

01.04.04 / Р.Ф. Мусин. – Москва, 1985. – 139 с. : ил.

5. Дифференциация клинических вариантов шизофрении на основе показателей электродермальной активности / С. А. Ягода, В. В. Иванченко, К. И. Бакуменко, К. С. Садовничий // Медицинский вестник Северного Кавказа, № 3. – 2011.
6. Крамер, Ф. Учебник по электроакупунктуре в 2-х т. – М.: Имедис, 1995. – 328 с.
7. Особенности методов исследования электрокожных характеристик / О. П. Страхова, А. А. Рыжов // Медицина и экология, № 2. – 2014. – С. 14–18.
8. Смородинов, А. В. Электропроводность биологически активных точек на кожных покровах трупа человека / А. В. Смородинов // Вестник новых медицинских технологий, Т. XIV, № 4. – 2007. – С. 60.

УДК 539.3

МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

**Федосеев Г.Н., к.т.н., доц., Воланцевич Е.А., студ.,
Шеленговский В.О., студ., Шинкевич А.О., студ.**

*Витебский государственный технологический университет,
г. Витебск, Республика Беларусь*

Реферат. В статье рассмотрены (с выводом) матричные уравнения, позволяющие найти перемещения и внутренние усилия в стержневых системах под действием заданной нагрузки, а так же в температурной и монтажной задачах. Аналогичные уравнения использованы при получении формул для деформаций сплошной среды с последующим выводом уравнений их совместности.

Ключевые слова: матрицы уравнений, транспонированные матрицы, матрица жесткости, векторы-столбцы, векторы-строки.

На рисунке 1 изображена статически неопределимая стержневая система:

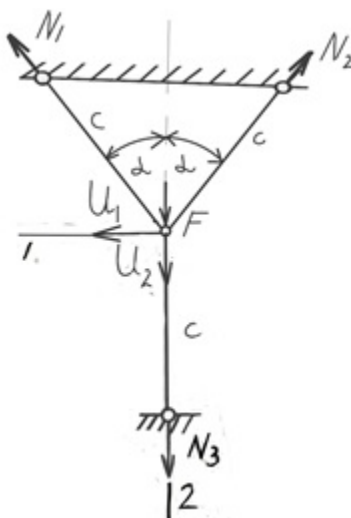


Рисунок 1 – Стержневая система

Уравнения равновесия узла системы :

$$\begin{aligned} -N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha &= 0, \\ N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha - N_3 &= F, \end{aligned} \quad (1)$$

или

$$A * \vec{N} = \vec{F},$$

где A – матрица коэффициентов системы (1)

$$\begin{pmatrix} -\sin \alpha & \sin \alpha & 0 \\ \cos \alpha & \cos \alpha & -1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

\vec{N} и \vec{F} – векторы-столбцы растягивающих сил N_1, N_2, N_3 и заданных сил 0, F. Удлинения (укорочения) стержней

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= -U_1 \sin \alpha + U_2 \cos \alpha, \\ \Delta l_2 &= U_1 \sin \alpha + U_2 \cos \alpha, \\ \Delta l_3 &= -U_2; \end{aligned} \quad \bar{\Delta l} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = A^T \bar{U}, \quad (3)$$

где A^T – транспонированная матрица A (2).

Выразим растягивающие силы через деформации (3):

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= N_1/c, & N_1 &= C\Delta l_1, \\ \Delta l_2 &= N_2/c, & N_2 &= C\Delta l_2, \\ \Delta l_3 &= N_3/c; & N_3 &= C\Delta l_3; \end{aligned} \quad \bar{N} = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta l_2 \\ \Delta l_3 \end{pmatrix} = C\bar{\Delta l} = CA^T \bar{U}, \quad (4)$$

C -матрица жесткости. Уравнения равновесия (1) примут вид уравнений равновесия в перемещениях U_1, U_2

$$A\bar{N} = AC\bar{\Delta l} = ACA^T \bar{U} = \bar{F}. \quad (5)$$

Находя произведения матриц (5) по правилу «строка на столбец» [1, с. 348], определим «вектор» перемещений и «вектор» растягивающих сил:

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ c(2 \cos^2 \alpha + 1) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \cos \alpha \\ 2 \cos^2 \alpha + 1 \\ F \cos \alpha \\ 2 \cos^2 \alpha + 1 \\ -F \\ 2 \cos^2 \alpha + 1 \end{pmatrix}.$$

Положим, что система на рисунке 1 не нагружена, но ее вертикальный стержень нагрет на $\Delta t^\circ C$. Условия равновесия сохраним прежними (1), но удлинение нагретого стержня

$$\Delta l_3 = N_3/c + N_t/c, \quad N_t = E\alpha \Delta t^\circ A \quad [2, \text{с. 35}], \quad \text{т. е. } N_3 = c\Delta l_3 - N_t; \quad \text{усилия (4): } \bar{N} + \bar{N}_t = CA^T \bar{U},$$

уравнение (1):

$$A\bar{N} = A(CA^T \bar{U} - \bar{N}_t) = 0.$$

Аналогичным образом решается монтажная задача (в предположении, что вертикальный стержень системы на рисунке 1 короче, чем нужно, на Δ). В этом случае $\Delta l_3 = \frac{N_3}{c} - \frac{N_\Delta}{c}$, $N_\Delta = c\Delta$.

