ линию -180° , то система устойчива.

4 МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ САУ

4.1 Критерий абсолютной устойчивости нелинейных систем В.М. Попова

Данный критерий, предложенный в 1960 г. румынским ученым В.М. Поповым, позволяет исследовать абсолютную устойчивость нелинейной системы с одной однозначной статической нелинейностью. Под абсолютной устойчивостью понимается устойчивость в целом при любой форме нелинейности, принадлежащей Гурвицеву углу (рис. 4.1), то есть удовлетворяющей условию:

$$0 \leq \frac{F(x)}{x} \leq \kappa. \quad (4.1)$$

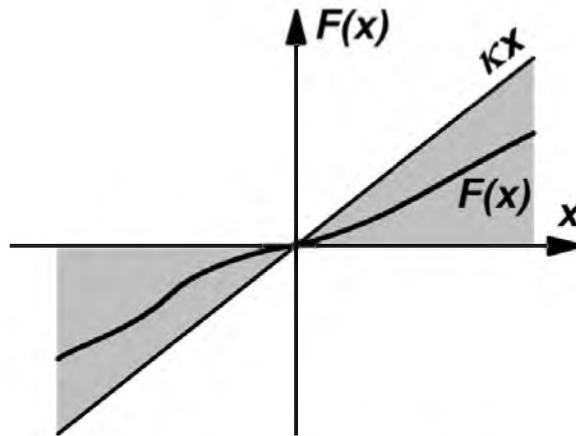


Рисунок 4.1 – Гурвицев угол

Критерий абсолютной устойчивости Попова имеет удобную геометрическую трактовку: *нелинейная САУ будет абсолютно устойчива, если при устойчивой линейной части системы через точку $(-1/k, 0j)$ можно провести хотя бы одну прямую так, чтобы вся видоизмененная частотная характеристика линейной части $W_{лч}^*(j\omega)$ находилась справа от нее.*

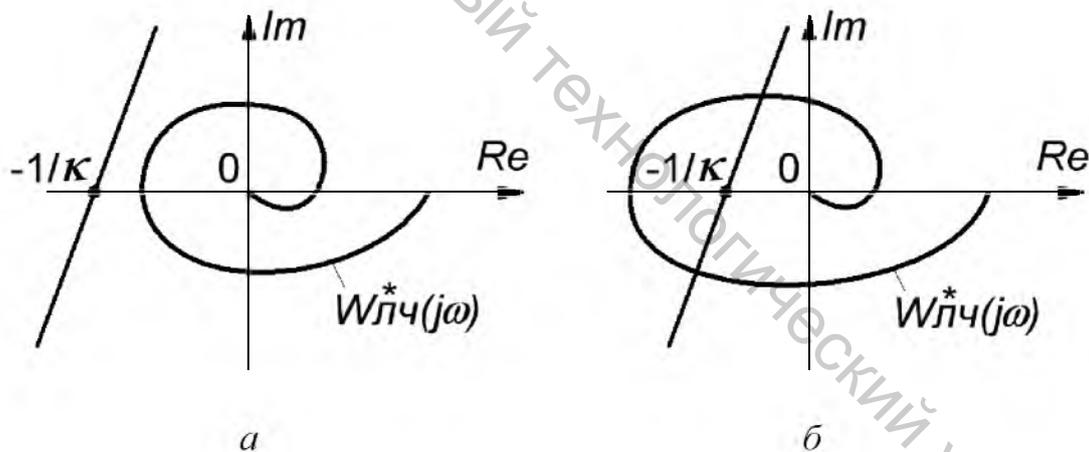


Рисунок 4.2 – Видоизмененная частотная характеристика линейной части системы: *а* – абсолютно устойчивая система; *б* – неустойчивая система

Видоизмененная характеристика линейной части системы строится по выражению:

$$W_{лч}^*(j\omega) = \text{Re}[W_{лч}(j\omega)] + j\omega \text{Im}[W_{лч}(j\omega)]. \quad (4.2)$$

4.2 Гармоническая линеаризация нелинейных элементов

Метод гармонической линеаризации нелинейных элементов используется для исследования нелинейных систем с линейной частью выше третьего порядка. В большинстве систем переходной процесс представляет собой затухающие колебания, поэтому на входе нелинейного элемента по главной обратной связи (ГОС) передаётся периодический сигнал с медленно меняющейся амплитудой и при наличии входного сигнала вместе с постоянной составляющей:

$$\varepsilon(t) = x_0 + A \sin(\omega t). \quad (4.3)$$

Будем считать, что на входе нелинейного элемента за некоторый малый начальный промежуток времени амплитуда и частота неизменны или они соответствуют амплитуде и частоте автоколебаний системы. На выходе НЭ получим периодическую функцию, которую можно разложить в ряд Фурье. При исследовании нелинейных систем чаще всего используют только первую гармоническую составляющую, так как в большинстве случаев линейная часть системы является фильтром низких частот.

