

НИТЬ В ПОЛЕ ПЛОСКОГО КОНДЕНСАТОРА

доц. Джежора А.А., асп. Федосов С.Н.

(Витебский государственный технологический университет)

Создание математических моделей электроемкостных преобразователей позволяет обоснованно решать вопросы их проектирования, что существенно повышает точность диагностики физико-механических свойств линейно-протяженных ортотропных материалов, таких как пряжа, волокна, нити (рис.1).

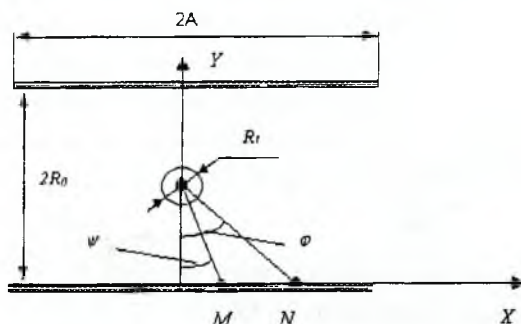


Рис. 1

В данной статье приводится расчет математической модели плоского конденсатора, заполненного диэлектриком цилиндрической формы. Именно такая модель встречается в схемах измерения неровности продуктов прядения по толщине. Расчеты удобнее вести в полярных координатах. Для упрощения положим длину электродов намного больше их ширины. Тогда электромагнитное поле можно рассматривать как плоскопараллельное и произвести расчеты на единицу длины электродов.

Рассмотрим центрально-симметричный случай, когда центр симметрии конденсатора совпадает с центром диэлектрика (рис.1). Если через $\sigma_1(\varphi)$ поверхностную плотность зарядов на электродах, то очевидно, будет иметь место соотношение: $\sigma_1(\varphi) = \sigma_1(-\varphi) = -\sigma_2(\varphi) = -\sigma_2(-\varphi)$.

В начале рассмотрим однородное пространство с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = \epsilon_1$. Согласно теории потенциала для плоскопараллельного поля [1], получим:

$$\int_{-\varphi}^0 \sigma_1(\varphi) * \ln \left| \frac{1}{r_{MN}} \right| * \frac{R_0 d\varphi}{\cos^2(\varphi)} + \int_0^{\varphi} \sigma_1(\varphi) * \ln \left| \frac{1}{r_{MN}} \right| * \frac{R_0 d\varphi}{\cos^2(\varphi)} + \\ + \int_{-\varphi}^0 \sigma_2(\varphi) * \ln \left| \frac{1}{r_{MN}} \right| * \frac{R_0 d\varphi}{\cos^2(\varphi)} + \int_0^{\varphi} \sigma_2(\varphi) * \ln \left| \frac{1}{r_{MN}} \right| * \frac{R_0 d\varphi}{\cos^2(\varphi)} = 2\pi\epsilon_1 \epsilon_0 V_1; \quad (1)$$

где r_{MN} - расстояние между (\cdot) наблюдения M и переменной точкой N;

$$r_{MN} = \frac{R_0^2}{\cos^2(\psi)} + \frac{R_0^2}{\cos^2(\varphi)} \pm \frac{2 * R_0^2 * \cos(\varphi \pm \psi)}{\cos(\psi) * \cos(\varphi)} \quad (2)$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12},$$

V_1 - потенциал на первом электроде.

Аналогичные уравнения можно записать и для второго, верхнего электрода для которого $V_2 = -V_1$. Учитывая, центрально-симметричный характер поля и четность функции $\sigma_i(\varphi)$ перепишем интегральное уравнение (1) в виде:

$$\int_0^{\varphi} \sigma(\varphi) * \ln \left| \frac{[(4 + (tg(\varphi) + tg(\psi))^2)] * [4 + (tg(\varphi) - tg(\psi))^2]}{(tg(\varphi) - tg(\psi))^2 * (tg(\varphi) + tg(\psi))^2} \right| * \frac{R_0 d\varphi}{\cos^2(\varphi)} = 2\pi\epsilon_1 \epsilon_0 V_1; \quad (3)$$

Далее рассмотрим случай двухслойной среды со следующим законом изменения диэлектрической проницаемости:

$$\epsilon(r) = \begin{cases} \epsilon_1, R_1 \leq r \leq \infty \\ \epsilon_2, 0 \leq r \leq R_1 \end{cases} \quad (4)$$

В этом случае на границе раздела R_1 , появляются индуцированные заряды, которые изменяют распределение зарядов на электродах. Влияние индуцируемых зарядов учтем используя метод зеркальных отображений [2]. Согласно данному методу, результирующее поле будет определяться как отраженными зарядами каждого из электродов, так и зарядами возникшими за счет многократных отражений в самом цилиндрическом диэлектрике радиуса R_1 .

