МОДЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ТЕПЛОСОДЕРЖАНИЯ ДЛЯ НИТИНОЛА

Пряхин С.С., Лесота А.В.
Институт технической акустики НАН Беларуси,
г. Витебск, Беларусь,E-mail: sspryakhin@yandex.by, ann20zv@tut.by

Ключевым элементом разработки функциональных элементов из нитинола является прогнозирование их поведения на основе моделей. Представляется, что макроскопические модели, основанные на термодинамическом подходе, являются продуктивными. В связи с этим, понимание связи теплосодержания с изменением температуры представляется актуальным. Отметим работу [1], в которой на участке фазового перехода предлагалось учитывать добавку к теплоемкости в виде функции

$$\Delta C(T) = \mathrm{const}\cdot\cos^2\left[\frac{\pi}{2}\frac{(T-T_\Phi)}{\Delta T_\Phi}\right], \qquad (1)$$

где T_Φ - середина температурного отрезка фазового перехода; ΔT_Φ - полуширина.

При этом автор заострял внимание на равенство нулю изменения теплосодержания в цикле между температурными точками завершения прямых и обратных фазовых превращений. Настоящая работа является попыткой построить модельную функцию теплосодержания q для нитинола, представив ее в зависящей от переменных температуры T и внутренней переменной (содержания мартенсита) ξ:

$$q = q(T,\xi) \qquad (2)$$

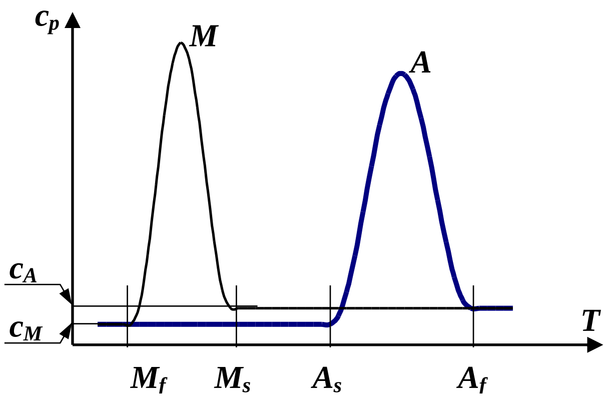

Рисунок 1 – Кривые изменения теплоемкости нитинола c_p (T) при росте температуры A и понижении температуры M с участками полных фазовых переходов: $M_f \le T \le M_s$ – прямое мартенситное превращение; $A_s \le T \le A_f$ – обратное превращение

На рисунке 1 изображен ход зависимостей теплоемкости от температуры для ветвей A и M, содержащих участки обратных и прямых мартенситных превращений, соответственно. Проанализируем изменение теплосодержания на ветви нагрева при изменении температуры от M_f до A_f. На отрезке $M_f \le T \le A_s$ фазовый состав полностью мартенситный, т.е. ξ=1 и изменение теплосодержания отвечает нагреву мартенситной фазы с теплоемкостью c_M.

$$q(T,1) - q(M_f,1) = c_M (T - M_f). \qquad (3)$$

Изменения теплосодержания $q(T,\xi)$ сплава при последующем повышении температуры T на отрезке $A_s \le T \le A_f$ сопровождается изменением фазового состава от полностью мартенситного $\xi_0 = \xi(A_s) = 1$ до полностью аустенитного $\xi_f = \xi(A_f) = 0$. При этом теплоемкость меняется от $c_0 = c(A_s) = c_M$ до теплоемкости аустенитной фазы $c_f = c(A_f) = c_A$. Считаем, что доля мартенсита ξ описывается уравнением [2]:

$$\xi = \frac{\xi_0}{2}\left[1+\cos\left(\pi\frac{T-A_s}{A_f-A_s}\right)\right]_{A_s \le T \le A_f} \qquad 0 \le \xi \le 1, \qquad (4)$$

ξ_0 – параметр ветви A, отвечающий содержанию мартенсита при $T=A_s$.

Изменение теплосодержания (2) на отрезке $A_s \le T \le A_f$ обозначим как функцию

$$q_A(T,\xi) = q(T,\xi) - q(A_s,\xi_0)\,, \tag{5}$$

полный дифференциал которой представляется в виде

$$dq_A = \left(\frac{\partial q_A}{\partial T}\right)_\xi dT + \left(\frac{\partial q_A}{\partial \xi}\right)_T d\xi\,. \tag{6}$$

Частную производную по температуре в (6) представим в виде

$$\left(\frac{\partial q_A}{\partial T}\right)_\xi = c_A - \frac{1}{2}(\xi+\xi_0)(c_A - c_M)\,. \tag{7}$$

Перекрестное дифференцирование частных производных в (6) дает равные значения независимо от порядка дифференцирования. Поэтому, приняв (7), выпишем

$$\frac{\partial^2 q_A}{\partial T \partial \xi} = \frac{\partial^2 q_A}{\partial \xi \partial T} = -\frac{1}{2}(c_A - c_M)\,. \tag{8}$$

Равенство (8) позволяет представить частную производную функции q_A по ξ в виде

$$\left(\frac{\partial q_A}{\partial \xi}\right)_T = \int_{A_s}^{T} \frac{\partial^2 q_A}{\partial \xi \partial T} dT + f(\xi) = -\frac{1}{2}(c_A - c_M)(T - A_s) + f(\xi)\,, \tag{9}$$

где для функции $f(\xi)$ допускается произвол на отрезке $\xi \in [0, 1]$.