Изображение выходного сигнала на выходе гармонически линеаризованного НЭ можно представить в виде:

$$X_{\text{выхНЭ}}(p) = KX_{\text{вхНЭ}}(p) + \left(q(A) + \frac{b(A)}{\omega} p \right) X_{\text{вхНЭ}}(p). \quad (4.4)$$

В этом случае при отсутствии постоянной составляющей на входе мы можем вывести следующую передаточную функцию для НЭ:

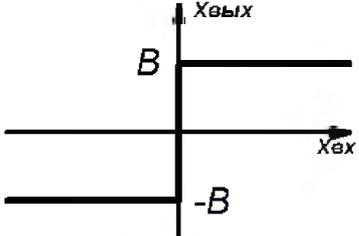
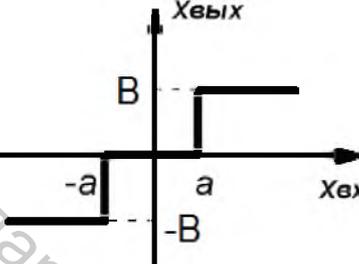
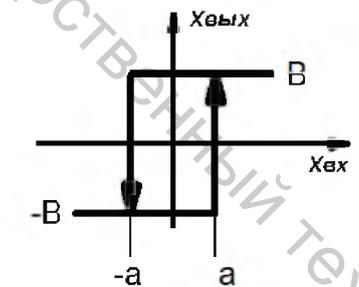
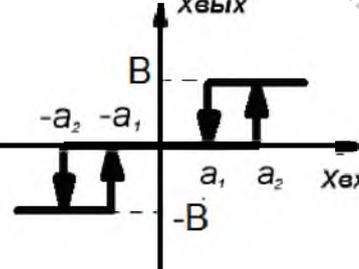
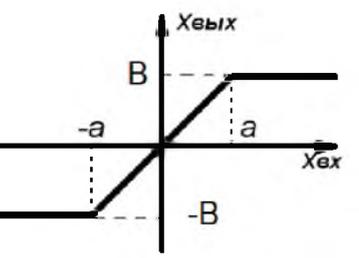
$$J(A, p) = \frac{X_{\text{выхНЭ}}}{X_{\text{вхНЭ}}} = q(A) + \frac{b(A)}{\omega} p, \quad (4.5)$$

где q – коэффициент гармонической линеаризации по синусоидальной составляющей, он зависит от амплитуды сигнала на входе НЭ; b – коэффициент гармонической линеаризации по косинусоидальной составляющей; ω – частота автоколебаний.

Комплексный коэффициент передачи:

$$J(A, \omega) = \frac{X_{\text{выхНЭ}}}{X_{\text{вхНЭ}}} = q(A) + \frac{b(A)}{\omega} j\omega = q(A) + jb(A). \quad (4.6)$$

Таблица 4.1 – Коэффициенты гармонической линейзации для различных нелинейностей

Вид нелинейности	Статическая характеристика	Коэффициенты гармонической линейзации
Идеальное двухпозиционное реле		$q(A) = \frac{4B}{\pi A};$ $b(A) = 0.$
Идеальное трехпозиционное реле		$q(A) = \frac{4B}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \text{ при } A \geq a;$ $b(A) = 0.$
Двухпозиционное реле с гистерезисом		$q(A) = \frac{4B}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \text{ при } A \geq a;$ $b(A) = -\frac{4Ba}{\pi A^2}.$
Трехпозиционное реле с гистерезисом		$q(A) = \frac{2B}{\pi A} \left(\sqrt{1 - \frac{a_1^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{a_2^2}{A^2}} \right)$ <p style="text-align: center;">при $A \geq a_2$;</p> $b(A) = -\frac{2B(a_2 - a_1)}{\pi A^2}.$
Усилитель с ограничением		$q(A) = \frac{4B}{\pi A} \left(\arcsin\left(\frac{a}{A}\right) + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right)$ <p style="text-align: center;">при $A \geq a$;</p> $b(A) = 0.$

4.3 Определение амплитуды и частоты режима автоколебаний

Определение амплитуды и частоты автоколебаний основано на исследовании частотных характеристик нелинейных систем.

Для исследования системы необходимо записать уравнение характеристического вектора:

$$1 + J(A, \omega) \cdot W_{лч}(j\omega) = 0, \quad (4.7)$$

где $W_{лч}(j\omega)$ – комплексный коэффициент передачи линейной части системы, который можно представить в виде:

$$W_{лч}(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}. \quad (4.8)$$

Подставив (4.8) в (4.7), получим:

$$A(j\omega) + J(A, \omega) \cdot B(j\omega) = 0. \quad (4.9)$$

Выделим вещественную и мнимую части:

$$X(A, \omega) + jY(A, \omega) = 0; \quad (4.10)$$

$$\begin{cases} X(A, \omega) = 0 \\ Y(A, \omega) = 0 \end{cases}. \quad (4.11)$$

Если решить эту систему с двумя неизвестными (A, ω), то в случае если будет найдено положительное вещественное решение, будет определена амплитуда и частота возможных автоколебаний.

Для того чтобы выяснить, будет ли режим автоколебаний устойчивым, необходимо взять частные производные для этой системы уравнений и вычислить значение выражения:

$$\left(\frac{\partial X(A, \omega)}{\partial A} \right)^* \cdot \left(\frac{\partial Y(A, \omega)}{\partial \omega} \right)^* - \left(\frac{\partial X(A, \omega)}{\partial \omega} \right)^* \cdot \left(\frac{\partial Y(A, \omega)}{\partial A} \right)^*. \quad (4.12)$$

Звёздочка означает, что после в выражения частных производных надо подставить значения амплитуды и частоты, полученные из решения системы уравнений.

Если выражение (4.12) положительно, то колебания устойчивые, то есть имеется режим автоколебаний.

