УДК 620.1.052.1

СЖАТИЕ УПРУГОГО ШАРА ОПОЯСЫВАЮЩЕЙ НАГРУЗКОЙ

Калинин А.А., Федосеев Г.Н.

Интегральные уравнения краевой задачи теории упругости для тела вращения с осесимметричными силовыми граничными условиями, построенные на эластопотенциалах простого слоя, имеют вид [1]

$$2\pi G\eta\mu_i(x)+\int_L \mu_k(y)D_{ij}^k(x,y)\alpha_j dL = p_i(x) \quad (i,j,k=\rho,t,z), \qquad (1)$$

где $\mu_i(x)$ и $\mu_k(y)$ - компоненты вектора плотности эластопотенциала в фиксированной и переменной при интегрировании точках x и y границы L меридионального сечения тела вращения;

α_j - направляющие косинусы нормали к контуру L (в фиксированной точке x);

$p_i(x)$- поверхностные усилия;

η- коэффициент, принимающий значения 1 (для внутренней задачи), -1 (для внешней задачи);

G- модуль сдвига материала тела;

ρ ,t ,z - координатные направления (радиальное, окружное и параллельное оси симметрии) в точке x.

Ядра D_{ij}^k (x, y) в уравнениях (1) получаются путем интегрирования ядер уравнений трехмерной задачи [2] (по окружной координате)

$$d_{ij}^k(x,y)=T_{jr}(\frac{\partial}{\partial x},x_i)\Gamma_{rk}(\frac{\partial}{\partial x})\frac{|r|}{2}$$

где $T_{jr}(\frac{\partial}{\partial x},x_i)$, - оператор напряжения;

$\Gamma_{rk}(\frac{\partial}{\partial x})$- оператор Галеркина,

r- вектор, имеющий начало в точке x, а конец в точке y.

Приближенное решение задачи получается заменой уравнений (1) алгебраическим аналогом, найденные значения плотности μ используются для определения напряжений в точках z тела вращения

$$\sigma_{ij}(z)=\int_L \mu_k(y)D_{ij}^k(z,y)dL,(i,j,k=\rho,t,z)$$

Рассмотрим сжатие упругого шара нагрузкой, опоясывающей его по экватору (рис.1),

$$p_\rho=\begin{cases}-A\left(1+\cos\frac{\pi\gamma}{2\alpha}\right) & \text{при} \quad -\alpha\le\gamma\le\alpha \\ 0 & \text{при} \quad \alpha\langle\gamma\le\pi/2,\cdots-\alpha\rangle\gamma\ge-\pi/2;\end{cases}$$

$$p_z=0$$

и, положив $|p_\rho|$max = 100 (при этом коэффициент A = 50), оценим влияние размеров области распределения нагрузки (α = 4° , 8° , 12°) на напряженное состояние в точках экваториального сечения шара. На рис. 2 показано, что по мере удаления от поверхности шара значения напряжений $б_{pp}$ (отнесенные к интенсивности нагрузки $p = R\int_{-\alpha}^{\alpha}|p_\rho|d\gamma$), соответствующие различным значениям угла , сближаются (при ρ = 0,6 расхождения этих значений не превышает 2,6%). Аналогичным образом ведут себя и напряжения $б_{tt}$ (рис. 3). Что касается точек, близких к поверхности шара, при сужении области распределения нагрузки напряжения $б_{pp}$ приближаются к напряжениям $б_x$ в задаче Фламана [3] (график последних показан на рис. 2 штрихами).

На рис. 4 изображены графики напряжений $б_{zz}$. Растягивающие напряжения $б_{zz}$ распределены в растянутой зоне почти равномерно. По мере сужения области распределения нагрузки размеры растянутой зоны растут; точка, где действует наибольшее растягивающее напряжение, смещается к поверхности шара.

Наконец, на рис. 5 показаны графики эквивалентного напряжения , найденного по известному критерию Треска-Сен-Венана. Наиболее опасные точки находятся не на поверхности шара, а на некотором удалении от нее. По мере сужения области распределения нагрузки (при ее стремлении к распределенной по экватору) опасные точки асимптотически приближаются к поверхности шара.

Литература:

1. Капейкін Ю.Д., Калінін А.А. Прамое рашэнне восесіметрычнай другой краявой задачы тэорыі пругкасці метадам бігарманічных патэнцыялау//Изв.АН БССР.1972.N 3. Сер.физ.-матем.Наук.
2. Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. Трехмерные задачи математичекской теории упругости. Тбилиси: Тбилисский университет,1968.
3. Лурье А.И. Теория упругости. М.:Наука, 1970.

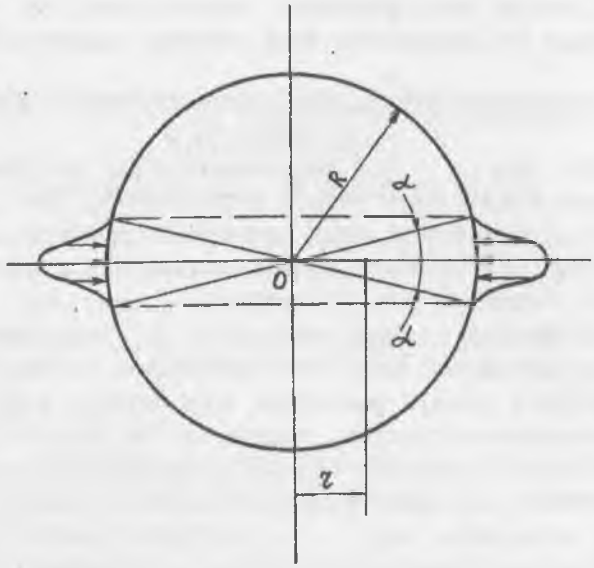

Рис. 1. Опоясывающая нагрузка.