Расстояние до отраженных зарядов получаем с помощью законов геометрической области, по которым (\cdot) N и (\cdot) N_1 являются зеркально симметричными относительно границы R_1 . Поверхности электродов при этом переходят в дуги внутри диэлектрика с расстоянием от центра O до (\cdot) N_1 , равным:

$$ON_1 = r = \frac{R_1 * R_0}{2 * R_0 - R_1 * \cos(\varphi)}; \quad (5)$$

Соответствующие коэффициенты отражения для индуцируемых зарядов:

$$\lambda_1 = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} * (r)^2 \quad (6)$$

В самом цилиндрическом диэлектрике за счет многократных отражений от границы раздела ($\varepsilon_2, \varepsilon_1$), также возникнут наведенные индуцируемые заряды. Координаты индуцируемых зарядов для первого и второго электродов соответственно равны:

$$\eta_\delta = \frac{R_1 * R_0}{2 * (2\delta - 1) * R_0 + R_1 * \cos\varphi}; \quad \delta = 1, 2, 3;$$

$$r_{2\delta} = \frac{R_1 * R_0}{2 * (2\delta - 2) * R_0 + R_1 * \cos\varphi}; \quad \delta = 1, 2, 3; \quad (7)$$

Этим зарядам соответствуют коэффициенты отражения $\lambda_{2\delta}$ и коэффициенты пропускания $\lambda_{3\delta}$:

$$\lambda_{2\delta} = \lambda_2 * \gamma^{\delta-1} (\eta_\delta)^2$$

$$\lambda_{3\delta} = \lambda_3 * \gamma^{\delta-1} (r_{2\delta})^2 \quad (8)$$

где:

$$\lambda_2 = \frac{4\varepsilon(\varepsilon-1)}{(1+\varepsilon)^3}; \quad \lambda_3 = \frac{4\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}; \quad \gamma = \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2; \quad (9)$$

δ - порядок отражения.

Расстояние между () наблюдения M и переменной () N

$$r_{MN} = \left(\frac{R_0}{\cos(\psi)}\right)^2 + r_\delta^2 - \frac{2 * R_0 * r_\delta * \cos(\varphi \pm \psi)}{\cos(\psi)}; \quad (10)$$

Таким образом, получаем систему интегральных уравнений для трехслойной среды:

$$\int_0^\varphi \sigma(\varphi) * [k(\varphi, \psi) * \frac{R_0}{\cos^2(\varphi)} + \lambda_1 * L(\varphi, \psi) * R_0 * \cos(\varphi) + \lambda_2 * M(\varphi, \psi) * R_0 * \cos(\varphi) + \lambda_3 * N(\varphi, \psi) * R_0 \cos(\varphi)] d\varphi = 4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0 V;$$

где $0 < \psi < \varphi$; (11)

$$L(\varphi, \psi) = \ln \left| \frac{1}{\left(\frac{R_0}{\cos(\psi)}\right)^2 + \left(\frac{R_1 \cdot R_0}{2 \cdot R_0 - R_1 \cdot \cos(\varphi)}\right)^2 - \frac{2 \cdot R_0^2 \cdot R_1 \cdot \cos(\varphi - \psi)}{\cos(\psi) \cdot (2 \cdot R_0 - R_1 \cdot \cos(\varphi))}} \right| \cdot \left(\frac{R_1}{2 \cdot R_0 - R_1 \cdot \cos(\varphi)}\right)^3 \quad (12)$$