4.4 Метод И.С. Гольфарба

Данный метод основан на графическом решении уравнения (4.7), которое можно записать в виде:

$$-\frac{1}{J(A, \omega)} = W_{\text{ЛЧ}}(j\omega). \quad (4.13)$$

Для определения режима колебаний необходимо построить АФЧХ линейной части и отрицательную инверсную характеристику НЭ $-\frac{1}{J(A, \omega)}$. Точки пересечения этих графиков определяют параметры колебаний (амплитуду и частоту).

Устойчив или нет режим этих колебаний определяется следующим образом: если, двигаясь по инверсной отрицательной характеристике НЭ в сторону увеличения амплитуды, мы выходим из области, охваченной АФЧХ линейной части, то режим колебаний – устойчивый (имеется режим автоколебаний).

На рисунке 4.3 в точке С – режим устойчивых автоколебаний, в точке В – нет.

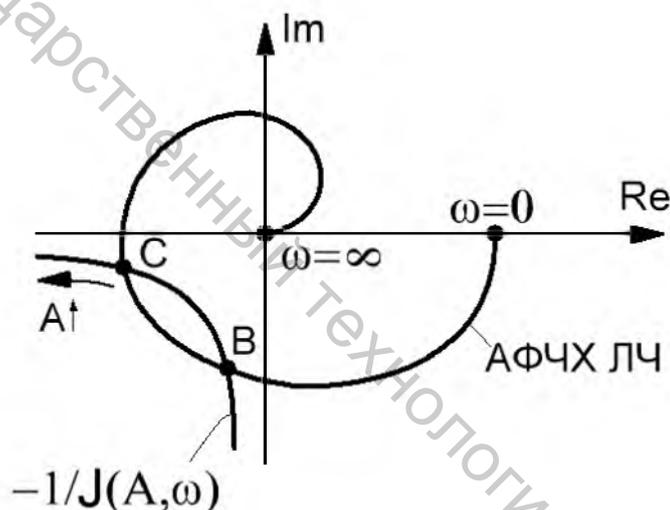


Рисунок 4.3 – Графическое решение характеристического уравнения

Если нет пересечения АФЧХ линейной части и отрицательной инверсной характеристики НЭ, то режима автоколебаний нет.

Для однозначной симметричной нелинейной характеристики инверсная частотная характеристика НЭ совпадает с отрицательным отрезком вещественной оси.

Если нелинейная характеристика содержит зону неоднозначности (гистерезиса), то для, например, двухпозиционной релейной характеристики инверсная частотная характеристика проходит параллельно отрицательного отрезка вещественной оси и отстаёт от него на некоторую величину.

Задача 4.1

Пример решения. Определить, является ли абсолютно устойчивой нелинейная система, структурная схема которой представлена на рисунке 4.4.

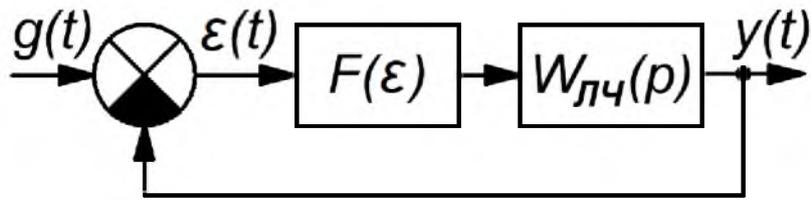


Рисунок 4.4 – Структурная схема нелинейной САУ

Передаточная функция линейной части системы:

$$W_{лч}(p) = \frac{K(T_1 p + 1)}{p(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}$$

Статическая характеристика нелинейного элемента (НЭ) и параметры элементов системы представлены в таблице 4.2.

Таблица 4.2 – Параметры элементов системы

№ варианта	Статическая характеристика НЭ	B	a_1	a_2	K	T_1	T_2	T_3
1		1	1	-	2	0,25	1	1,5
2		2	1	-	2,5	0,5	2,5	5
3		2	1	-	6	0,1	1	2,5
4		1	0,5	-	3	0,1	0,5	5
5		1	0,5	-	1	0,01	0,5	1
6		1	0,4	-	4	0,02	0,1	0,5
7		0,5	0,2	-	5	0,1	0,5	1
8		1	0,8	-	1,5	0,4	1	2
9		1	1	-	4	0,2	2	8
10		1	0,75	-	1	0,3	1	5
11		2	1	-	2	0,5	2	5
12		1	0,5	-	2,5	0,01	0,2	1
13		1	0,6	-	3	0,05	0,2	0,8
14		4	1	-	1,5	0,03	0,5	2
15		2	1	-	2,5	0,75	2,5	5
16		1	1	-	1,5	0,1	0,8	2
17		1	0,4	0,8	2	0,3	1	1,5
18		1	0,4	1	3	1,5	5	10
19		1,5	0,3	0,75	4	0,01	0,1	0,8
20		2	0,5	1	2	0,2	1	2
21		1	0,2	0,4	5	0,1	0,8	1,5
22		1	0,5	1	1	0,5	1,5	4
23		2	0,8	1,6	2,5	0,1	0,5	1
24		1	0,35	0,7	1,5	0,05	0,25	0,8
25		1	0,6	1,2	2	0,05	1	5
26		1,5	0,5	1	5	0,02	0,5	1
27		2	1	1,5	1	0,1	0,6	2
28		1	0,5	0,8	6	0,03	1	3
29		1	0,5	1	2	0,25	0,75	1
30		2	0,8	1,5	4	0,04	1	2,5

Пример решения. Определить, является ли абсолютно устойчивой нелинейная система, структурная схема которой представлена на рисунке 4.4.

