УДК 621.643.054

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЛОКАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА МИНИМАЛЬНЫМИ ПОЛНЫМИ ВНУТРЕННИМИ РАДИКАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Станкевич Е.М.

В теории формаций конечных групп основными объектами исследования являются локальные формации, которые определяются при помощи функций, называемых локальными экранами [1]. Основополагающими для всей теории формаций стали результаты о том, что каждую локальную формацию можно конструировать при помощи внутренних, полных и минимальных экранов.

В настоящей работе для классов Фиттинга конечных групп исследуются вопросы, двойственные известным в теории формаций конечных групп вопросом конструирования локальных формаций [1 - 3]. Приводятся примеры построения некоторых локальных классов Фиттинга при помощи радикальных функций. Получено явное описание конструирования произвольных локальных классов Фиттинга конечных групп при помощи минимальных полных внутренних радикальных функций [2].

Предполагается, что все рассматриваемые группы в статье конечны. Используемые определения и обозначения можно найти в [1 - 3].

Класс Фиттинга F называют локальным [3], если существует такая локальная радикальная функция f, что

$$F = G_{\pi(F)} \cap (\bigcap_{p\in\pi(F)} f(p)N_pG_{p}')$$

При этом f называют радикальной функцией класса F.

Рассмотрим построение с помощью радикальных функций некоторых конкретных классов групп.

Пусть F - класс Фиттинга, который определяется локально радикальной функцией f. Тогда:

1) если $\pi(F)$ - множество всех простых чисел и радикальная функция f сопоставляет каждому простому p класс единичных групп, то F - класс всех нильпотентных групп;

2) если $\pi(F) = \{p\}$ и радикальная функция f сопоставляет каждому простому p класс всех конечных p-групп, то F - класс всех конечных групп;

3) если $\pi(F) = \pi$ - некоторое множество простых чисел и f сопоставляет каждому простому p из множества π класс всех конечных π -групп, то F - класс всех конечных π -групп;

4) если π (F) - множество всех простых чисел и f сопоставляет каждому простому p из множества π (F) класс всех конечных групп, то F - класс всех конечных групп.

Радикальную функцию f класса Фиттинга F называют внутренней [2,3], если $f(p) \subseteq F$, и полной [2], если $f(p)\ Np = f(p)$ для всех простых p.

Докажем основной результат настоящей работы - теорему, явно описывающую конструирование произвольных локальных классов Фиттинга при помощи минимальных полных внутренних радикальных функций.

ТЕОРЕМА. Каждый локальный класс Фиттинга F обладает единственной минимальной полной внутренней радикальной функцией f такой, что для каждого простого p из множества $\pi(F)$ имеет место равенство

$f(p) = \text{Fit}\ \{ G \in F \mid G^{Np}$ изоморфен $H^{NpGp'}$ $(H \in F)\}\ Np$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u - произвольная полная внутренняя радикальная функция, которая определяет локально класс Фиттинга F, то есть

$$F = G_{\pi(F)} \cap (\bigcap_{p\in\pi(F)} u(p)NpGp')$$

Обозначим через v(p) множество всех групп $\{ G \in F \mid G^{Np}$ изоморфен $H^{Np\ Gp'}$ $(H \in F) \}$, где p принадлежит множеству $\pi(F)$.

Если $G \in v(p)$, то G^{Np} изоморфен $H^{Np\ Gp'}$ для некоторой группы $H \in F$. Из того, что $H \in F$, по определению класса F следует, что $H \in \bigcap_{p\in\pi(F)} u(p)NpGp'$ и, следовательно, $H \in u(p)\ Np\ Gp'$ для некоторого простого p из множества $\pi(F)$.

По определению произведения классов Фиттинга [2] получаем $H/H_{u(p)} \in NpGp'$. Но, тогда по определению корадикала формации [1] $H^{Np\ Gp'} \subseteq H_{u(p)}$. Так как $H_{u(p)} \in u(p)$ и $H^{Np\ Gp'}$ - нормальная подгруппа группы $H_{u(p)}$, то по определению класса Фиттинга [2] $H^{Np\ Gp'} \in u(p)$.

Итак, мы получили, что G^{Np} изоморфен $H^{Np\ Gp'}$ и $H^{Np\ Gp'} \in u(p)$. Тогда $G^{Np} \in u(p)$. Следовательно, по определению произведения формаций [1] $G \in u(p)Np$.

Но u - полная радикальная функция, поэтому $u(p)\ Np = u(p)$. Следовательно, $G \in u(p)$.

Итак, мы показали, что имеет место включение $v(p) \subseteq u(p)$ для каждого простого p из множества $\pi(F)$. Тогда $\text{Fit}\ v(p) \subseteq \text{Fit}\ u(p)$. По определению порожденного класса Фиттинга $\text{Fit}\ u(p) = u(p)$. Поэтому $\text{Fit}\ v(p) \subseteq u(p)$. Значит, $(\text{Fit}\ v(p))\ Np \subseteq u(p)\ Np$ для каждого простого p из множества $\pi(F)$.

Построим радикальную функцию f такую, что $f(p) = (\ \text{Fit}\ \{ G \in F \mid G^{Np}$ изоморфен $H^{NpGp'}$ $(H \in F)\ \}\ )\ Np = (\ \text{Fit}\ v(p)\ )\ Np$ для каждого простого p из множества $\pi(F)$.

Будем считать, что эта функция локально определяет класс Фиттинга

$$F^* = G_{\pi(F)} \cap (\bigcap_{p\in\pi(F)} f(p)NpGp'$$

для всех простых p из множества $\pi(F)$.

По установленному ранее $f(p) \subseteq u(p)\ Np = u(p)$ для каждого простого p из множества $\pi(F)$. Следовательно, по определению классов F и F* получаем $F^* \subseteq F$.

Докажем обратное включение. Пусть $G \in F$. Так как $G^{Np\ Gp'} = (\ G^{Gp'}\ )^{Np}$ и $G \in F$, то $G^{Gp'} \in v(p) \subseteq f(p)$ для каждого простого p из множества $\pi(F)$.

Так как $Gp' \subseteq Np\ Gp'$, то $G^{NpGp'} \subseteq G^{Gp'} \in f(p)$. Следовательно, $G^{NpGp'} \in f(p)$. Тогда по определению произведения классов Фиттинга $G \in f(p)\ Np\ Gp'$ для каждого простого p из множества $\pi(F)$. Значит,

$$G \in \bigcap_{p\in\pi(F)} f(p)NpGp'$$

Но, из того, что $G \in F$, следует $G \in G_{\pi(F)}$. Следовательно,

$$G \in G_{\pi(F)} \cap (\bigcap_{p\in\pi(F)} f(p)NpGp') = F^*$$

Таким образом, мы показали, что $F \subseteq F^*$ и $F^* \subseteq F$. Значит, $F = F^*$. Это доказывает, что f - минимальная радикальная функция среди множества всех полных внутренних функций класса F. Тем самым теорема доказана.

Литература:

1. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 272 с.
2. Воробьев Н.Т. О локальных радикальных классах // Вопросы алгебры. Минск: Изд-во "Университетское", 1986. Вып. 2. С. 22-34.
3. Воробьев Н.Т. О максимальных и минимальных групповых функциях локальных классов Фиттинга // Вопросы алгебры. Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1992. Вып. 7. С. 60-69.