$$M(\varphi, \psi) = \sum_{\delta=1}^{\infty} \gamma^{\delta-1} \cdot \ln \left| \frac{1}{\left(\frac{R_0}{\cos(\psi)}\right)^2 + \gamma \delta^2 + \frac{2 \cdot R_0 \cdot \gamma \delta \cdot \cos(\varphi + \psi)}{\cos(\psi)}} \right| \cdot \left(\frac{R_1}{2 \cdot (2 \cdot \delta - 1) \cdot R_0 + R_1 \cdot \cos(\varphi)}\right)^3 \quad (13)$$

$$N(\varphi, \psi) = \sum_{\delta=1}^{\infty} \gamma^{\delta-1} \cdot \ln \left| \frac{1}{\left(\frac{R_0}{\cos(\psi)}\right)^2 + r_2 \delta^2 + \frac{2 \cdot R_0 \cdot r_2 \delta \cdot \cos(\varphi - \psi)}{\cos(\psi)}} \right| \cdot \left(\frac{R_1}{2 \cdot (2 \delta - 2) \cdot R_0 + R_1 \cdot \cos(\varphi)}\right)^3 \quad (14)$$

В силу симметрии задачи, интегральное уравнение для верхнего электрода будет иметь аналогичный вид.

Для численного решения уравнения (11) воспользуемся методом Крылова-Боголюбова. Согласно названному методу, промежуток интегрирования разбивают на участки, где искомая функция полагается постоянной и выносится за знак интеграла [1]. Этим самым интегральное уравнение преобразуется в систему линейных алгебраических уравнений, решение которой дает дискретные значения искомой функции $\sigma(\varphi)$. Для улучшения сходимости шаг интегрирования выберем переменным и зададим с помощью геометрической прогрессии:

$$l_i = \beta_j - \alpha_i = \arctg \frac{Q \cdot (1 - q^i)}{R_0 \cdot (1 - q^k)} - \arctg \frac{Q \cdot (1 - q^{i-1})}{R_0 \cdot (1 - q^N)} \quad (15)$$

где $2a$ - ширина электрода;

q - знаменатель геометрической прогрессии;

$i=1, 2, 3, \dots, N$.

Таким образом

$$\sigma(\varphi) = \begin{cases} \sigma(1), 0 \leq \varphi \leq \arctg \frac{Q^*(1-q)}{R_0^*(1-q^N)} \\ \sigma(i), \arctg \frac{Q^*(1-q^{i-1})}{R_0^*(1-q^N)} \leq \varphi \leq \arctg \frac{Q^*(1-q^i)}{R_0^*(1-q^N)} \\ \sigma(N), \arctg \frac{Q^*(1-q^{N-1})}{R_0^*(1-q^N)} \leq \varphi \leq \arctg \frac{Q}{R_0} \end{cases} \quad (16)$$

С учетом (16) уравнение (11) примет вид:

$$\sum_{i=1}^N \sigma_i \cdot \int_{\alpha_i}^{\beta_i} (k(\psi_j, \varphi) \cdot \frac{R_0}{\cos^2 \varphi} + \lambda_1 \cdot L(\psi_j, \varphi) \cdot R_0 \cos \varphi + \lambda_2 \cdot M(\psi_j, \varphi) \cdot R_0 \cos \varphi + \lambda_3 \cdot N(\psi_j, \varphi)) d\varphi = 4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_1 V; \quad (17)$$

$$\text{где } \psi_j = \frac{1}{2} \cdot \left(\arctg \frac{a}{R_0} \cdot \frac{1-q^j}{1-q^N} + \arctg \frac{a}{R_0} \cdot \frac{1-q^{j-1}}{1-q^N} \right); \quad (18)$$

$$j=1,2,3,\dots,N.$$

После нахождения функций распределения поверхностной плотности заряда $\sigma(i)$ можно найти емкость единицы длины проходного преобразователя.

$$C_1 = \frac{2}{V} \sum_{i=1}^N \sigma_i l_i \quad (19)$$

Литература

Матис И. Г. "Электроемкостные преобразователи для неразрушающего контроля".

Джежора А. А. "Расчет емкости датчика с симметричной системой плоских ленточных электродов в случае контроля гетерогенных сред" Деп. рук. ВИНТИ от 20.02.1989г. №1099-В89.