Передаточная функция линейной части системы:

$$W_{лч}(p) = \frac{K}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}.$$

Статическая характеристика нелинейного элемента (НЭ) представлена на рисунке 4.5.

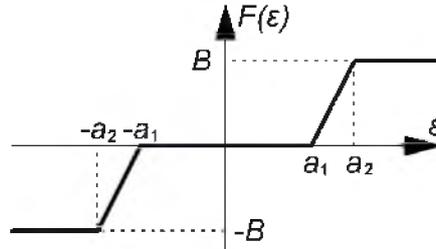


Рисунок 4.5 – Статическая характеристика НЭ

Параметры элементов системы: $K = 2$, $T_1 = 0,1c$, $T_2 = 0,25c$, $T_3 = 0,5c$, $B = 1$, $a_1 = 0,5$, $a_2 = 1$.

Нелинейность должна удовлетворять условию (4.1). Минимальное значение κ :

$$\kappa \equiv \frac{B}{a_2} = \frac{1}{1} = 1.$$

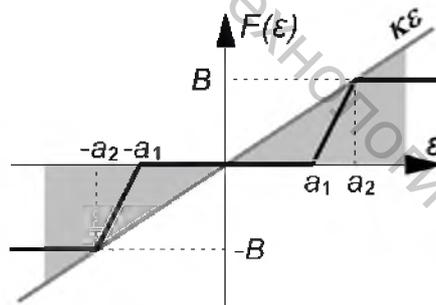


Рисунок 4.6 – Гурвицев угол

Определим выражение для комплексного коэффициента передачи линейной части системы:

$$\begin{aligned} W_{лч}(j\omega) &= \frac{K}{j\omega(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)(T_3 j\omega + 1)} = \\ &= \frac{K(-j)(-T_1 j\omega + 1)(-T_2 j\omega + 1)(-T_3 j\omega + 1)}{j\omega(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)(T_3 j\omega + 1)(-j)(-T_1 j\omega + 1)(-T_2 j\omega + 1)(-T_3 j\omega + 1)} = \\ &= \frac{K(T_1 T_2 T_3 \omega^3 + j(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)\omega^2 - (T_1 + T_2 + T_3)\omega - j)}{\omega(T_1^2 \omega^2 + 1)(T_2^2 \omega^2 + 1)(T_3^2 \omega^2 + 1)} = \\ &= \frac{K(T_1 T_2 T_3 \omega^2 - T_1 - T_2 - T_3)}{(T_1^2 \omega^2 + 1)(T_2^2 \omega^2 + 1)(T_3^2 \omega^2 + 1)} + j \frac{K((T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)\omega^2 - 1)}{\omega(T_1^2 \omega^2 + 1)(T_2^2 \omega^2 + 1)(T_3^2 \omega^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Тогда видоизмененная частотная характеристика:

$$W_{ЛЧ}^*(j\omega) = \operatorname{Re}[W_{ЛЧ}(j\omega)] + j\omega \operatorname{Im}[W_{ЛЧ}(j\omega)] = \\ = \frac{K(T_1T_2T_3\omega^2 - T_1 - T_2 - T_3)}{(T_1^2\omega^2 + 1)(T_2^2\omega^2 + 1)(T_3^2\omega^2 + 1)} + j \frac{K((T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3)\omega^2 - 1)}{(T_1^2\omega^2 + 1)(T_2^2\omega^2 + 1)(T_3^2\omega^2 + 1)} = \operatorname{Re}^*(\omega) + j \operatorname{Im}^*(\omega).$$

Подставим числовые значения:

$$\operatorname{Re}^*(\omega) = \frac{K(T_1T_2T_3\omega^2 - T_1 - T_2 - T_3)}{(T_1^2\omega^2 + 1)(T_2^2\omega^2 + 1)(T_3^2\omega^2 + 1)} = \frac{2(0,0125\omega^2 - 0,85)}{(0,01\omega^2 + 1)(0,0625\omega^2 + 1)(0,25\omega^2 + 1)};$$

$$\operatorname{Im}^*(\omega) = \frac{K((T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3)\omega^2 - 1)}{(T_1^2\omega^2 + 1)(T_2^2\omega^2 + 1)(T_3^2\omega^2 + 1)} = \frac{2(0,2\omega^2 - 1)}{(0,01\omega^2 + 1)(0,0625\omega^2 + 1)(0,25\omega^2 + 1)}.$$

Рассчитаем значения частот, при которых видоизмененная частотная характеристика системы пересекает оси координат:

$$\operatorname{Re}^*(\omega) = \frac{2(0,0125\omega^2 - 0,85)}{(0,01\omega^2 + 1)(0,0625\omega^2 + 1)(0,25\omega^2 + 1)} = 0;$$

$$0,0125\omega^2 - 0,85 = 0; \omega_1^2 = 68 \rightarrow \omega_1 = 8,246c^{-1}.$$

$$\operatorname{Im}^*(\omega) = \frac{2(0,2\omega^2 - 1)}{(0,01\omega^2 + 1)(0,0625\omega^2 + 1)(0,25\omega^2 + 1)} = 0;$$

$$0,2\omega^2 - 1 = 0; \omega_2^2 = 5 \rightarrow \omega_2 = 2,236c^{-1}.$$

Задавая частоту в интервале $0 < \omega < \infty$, рассчитываем значения вещественной и мнимой части видоизмененной частотной характеристики линейной части системы (табл. 4.3).