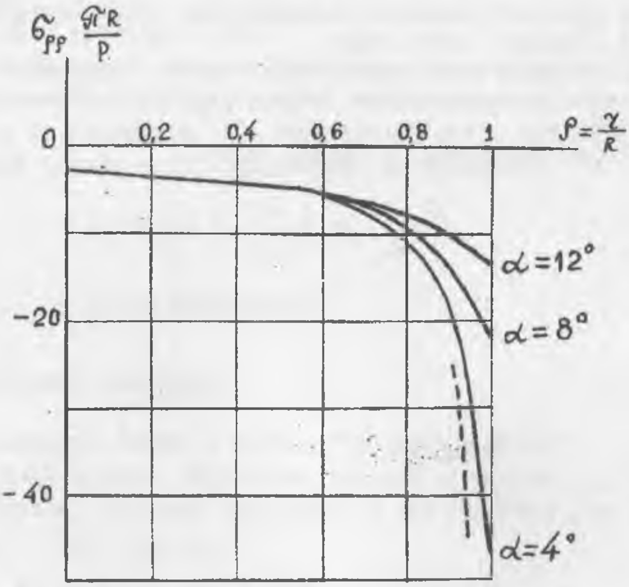

Рис. 2. Напряжения $б_{pp}$ в экваториальной плоскости.

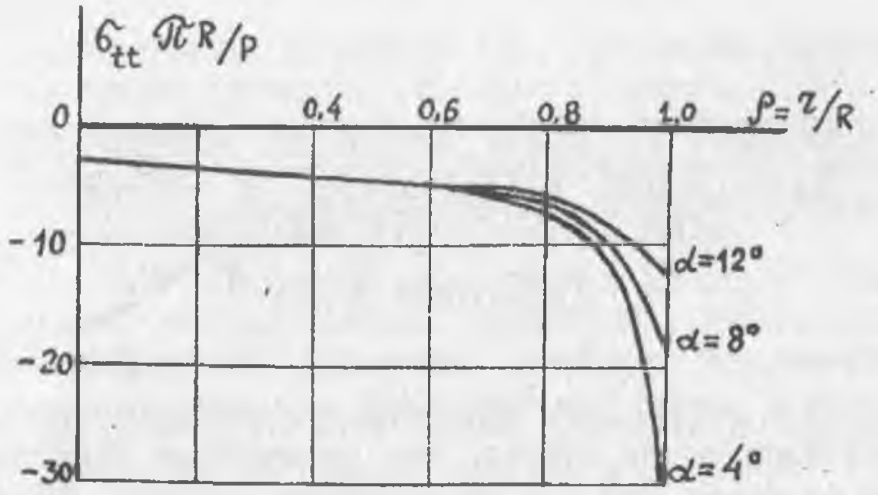

Рис. 3. Напряжения σ_{tt} в экваториальной плоскости.

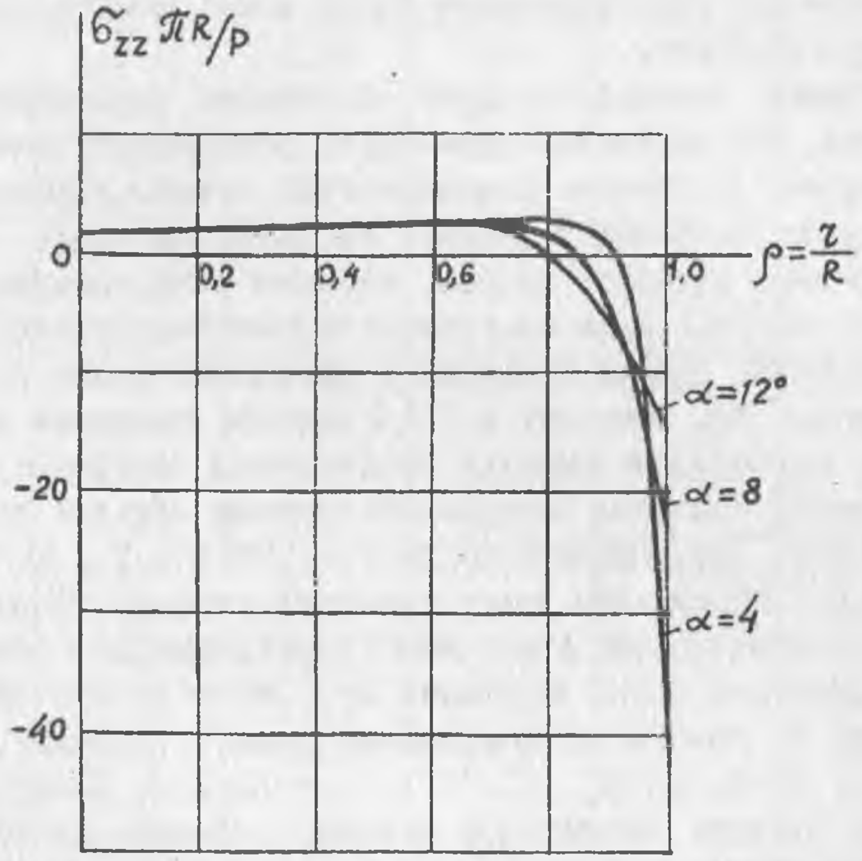

Рис. 4. Напряжения σ_{zz} в экваториальной плоскости.

Рис. 5. Эквивалентные напряжения в экваториальной плоскости.