Заметим, что функция вида

$$F_1(T,\xi) = \left[c_A - (c_A - c_M)(\xi+\xi_0)/2\right](T - A_s) \tag{10}$$

удовлетворяет уравнению для части производной, выписанной в (9), без учета $f(\xi)$

$$\left(\frac{\partial q_A}{\partial \xi}\right)_T = -\frac{1}{2}(c_A - c_M)(T - A_s) \tag{11}$$

уравнению для производной (7) и начальному значению

$$q_A(A_s,\xi_0) = 0\,. \tag{12}$$

Учтем вклад функции $f(\xi)$ в (9) в изменение теплосодержания (5), в виде добавочной функции $F_2(\xi)$

$$q_A(T,\xi) = q(T,\xi) - q(A_s,\xi_0) = F_1(T,\xi) + F_2(\xi) \tag{13}$$

Примем

$$f(\xi) = -\alpha\sqrt{\xi(1-\xi)}\,, \tag{14}$$

где α – положительная константа размерности Дж/кг. Функция $f(\xi)$ положительно определена на отрезке $0 \le \xi \le 1$, на его краях равна нулю, имеет максимум в $\xi=0.5$ и симметрична относительно этой точки. Получим выражение для $F_2(\xi)$ в виде

$$F_2(\xi) = -\alpha\int_1^{\xi} \sqrt{x(1-x)}\,dx = \alpha\int_{\xi}^{1} \sqrt{x - x^2}\,dx\,, \tag{15}$$

где

$$\int_{\xi}^{1} \sqrt{x - x^2}\,dx = \frac{1}{8}\left[\frac{\pi}{2} - (4\xi - 2)\sqrt{\xi - \xi^2} - \frac{1}{2}\arcsin(2\xi - 1)\right]. \tag{16}$$

Если в функции изменения теплосодержания $F_2(\xi)$ (15) величину ξ связывать с T уравнением (4) при $\xi_0 = 1$, то она воспроизведет теплосодержание, отвечающее интегральной функции, построенной по функции теплоемкости вида (1).

Отметим, что в точке окончания фазового перехода значение функции

$$F_2(\xi = 0) = \alpha\pi/8\,. \tag{17}$$

Используя выражения (3), (10), (17), составим выражение для изменения теплосодержания в нитиноле при повышении температуры от M_f до A_s:, нагрев ***A***:

$$q(A_f,0) - q(M_f,1) = c_M(A_f - M_f) + [(c_A - c_M)(A_f - A_s)/2 + \alpha\pi/8] \quad (18)$$

Квадратными скобками в правой части (18) выделена составляющая изменения тепла, обусловленная только приращениями мартенситной фазы $d\xi$ в уравнении (6). Поэтому резонно называть ее скрытой теплотой фазового перехода при превращении мартенсита в аустенит и обозначить

$$L_A = (c_A - c_M)(A_f - A_s) + \alpha\pi/8 \quad (19)$$

Аналогично получаем выражение для изменения теплосодержания в нитиноле при уменьшении температуры от A_S до M_f, отвечающее на рис. 1, за охлаждение:

$$q(M_f,1) - q(A_f,0) = -c_A(A_f - M_s) - c_M(M_s - M_f) - [(c_A - c_M)(M_s - M_f)/2 + \mu\pi/8] \quad (20)$$

При анализе прямого мартенситного перехода:

Принималось во внимание уравнение Лианга-Роджерса эквивалентное [2]

$$1-\xi = \frac{1-\xi_0}{2}\left[1+\cos\left(\pi\frac{T-M_f}{M_s-M_f}\right)\right]_{M_f \le T \le M_s} \quad 0 \le \xi \le 1, \quad (21)$$

ξ_0 – параметр ветви М, отвечающий содержанию мартенсита при $T=M_S$.

Получены функции изменений теплосодержания, являющиеся аналогами функций (10), (15) ветви мартенситных превращений

$$F_3(T,\xi) = [c_A - (c_A - c_M)(\xi+1)/2](T - M_s) \quad (22)$$

$$F_4(\xi) = -\mu\int_0^{\xi}\sqrt{x-x^2}\,dx \qquad 0 \le \xi \le 1, \quad (23)$$

где μ – положительная константа размерности Дж/кг.

$$F_4(\xi=1) = -\mu\pi/8. \quad 24)$$

В силу симметрии подынтегральной функции в (23) относительно ξ = 0.5 можно использовать аналитическое выражение (16), поскольку $\int_{\xi}^{1}\sqrt{x-x^2}\,dx = \int_0^{\xi}\sqrt{x-x^2}\,dx$.

Обозначим выделенную в (20) составляющую как *скрытую теплоту фазового перехода* аустенита в мартенсит

$$L_M = (c_A - c_M)(M_s - M_f) + \mu\pi/8 \quad (25)$$

Используя (18), (20), потребуем равенства изменения тепла нулю в температурном цикле $M_f \to A_f \to M_f$. Преобразовав полученное уравнение, получим

$$c_M(A_f - M_s) + L_A = c_A(A_f - M_s) + L_M \quad (26)$$

Понятие скрытой теплоты фазового перехода следует трактовать как долю изменения теплосодержания $\Delta q(T,\xi)$, обусловленную изменением фазовой компоненты ξ. Поскольку теплоемкость аустенитной фазы нитинола почти вдвое превышает теплоемкость мартенситной $c_A > c_M$, из уравнения (26) следует, что величины скрытой теплоты прямого и обратного фазового перехода различаются между собой: $L_A > L_M$. Температурно обусловленные составляющие в уравнении (26) можно трактовать как перегрев или переохлаждение, необходимые для соответствующего фазового перехода.

Список литературы:

1. Вьюненко, Ю.Н. Эффект памяти формы, инициируемый механизмом остаточных напряжений // Перспективные технологии и методы контроля. – Витебск: УО «ВГТУ», 2009. – Гл. 14. – С. 384-399.

2. Liang, C., Rogers C.A. One-dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials// Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 1990. – Vol. 1, Issue 2. – P. 207-234.