Таблица 4.3 – Данные для построения видоизмененной частотной характеристики линейной части системы

ω	0	0,8	1,5	2,236	3	4	6	8,246	11	∞
$\operatorname{Re}^*(\omega)$	-1,7	-1,387	-0,902	-0,508	-0,266	-0,112	-0,018	0	0,002	0
$\operatorname{Im}^*(\omega)$	-2	-1,436	-0,604	0	0,289	0,379	0,281	0,159	0,078	0

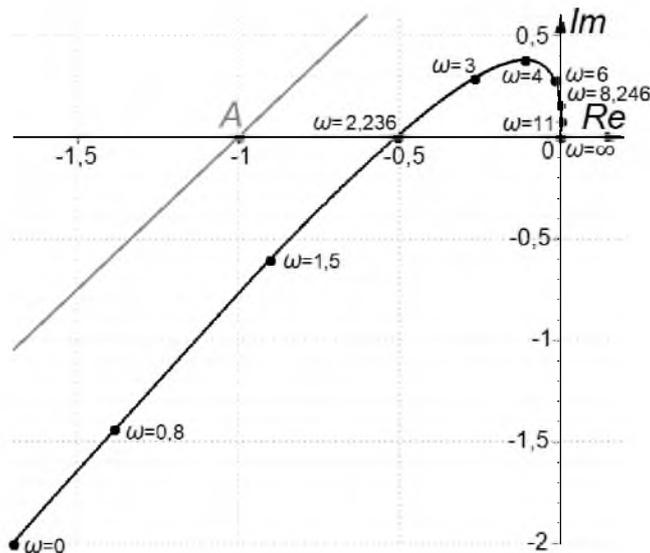


Рисунок 4.7 – Видоизмененная частотная характеристика линейной части системы

Через точку А, характеризующую Гурвицев угол, можно провести прямую так, чтобы видоизмененная частотная характеристика вся лежала справа от нее. Следовательно, исследуемая нелинейная система абсолютно устойчива.

Задача 4.2

Определить наличие и параметры автоколебаний в нелинейной системе методом гармонической линеаризации. Структурная схема системы представлена на рисунке 4.8. Вид и параметры нелинейных элементов и линейной части системы для различных вариантов приведены в таблице 4.4.

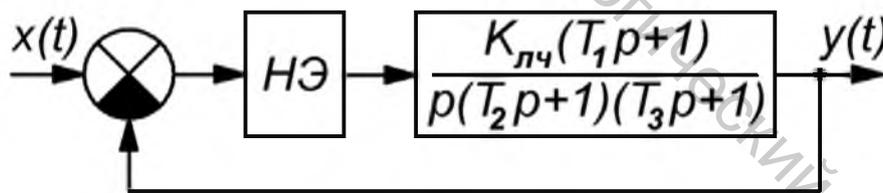
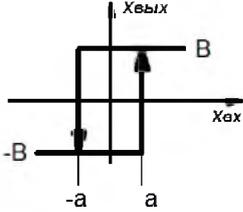
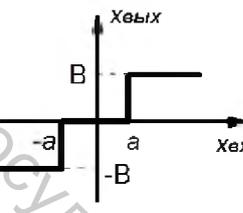
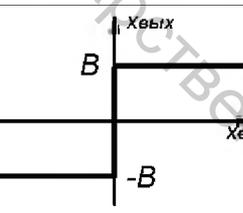


Рисунок 4.8 – Структурная схема САУ

Таблица 4.4 – Варианты заданий

№ варианта	Статическая характеристика НЭ	B	a	$K_{лч}$	T_1	T_2	T_3
1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	0,5	25	2	0,5	5
2		1	1	20	1	0,2	2,5
3		1	0,6	32	2,5	0,4	3
4		1	0,25	15	0,5	1,5	2,5
5		1	0,4	20	0,1	0,5	2,5
6		1	0,8	12,5	0,75	1	2,5
7		1	1	16	1	5	7,5
8		1	1,5	18	0,4	1	0,8

Окончание таблицы 4.4

1	2	3	4	5	6	7	8
9		1	1	10	1	0,5	2,5
10		1	0,5	25	2,5	0,5	10
11		1	0,4	32	0,5	1	0,07
12		1	0,25	12	0,5	4,5	0,8
13		1	0,4	14	1	0,9	1,8
14		1	0,6	16	0,75	2,5	5
15		1	0,8	18	1,5	12,5	5
16		1	0,5	32	2,5	1	5
17		1	0,5	40	0,5	1	5
18		1	1	35	0,05	0,5	1
19		2	1	45	0,08	0,5	0,01
20		2	0,5	25	0,5	1	0,1
21		1	0,4	12,5	0,2	0,8	1,5
22		1,5	0,8	15	0,4	1,5	2,5
23		2	1	8	0,8	5	7,5
24		1	1,2	24	0,5	2,5	0,05
25	2	0,6	18	0,5	0,75	0,05	
26		1		15	0,5	0,1	1,5
27		2		7,5	0,25	0,5	2,5
28		1		12	0,75	2,5	12,5
29		2		18	0,05	0,5	0,75
30		1		20	0,01	0,5	1,25

Пример решения. Определить наличие и параметры автоколебаний в нелинейной системе методом гармонической линеаризации. Структурная схема системы представлена на рисунке 4.9.