Уравнения равновесия бесконечно малого элемента сплошной среды [3, с. 80–81] могут быть написаны в виде произведения матриц 3×9 и 9×1 :

$$A\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sigma_z \end{pmatrix} = 0,$$

где символы частного дифференцирования можно рассматривать как множители. Деформации разыщем по правилу (3): транспонируя матрицу A коэффициентов и «умножая» ее на вектор-столбец перемещений \bar{U} : вектор строка $\bar{U}^T = (u, v, w)$. Получим вектор-столбец $\vec{\varepsilon}$: соответствующий вектор-строка $\vec{\varepsilon}^T = (\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} \quad \dots \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z})$. Получено девять выражений через 3 перемещения, следовательно, должны существовать шесть уравнений совместности деформаций, которые получаются исключением перемещений.

Рассмотрим, например, угол сдвига $\gamma_{xy} = \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$. «Умножая» эту сумму на $(\frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial y})$, получим соотношение

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}.$$

Два аналогичных соотношения получаются круговой перестановкой индексов.

Аналогичным образом суммируем алгебраически произведения углов сдвига в

координатных плоскостях на множители $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$. Будут получены удвоенные смешанные производные относительных удлинений.

Список использованных источников

1. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров: определения, теоремы, формулы / Г. Корн и Т. Корн. – Москва: Физматгиз, 1970. – 720 с.
2. Федосеев, Г. Н. Механика материалов: курс лекций / Г. Н. Федосеев, В. Н. Сакевич. – Витебск: ВГТУ, 2012. – 181 с.
3. Безухов, Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Н. И. Безухов. – Москва: Высшая школа, 1968. – 512 с.

УДК 531.312.1

РАСЧЕТ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ИСПОЛНИТЕЛЬНОГО МЕХАНИЗМА В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Локтионов А.В., д.т.н., проф., Векша И.А., студ.

*Витебский государственный технологический университет,
г. Витебск, Республика Беларусь*

Реферат. Получены расчетные формулы и представлен пример расчета дифференциального уравнения движения робота-манипулятора, работающего в прямоугольной системе координат. Предложены аналитические зависимости для расчета скорости центра схвата робота, при координатном способе задания его движения. Получено дифференциальное уравнение движения центра схвата пространственного исполнительного механизма.

Ключевые слова: кинематика, расчет, исполнительный механизм, дифференциальное уравнение, движение, декартовы координаты.

Расчет кинематических параметров трехзвенного робота манипулятора с тремя степенями подвижности при координатном способе задания движения.

Рассмотрим расчет кинематических параметров трехзвенного исполнительного механизма при координатном способе задания движения, представляющего собой незамкнутую кинематическую цепь. Поворотная платформа механизма может поворачиваться на угол φ . Звено со схватом (точка М) поворачивается на угол θ и выдвигается на расстояние r . Найдем скорость и ускорение центра схвата:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

Проекция скорости центра схвата на оси X, Y, Z имеют вид:

$$V_x = \dot{x} = \dot{r} \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi + r \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi - r \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi,$$

$$V_y = \dot{y} = \dot{r} \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi + r \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi,$$

$$V_z = \dot{z} = \dot{r} \cdot \cos \theta - r \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta.$$

Модуль скорости центра схвата: $V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2}$.

Проекция ускорения центра схвата на декартовы оси координат вычисляются как производные по времени от проекций скорости:

$$a_x = \ddot{x} = \ddot{r} \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi + 2\dot{r} \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi - 2\dot{r} \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi - r \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin \theta \cos \varphi +$$

$$+ r \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi - 2r \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi - r \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi - r \cdot \ddot{\varphi} \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi,$$

$$a_y = \ddot{y} = \ddot{r} \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi + 2\dot{r} \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi + 2\dot{r} \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi - r \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi +$$

$$+ r \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi + 2r \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi - r \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi - r \cdot \ddot{\varphi} \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi,$$

$$a_z = \ddot{z} = \ddot{r} \cdot \cos \theta - 2\dot{r} \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta - r \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin \theta - r \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin \theta.$$