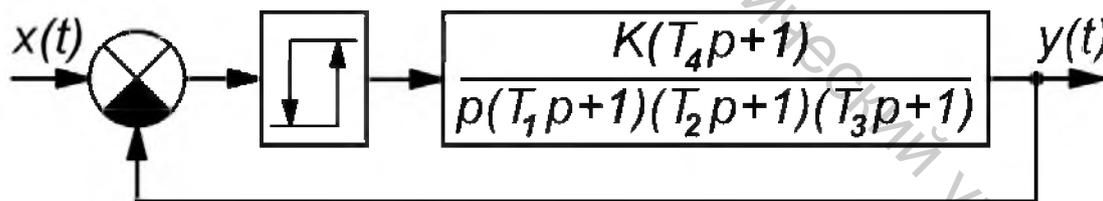


Рисунок 4.9 – Структурная схема САУ

Параметры линейной части: $K=40$, $T_1=0,2c$, $T_2=1c$, $T_3=20c$, $T_4=2c$.
 Параметры нелинейного элемента: $B=2$, $a=0,8$.

Для определения наличия и параметров автоколебаний запишем уравнение характеристического вектора:

$$1 + J(A, \omega) \cdot W_{лч}(j\omega) = 0. \quad (4.14)$$

Передаточная функция гармонически линеаризованного двухпозиционного реле с гистерезисом:

$$J(A, \omega) = \frac{4B}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} - j \frac{4Ba}{\pi A^2}. \quad (4.15)$$

Комплексный коэффициент передачи линейной части:

$$W_{лч}(p) = \frac{K(T_4 j\omega + 1)}{j\omega(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)(T_3 j\omega + 1)}. \quad (4.16)$$

С учетом (4.15) и (4.16) уравнение (4.14) примет вид:

$$\begin{aligned} & 1 + \left(\frac{4B}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} - j \frac{4Ba}{\pi A^2} \right) \frac{K(T_4 j\omega + 1)}{j\omega(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)(T_3 j\omega + 1)} = 0; \\ & j\omega(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)(T_3 j\omega + 1) + \frac{4B}{\pi A^2} (\sqrt{A^2 - a^2} - ja) \cdot K(T_4 j\omega + 1) = 0; \\ & T_1 T_2 T_3 \cdot (j\omega)^4 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) \cdot (j\omega)^3 + (T_1 + T_2 + T_3) \cdot (j\omega)^2 + j\omega + \\ & + j \frac{4B}{\pi A^2} K T_4 \omega \sqrt{A^2 - a^2} + \frac{4Ba}{\pi A^2} K T_4 \omega + \frac{4B}{\pi A^2} K \sqrt{A^2 - a^2} - j \frac{4Ba}{\pi A^2} K = 0; \\ & T_1 T_2 T_3 \omega^4 - j(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) \omega^3 - (T_1 + T_2 + T_3) \omega^2 + j\omega + \\ & + j \frac{4B}{\pi A^2} K T_4 \omega \sqrt{A^2 - a^2} + \frac{4Ba}{\pi A^2} K T_4 \omega + \frac{4B}{\pi A^2} K \sqrt{A^2 - a^2} - j \frac{4Ba}{\pi A^2} K = 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Выделим вещественную и мнимую части в уравнении (4.17):

$$\begin{aligned} & T_1 T_2 T_3 \omega^4 - (T_1 + T_2 + T_3) \omega^2 + \frac{4Ba}{\pi A^2} K T_4 \omega + \frac{4B}{\pi A^2} K \sqrt{A^2 - a^2} + \\ & + j \left(-(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) \omega^3 + \omega + \frac{4B}{\pi A^2} K T_4 \omega \sqrt{A^2 - a^2} - \frac{4Ba}{\pi A^2} K \right) = 0; \\ & \begin{cases} X(A, \omega) = T_1 T_2 T_3 \omega^4 - (T_1 + T_2 + T_3) \omega^2 + \frac{4Ba}{\pi A^2} K T_4 \omega + \frac{4B}{\pi A^2} K \sqrt{A^2 - a^2} = 0 \\ Y(A, \omega) = -(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) \omega^3 + \omega + \frac{4B}{\pi A^2} K T_4 \omega \sqrt{A^2 - a^2} - \frac{4Ba}{\pi A^2} K = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Подставим числовые значения в (4.18):

$$\begin{cases} X(A, \omega) = 4\omega^4 - 21,2\omega^2 + \frac{512}{\pi A^2} \omega + \frac{320}{\pi A^2} \sqrt{A^2 - 0,64} = 0 \\ Y(A, \omega) = -24,3\omega^3 + \omega + \frac{640}{\pi A^2} \omega \sqrt{A^2 - 0,64} - \frac{256}{\pi A^2} = 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

Решив систему уравнений (4.19), получим единственную положительную вещественную пару корней: $A=6,296$, $\omega=1,137$.

Проверим на устойчивость режим колебаний с найденными параметрами, подставив полученное решение в выражение (4.12):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial X(A, \omega)}{\partial A} \right)^* &= -\frac{1024\omega}{\pi A^3} + \frac{320}{\pi A \sqrt{A^2 - 0,64}} - \frac{640}{\pi A^3} \sqrt{A^2 - 0,64} = -3,992; \\ \left(\frac{\partial Y(A, \omega)}{\partial \omega} \right)^* &= -72,6\omega^2 + 1 + \frac{640}{\pi A^2} \sqrt{A^2 - 0,64} = -60,766; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial X(A, \omega)}{\partial \omega}\right)^* &= 16\omega^3 - 42,4\omega + \frac{512}{\pi A^2} = -20,578; \\ \left(\frac{\partial Y(A, \omega)}{\partial \omega}\right)^* &= -\frac{1280}{\pi A^3} \omega \sqrt{A^2 - 0,64} + \frac{640\omega}{\pi A \sqrt{A^2 - 0,64}} + \frac{512}{\pi A^3} = -5,048; \\ \left(\frac{\partial X(A, \omega)}{\partial A}\right)^* \cdot \left(\frac{\partial Y(A, \omega)}{\partial \omega}\right)^* - \left(\frac{\partial X(A, \omega)}{\partial \omega}\right)^* \cdot \left(\frac{\partial Y(A, \omega)}{\partial A}\right)^* &= -3,992 \cdot (-60,766) - \\ &= -(-20,578) \cdot (-5,048) = 138,7 > 0. \end{aligned}$$

Так как выражение (4.12) положительно, то режим автоколебаний с параметрами $A=6,296$, $\omega=1,137$ устойчив.

Определим наличие и параметры автоколебаний методом Гольдфарба.

Получим выражение для комплексного коэффициента передачи линейной части системы:

$$\begin{aligned} W_{PA3}(j\omega) &= \frac{K(T_4 j\omega + 1)}{j\omega(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)(T_3 j\omega + 1)} = \\ &= \frac{K(T_4 j\omega + 1)(-j)(-T_1 j\omega + 1)(-T_2 j\omega + 1)(-T_3 j\omega + 1)}{\omega(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)(T_3 j\omega + 1)(-T_1 j\omega + 1)(-T_2 j\omega + 1)(-T_3 j\omega + 1)} = \\ &= \frac{K[jT_1 T_2 T_3 T_4 \omega^4 + (T_1 T_2 T_3 - T_1 T_3 T_4 - T_2 T_3 T_4 - T_1 T_2 T_4)\omega^3] +}{\omega(T_1^2 \omega^2 + 1)(T_2^2 \omega^2 + 1)(T_3^2 \omega^2 + 1)} + \\ &+ \frac{K[j(T_1 T_3 + T_2 T_3 - T_3 T_4 + T_1 T_2 - T_1 T_4 - T_2 T_4)\omega^2 + \omega(T_4 - T_1 - T_2 - T_3) - 1]}{\omega(T_1^2 \omega^2 + 1)(T_2^2 \omega^2 + 1)(T_3^2 \omega^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Выделим вещественную и мнимые части:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\omega) &= \frac{K[\omega^3(T_1 T_2 T_3 - T_1 T_3 T_4 - T_2 T_3 T_4 - T_1 T_2 T_4) + \omega(T_4 - T_1 - T_2 - T_3)]}{\omega(T_1^2 \omega^2 + 1)(T_2^2 \omega^2 + 1)(T_3^2 \omega^2 + 1)}, \\ \operatorname{Im}(\omega) &= \frac{K[T_1 T_2 T_3 T_4 \omega^4 + (T_1 T_3 + T_2 T_3 - T_3 T_4 + T_1 T_2 - T_1 T_4 - T_2 T_4)\omega^2 - 1]}{\omega(T_1^2 \omega^2 + 1)(T_2^2 \omega^2 + 1)(T_3^2 \omega^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Подставим числовые значения:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\omega) &= -\frac{40(44,4\omega^2 + 19,2)}{(0,04\omega^2 + 1)(\omega^2 + 1)(400\omega^2 + 1)}; \\ \operatorname{Im}(\omega) &= \frac{40(8\omega^4 - 18,2\omega^2 - 1)}{\omega(0,04\omega^2 + 1)(\omega^2 + 1)(400\omega^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Рассчитаем значения частот, при которых АФЧХ линейной части системы пересекает оси координат:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\omega) &= -\frac{40(44,4\omega^2 + 19,2)}{(0,04\omega^2 + 1)(\omega^2 + 1)(400\omega^2 + 1)} = 0; \\ 44,4\omega^2 + 19,2 &= 0. \end{aligned}$$

Уравнение не имеет корней.

$$\operatorname{Im}(\omega) = \frac{40(8\omega^4 - 18,2\omega^2 - 1)}{\omega(0,04\omega^2 + 1)(\omega^2 + 1)(400\omega^2 + 1)} = 0;$$

$$8\omega^4 - 18,2\omega^2 - 1 = 0;$$

$$\omega_1^2 = \frac{18,2 + \sqrt{(18,2)^2 + 4 \cdot 8}}{2 \cdot 8} = 2,329 \rightarrow \omega_1 = 1,526c^{-1};$$

$$\omega_2^2 = \frac{18,2 - \sqrt{(18,2)^2 + 4 \cdot 8}}{2 \cdot 8} < 0.$$

Задавая частоту в интервале $0 < \omega < \infty$, рассчитываем значения вещественной и мнимой части АФЧХ линейной части системы (табл. 4.5).

Таблица 4.5 – Данные для построения АФЧХ линейной части системы

ω	0	1	1,137	1,526	2	2,5
$\operatorname{Re}(\omega)$	-768	-3,057	-2,452	-1,445	8	-0,523
$\operatorname{Im}(\omega)$	$-\infty$	-0,537	-0,314	0	0,117	0,140
ω	3	4	5	7,5	10	∞
$\operatorname{Re}(\omega)$	-0,342	-0,164	-0,087	-0,024	-0,009	0
$\operatorname{Im}(\omega)$	0,132	0,098	0,0700	0,031	0,015	0

Отрицательная инверсная характеристика НЭ:

$$-\frac{1}{J(A, \omega)} = \frac{-1}{\frac{4B}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} - j \frac{4Ba}{\pi A^2}} = \frac{-\pi A^2}{4B(\sqrt{A^2 - a^2} - ja)} = \frac{-\pi A^2(\sqrt{A^2 - a^2} + ja)}{4B(\sqrt{A^2 - a^2} - ja)(\sqrt{A^2 - a^2} + ja)};$$

$$-\frac{1}{J(A, \omega)} = \frac{-\pi(\sqrt{A^2 - a^2} + ja)}{4B} \quad (4.20)$$

Подставим числовые значения:

$$-\frac{1}{J(A, \omega)} = -0,125\pi\sqrt{A^2 - 0,64} - 0,1\pi j.$$

Задавая амплитуду сигнала на входе НЭ в интервале $a < A < \infty$, рассчитываем значения вещественной и мнимой части инверсной отрицательной характеристики НЭ системы (табл. 4.6).

Таблица 4.6 – Данные для построения АФЧХ линейной части системы

A	0,8	1	2	3	4	5	6,296	7	8	∞
$\operatorname{Re}\left[-\frac{1}{J(A, \omega)}\right]$	0	-0,236	-0,720	-1,135	-1,539	-1,938	-2,452	-2,731	-3,126	$-\infty$
$\operatorname{Im}\left[-\frac{1}{J(A, \omega)}\right]$	-0,314	-0,314	-0,314	-0,314	-0,314	-0,314	-0,314	-0,314	-0,314	-0,314

Для определения режима колебаний необходимо построим АФЧХ линейной части системы и отрицательную инверсную характеристику НЭ в одной системе координат (рис. 4.10). Точка пересечения этих графиков определяет параметры колебаний $A=6,296$, $\omega=1,137$. Так как двигаясь по инверсной отрицательной характеристике НЭ в сторону увеличения амплитуды, мы выходим из области, охваченной АФЧХ линейной части, то режим колебаний – устойчивый.

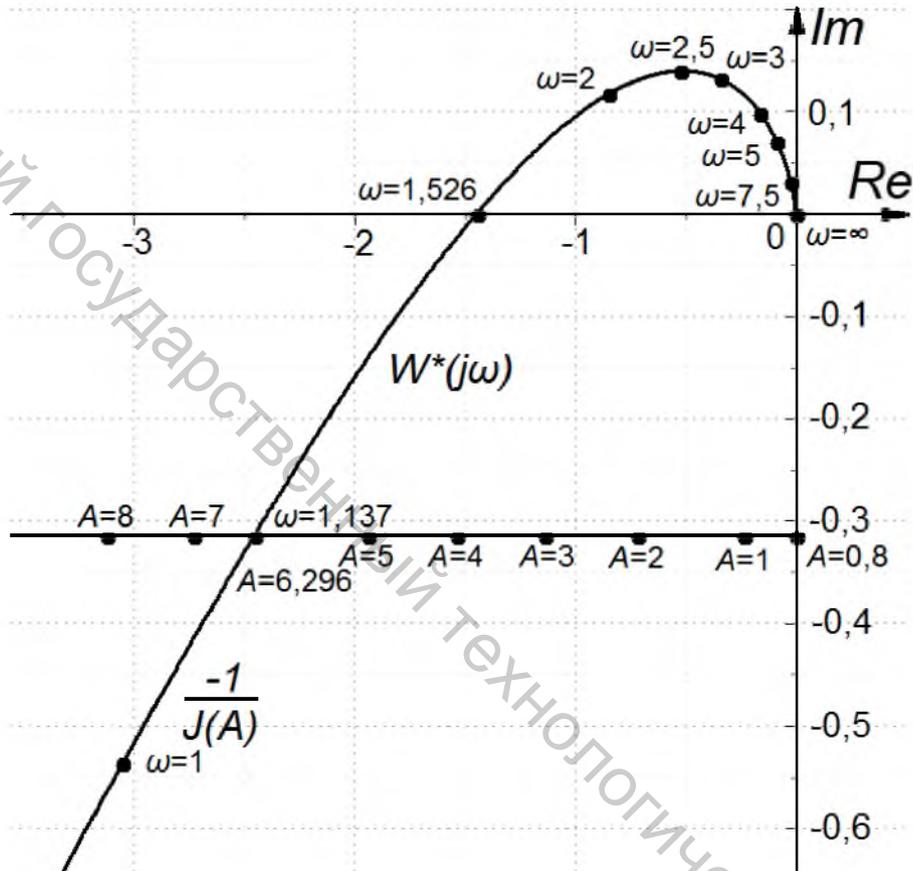


Рисунок 4.10 – АФЧХ линейной части системы и отрицательная инверсная характеристика НЭ

Учебное издание

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Методические указания к практическим занятиям

Составители:

Соколова Анна Сергеевна
Кузнецов Андрей Александрович
Мурычева Виктория Владимировна

Редактор *Т.А. Осипова*
Корректор *Т.А. Осипова*
Компьютерная верстка *А.С. Соколова*

Подписано к печати 02.10.2019. Формат 60x90¹/₁₆. Усл. печ. листов 3,7.
Уч.-изд. листов 4,5. Тираж 30 экз. Заказ № 293.

Учреждение образования

«Витебский государственный технологический университет»
210038, г. Витебск, Московский пр., 72.

Отпечатано на ризографе учреждения образования

«Витебский государственный технологический университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1497 от 30 мая 2017 г.